С. Г. Пятков, Разрешимость одной краевой задачи для псевдопараболических уравнений четвертого порядка, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2005, том 5, выпуск 3, 43–56

ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том V, 2005 г. Выпуск 3. С. 43–56

УДК 517.95

Разрешимость одной краевой задачи для псевдопараболических уравнений четвертого порядка[1]

С. Г. Пятков

Введение

Мы рассматриваем псевдопараболические уравнения вида

$$Mu = L_0(x,t,D_x)u_t + L_1(x,t,D_x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \tag{0.1}$$

где $T > 0$, $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ и L_1, L_0 — эллиптические операторы четвертого и второго порядка, соответственно:

$$L_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u, \quad L_1 u = \sum_{|\alpha|\le 4} a_\alpha(x,t)D^\alpha u.$$

Краевые условия имеют вид

$$u|_S = \varphi(x,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi(x,t), \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad S = \Gamma \times (0,T), \tag{0.2}$$

где n — вектор внешней нормали к Γ. Уравнение вида (0.1) возникает при исследовании обратных задач для параболических уравнений второго порядка, когда дополнительные данные задаются на боковой поверхности цилиндра, или при исследовании близких к ним задач (см., напр., [1, 2]). Уравнения такого вида или близкие к ним обычно называют уравнениями типа Соболева, поскольку они имеют такой же тип или близки с точки зрения свойств решений к известному уравнению С. Л. Соболева. Краевые задачи для них исследовались в работах Т. И. Зеленяка, С. В. Успенского, Г. В. Демиденко и многих других авторов (см. библиографию в [3]). В частности, для уравнения (1) исследовался вопрос о разрешимости задачи Коши ($G = \mathbb{R}^n$) и вопрос о разрешимости краевой

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 03–01–00819)

задачи (0.1), (0.2) в полупространстве ($G = \mathbb{R}^n_+$) [3]. В данной работе, используя весовые пространства Соболева, мы исследуем вопрос о разрешимости задачи (0.1), (0.2) в ограниченной области G.

Работа состоит из следующих частей. В § 1 мы приводим необходимые определения и вспомогательные результаты. § 2 посвящен разрешимости некоторых вспомогательных задач и наконец в § 3 посвящен разрешимости задачи (0.1), (0.2). Определения функциональных пространств в основном стандартные и могут быть найдены в [5, 6].

§ 1. Определения и вспомогательные результаты

Через $(\cdot,\cdot)$ обозначаем скалярное произведение в $L_2(G)$, т. е.

$$(u,v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}\,dx,$$

Под $W^s_p(G)$, $W^s_p(S)$ (соответственно $B^s_{p,q}(G)$, $B^s_{p,q}(S)$) и т.д. понимаем пространства Соболева и Бесова. Полагаем $W^{-s}_p(G) = (\overset{\circ}{W}{}^s_q(G))'$ $(s > 0,\ p \in (1,\infty))$ [5], $W^{\alpha,\beta}_p(Q) = L_p(0,T;W^\alpha_p(G)) \cap L_p(G;W^\beta_p(0,T))$ и $W^{\alpha,\beta}_p(S) = L_p(0,T;W^\alpha_p(\Gamma)) \cap L_p(\Gamma;W^\beta_p(0,T))$. Аналогично определяем анизотропные пространства Гельдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$ и анизотропные пространства Бесова. Положим $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\}$, $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \ t > 0\}$, $\mathbb{R}^{n+1}_{++} = \mathbb{R}^n_+ \times R_+ = \{(x,t) :\ x \in \mathbb{R}^n_+, t > 0\}$.

Всюду в работе мы предполагаем, что $\Gamma \in C^4$ [7]. При этих условиях существует функция $\rho(x) \in C^4(\overline{G})$ такая, что для некоторых постоянных $\delta, M > 0$ в G выполнено неравенство $\delta\rho(x) \le \rho(x,\Gamma) \le M\rho(x)$, где $\rho(x,\Gamma)$ — расстояние от $x \in G$ до Γ. Положим $H^k_p(G) = \{u \in L_p(G) :\ \rho D^\alpha_x u \in L_p(G),\ |\alpha| \le k\}$, $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_p(G) = \{u \in H^2_p(G) :\ u|_\Gamma = 0\}$, $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^k_p(G) = \{u \in H^k_p(G) :\ u|_\Gamma = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = 0\}$ $(k = 3,4)$. Если $G = \mathbb{R}^n_+$, то определяем пространство $H^k_p(\mathbb{R}^n_+)$ аналогично, полагая $\rho = x_n$. Из неравенства Харди вытекает, что $H^k_p(G) \subset W^{k-1}_p(G)$, $H^k_p(\mathbb{R}^n_+) \subset W^{k-1}_p(\mathbb{R}^n_+)$. Обозначим через $L_{p,\rho}(G)$ $(L_{p,\rho}(Q))$ весовое пространство с нормой $\|u\|_{L_{p,\rho}(G)} = \|\rho u\|_{L_p(G)}$ $(\|u\|_{L_{p,\rho}(Q)} = \|\rho u\|_{L_p(Q)})$.

Пространства $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+)$, $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ определяем аналогично. Пусть $H_p = \{u \in L_p(0,T;H^4_p(G)) :\ u_t \in L_p(0,T;H^2_p(G))\}$. Положим $B^s_{p,\rho}(G) = (H^4_p(G), H^2_p(G))_{\theta,p}$ $(4 - 2\theta = s)$. Норма в этом пространстве описана в теореме 3.3.3 в [5] (там используется обозначение $W^k_p(G,\rho)$ вместо $H^k_p(G)$). Эта теорема приведена для случая границ класса C^∞. Однако, используя свойство инвариантности класса $H^4_p(G)$ относительно замены переменной класса C^4 нетрудно убедиться, что утверждение теоремы остается справедливым. При $p = 2$ соответствующее пространство $B^3_{2,\rho}(G)$ совпадает с $H^3_2(G)$.

Лемма 1.1. *Если $u \in H_p$, то $u(x,0) \in B^{4-2/p}_{p,\rho}(G)$ и для любой функции $u_0 \in B^{4-2/p}_{p,\rho}(G)$ существует функция $\Phi \in H_p$ такая, что $\Phi(x,0) = u_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из теоремы 1.8.3 в [5].

Обозначим через P_0 оператор продолжения нулем функций, заданных при $t > 0$, на промежуток $t < 0$. Пусть $S' = \Gamma \times (-\infty, T)$. Приведем условия на функции из (0.2), при выполнении которых мы будем рассматривать нашу задачу:

$$\begin{gathered} u_0 \in B_{p,\rho}^{4-\frac{2}{p}}(G), \quad P_0(\varphi - \Phi) \in B_{p,p}^{3-\frac{1}{p},1}(S'), \\ \frac{\partial}{\partial t} P_0(\varphi - \Phi) \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p},0}(S'), \; P_0\big(\psi - \tfrac{\partial \Phi}{\partial n}\big) \in B_{p,p}^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(S'), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где Φ — функция, построенная по функции u_0 в лемме 1.1. Условия (1.1) — условия гладкости искомых функции и одновременно их условия согласования при $t = 0$.

Лемма 1.2. *При выполнении условий* (1.1) *существует функция* $\Psi \in H_p$ *такая, что* $\Psi|_S = \varphi$, $\frac{\partial \Psi}{\partial n}\big|_S = \psi$, $\Psi(x, 0) = u_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на стандартной схеме связанной с построением покрытия границы и разбиения единицы, с последующим распрямлением границы [6], использованием теоремы 1.8.3 в [5] и интерполяционных свойств пространств Соболева-Бесова [5, 8].

Лемма 1.2 позволяет свести задачу (0.1), (0.2) к однородной и тем самым мы всегда можем считать что данные в условиях (0.2) нулевые.

Лемма 1.3. *Справедливы вложения* $L_{p,\rho}(G) \subset W_p^{-1}(G)$, $L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+) \subset W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)$ $(p \in (1, \infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно на гладких функциях f получить неравенства

$$\|f\|_{W_p^{-1}(G)} \leq c\|f\|_{L_{p,\rho}(G)}, \quad \|f\|_{W_p^{-1}(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\|f\|_{L_{p,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{1.2}$$

второе из которых следует непосредственно из неравенства Харди [5] и определения нормы в $W_p^{-1}(G)$, а первое из соответствующих аналогов неравенства Харди (см. пункт 3.2.6 в [5] и § 1.4, гл. 3 в [9]).

Сформулируем основные предположения на операторы L_0, L_1.

a) Всюду в работе считаем, что коэффициенты оператора L_0 и старшие коэффициенты L_1 (a_α при $|\alpha| = 4$) вещественны.

b) Для некоторой постоянной $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(L_0 u, u) \geq \delta \|u\|^2_{W_2^1(G)} \quad \forall u \in \overset{\circ}{\mathrm{W}}{}^1_2(G), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

c) $a_{i,j} \in C^{2,0}(\overline{Q})$, $b_i \in C^{1,0}(\overline{Q})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $c \in C(\overline{Q})$, $a_\alpha \in C^{\max(|\alpha|-2,0),0}(\overline{Q})$ $(|\alpha| \leq 4)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \delta_0|\xi|^2, \quad \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha \xi^\alpha \geq \delta_0|\xi|^4 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^n, (x, t) \in Q), \; \delta_0 > 0. \tag{1.4}$$

Легко увидеть [10–11], что справедлива

Лемма 1.4. *При выполнении* a)–c) L_0 — *изоморфизм пространств* $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_p(G)$ *и* $L_{p,\rho}(G)$ $(1 < p < \infty)$.

§ 2. Вспомогательные задачи

Результаты, приведенные в этом параграфе представляют и самостоятельный интерес. Рассмотрим задачи

$$Mu = L_0u_t + L_1u = f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0,\ u|_{x_n} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+,\ t > 0, \quad (2.1)$$

$$Mu = L_0u_t + L_1u = f(x,t), \quad u|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$Mu = pL_0u + L_1u = f(x), \quad u|_{x_n} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x_n=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \mathrm{Re}\, p \geq 0, \quad (2.3)$$

$$Mu = pL_0u + L_1u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \mathrm{Re}\, p \geq 0. \quad (2.4)$$

Здесь L_0, L_1 — эллиптические операторы с постоянными вещественными коэффициентами вида

$$L_0(D_x)u = -\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^n b_iu_{x_i} + cu\ (c > 0), \quad L_1(D_x)u = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha D^\alpha u + u$$

и p — комплексный параметр. Предположим, что для некоторой положительной постоянной δ_0 выполнены неравенства (1.4). Рассмотрим многочлены

$$M(i\xi,\tau) = L_0(i\xi)\tau + L_1(i\xi), \quad M'(i\xi,\tau,\zeta) = L_0'(i\xi,\zeta)\tau + L_1'(i\xi,\zeta), \quad \tau = i\eta + \gamma\ (\gamma \geq 0)$$

$$L_0'(i\xi,\zeta) = \sum_{k,j=1}^n a_{k,j}\xi_k\xi_j + i\sum_{k=1}^n b_k\xi_k\zeta + c\zeta^2; \quad L_1'(i\xi,\zeta) = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha\xi^\alpha + \zeta^4;$$

где i — мнимая единица. Имеем $L_0'(i\xi,1) = L_0(i\xi)$, $L_1'(i\xi,1) = L_1(i\xi)$.

Лемма 2.1. *Уравнение*

$$M(i\xi', i\lambda, \tau) = 0, \quad (2.5)$$

относительно параметра λ не имеет вещественных корней при всех $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathrm{Re}\,\tau \geq 0$. Корни располагаются поровну между верхней и нижней полуплоскостью и при соответствующей нумерации удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \delta_1\langle s'\rangle \leq \pm\,\mathrm{Im}\,\lambda_1^\pm \leq |\lambda_1^\pm| \leq \delta_2\langle s'\rangle\ (\langle s'\rangle = (1+|\xi'|^2)^{1/2}), \\ \delta_1\langle s\rangle \leq \pm\,\mathrm{Im}\,\lambda_2^\pm \leq |\lambda_2^\pm| \leq \delta_2\langle s\rangle\ \ (\langle s\rangle = (1+|\tau|^2+|\xi'|^4)^{1/4}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\delta_i > 0$ — постоянные, не зависящие от параметров ξ', τ. При $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Re}\,\tau \geq 0$ справедливо неравенство

$$|M(i\xi,\tau)| \geq \delta_3(\langle s'\rangle^2 + \xi_n^2)(\langle s\rangle^4 + \xi_n^4)^{1/2}, \quad \delta_3 > 0,$$

где постоянная δ_3 не зависит от ξ', τ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко устанавливается, что многочлен $M'(i\xi', i\lambda, \tau, \zeta)$ удовлетворяет условиям леммы 10.1 § 10 гл.4 в [3]. Тогда его корни удовлетворяют соответствующим неравенствам, которые при $\zeta = 1$ совпадают с (2.6).

Симметрические функции корней уравнения (2.5) $\alpha^{\pm} = \lambda_1^{\pm} + \lambda_2^{\pm}$ и $\beta^{\pm} = \lambda_1^{\pm}\lambda_2^{\pm}$) являются бесконечно дифференцируемыми функциями параметров ξ', τ. Более того, справедлива

Лемма 2.2. *Найдется постоянная $c = c(\beta)$ такая, что*

$$\begin{array}{c} |D^{\beta}_{\xi'}\alpha^{\pm}| \leq c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}, \quad |\frac{\partial}{\partial\tau}D^{\beta}_{\xi'}\alpha^{\pm}| \leq c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle^{-2}, \\ |D^{\beta}_{\xi'}\beta^{\pm}| \leq c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle, \quad |\frac{\partial}{\partial\tau}D^{\beta}_{\xi'}\beta^{\pm}| \leq c\langle s'\rangle^{1-|\beta|}\langle s\rangle^{-1} \end{array} \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство не является сложным и использует математическую индукцию и определение функций $\alpha^{\pm}$, $\beta^{\pm}$. Мы его опустим.

Теорема 2.1. *Пусть $q \in (1, \infty)$. При всех $f \in L_q(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ задача (2.2) имеет единственное решение u такое, что $u \in L_q(0, \infty; W^4_q(\mathbb{R}^n))$, $u_t \in L_q(0, \infty; W^2_q(\mathbb{R}^n))$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_q(0,\infty;W^4_q(\mathbb{R}^n))} + \|u_t\|_{L_q(0,\infty;W^2_q(\mathbb{R}^n_+))} \leq c\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1}_+)}. \tag{2.9}$$

При всех p с $\operatorname{Re} p \geq 0$ и $f \in L_q(\mathbb{R}^n)$ задача (2.4) имеет единственное решение из $W^4_q(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка

$$(1 + |p|)\|u\|_{W^2_q(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^4_q(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.10}$$

где постоянная c не зависит от p с $\operatorname{Re} p \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения вытекает из теоремы 3.3 (§ 3, гл.2) в [3]. Решение задачи (2.4) имеет вид

$$u(x) = F^{-1}_{\xi}\frac{1}{M(i\xi, p)}F_x(f)(\xi), \tag{2.11}$$

где символы F_x, F^{-1}_{ξ} обозначают преобразование Фурье, действующее по переменным x и обратное преобразование Фурье, действующее по переменным $\xi \in \mathbb{R}^n$. Функции $(i\xi)^{\alpha}/M(i\xi, p)$ являются мультипликаторами Фурье при всех $|\alpha| \leq 4$ (см. лемму 3.3 § 3 гл.2 в [3]), откуда легко вытекает утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть $q \in (1, \infty)$. Если $f \in L_{q,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, то задача (2.1) имеет единственное решение u такое, что $u \in L_q(0, \infty; H^4_q(\mathbb{R}^n_+))$, $u_t \in L_q(0, \infty; H^2_q(\mathbb{R}^n_+))$ и справедлива оценка*

$$\|u\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(\mathbb{R}^n_+))} + \|u_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(\mathbb{R}^n_+))} \leq c\|f\|_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})}. \tag{2.12}$$

При всех p с $\operatorname{Re} p \geq 0$ и $f \in L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)$ задача (2.3) имеет единственное решение из $H^4_q(\mathbb{R}^n_+)$ и справедлива оценка

$$(1 + |p|)\|u\|_{H^2_q(\mathbb{R}^n_+)} + \|u\|_{H^4_q(\mathbb{R}^n_+)} \leq c\|f\|_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводим в соответствии со схемой, изложенной в [3]. Фактически, существование решений обосновано в [3]. Нам необходимо только записать соответствующие представления и получить нужные оценки, описав отличия, связанные с рассмотрением весовых пространств. Пусть вначале функция f бесконечно дифференцируема по совокупности переменных и имеет компактный носитель.

Положим $f_0 = \begin{cases} f(x', x_n, t), & x_n \geq 0 \\ -f(x', -x_n, t), & x_n < 0 \end{cases}$. Считаем, что при $t < 0$ функция f_0 равна нулю. Обозначим через u_0 решение задачи (2.2) с правой частью f_0, продолженное нулем при $t < 0$. Применив преобразование Фурье по переменным x' и преобразование Лапласа по переменной t к (2.1), мы придем к представлению (см. [3])

$$v_0 = F^{-1}_{\xi',\eta}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x_n} J_+(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n\Big), \quad (2.14)$$

где $\tau = i\eta + \gamma$, $\gamma \geq 0$, $v_0 = e^{-\gamma t} u_0$, $g = F_{x',t}(e^{-\gamma t} f_0(x', x_n, t))$, а функции $J_\pm$ имеют вид

$$J_\pm(\xi', x_n, \tau) = \frac{\pm 1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^\pm} \frac{e^{i x_n \lambda}}{M(i\xi', i\lambda, \tau)}\, d\lambda,$$

где $\Gamma^\pm$ — замкнутые гладкие кривые, лежащие в верхней и нижней полуплоскости, соответственно, и охватывающие все корни уравнения $M(i\xi', i\lambda, \tau) = 0$ из верхней (нижней) полуплоскости. Справедливы равенства (см. [3, § 4, § 10, гл. 4])

$$F_{x_n}(\theta(x_n) J_+^{(k)}(x_n) + \theta(-x_n) J_-^{(k)}(x_n)) =$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\Big(\frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)} - \frac{\delta_{4k}}{a_4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 4, \quad (2.15)$$

$$J_+^{(k)} - J_-^{(k)}|_{x_n = 0} = \frac{\delta_{3k}}{a_4}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

где θ — функция Хевисайда, δ_{ik} — символ Кронекера, a_4 коэффициент перед λ^4 в многочлене $M(i\xi', i\lambda, \tau)$ и $J_\pm^{(k)}$ — k-я производная по переменной x_n. Из этих равенств легко получим, что

$$F_{x_n}(x_n \theta(x_n) J_+^{(k)}(x_n) + x_n \theta(-x_n) J_-^{(k)}(x_n)) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2.17)$$

Из (2.14)–(2.17) получим

$$x_n \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\beta_{x'} v_0 = F^{-1}_{\xi'} F^{-1}_\eta (i\xi')^\beta (i\eta)^l \Big(\int\limits_{-\infty}^{x_n} (x_n - y_n) J_+^{(k)}(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n +$$
$$+ \int\limits_{x_n}^{\infty} (x_n - y_n) J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{x_n} J_+^{(k)}(\xi', x_n - y_n, \tau) y_n g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n + \int\limits_{x_n}^{\infty} J_-(\xi', x_n - y_n, \tau) y_n g(\xi', y_n, \eta)\, dy_n\Big), \quad (2.18)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$, $l = 0, 1$. Используя (2.14)–(2.18), выводим, что

$$x_n \frac{\partial^k}{\partial x_n^k} \frac{\partial^l}{\partial t^l} D^\beta_{x'} v_0 = F^{-1}_{\xi,\eta} (i\xi')^\beta (i\eta)^l \frac{\partial}{\partial \xi_n}\Big[\frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)}\Big] F_{x,t}(e^{-\gamma t} f_0)(\xi, \eta) +$$
$$+ F^{-1}_{\xi,\eta} \frac{(i\xi')^\beta (i\eta)^l (i\xi_n)^k}{M(i\xi', i\xi_n, \tau)} F_{x,t}(e^{-\gamma t} x_n f_0(x, t))(\xi, \eta). \quad (2.19)$$

Как вытекает из результатов [3] (см. лемму 3.3 гл.2) функции

$$\frac{(i\xi')^{\beta}(i\eta)^{l}(i\xi_n)^k}{M(i\xi',i\xi_n,\tau)}, \quad |\beta|+k+2l\le 4,$$

являются мультипликаторами Фурье. Аналогично устанавливаем, что и функции

$$(i\xi')^{\beta}(i\eta)^{l}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\Big[\frac{(i\xi_n)^k}{M(i\xi',i\xi_n,\tau)}\Big], \quad |\beta|+k+2l\le 4,$$

являются мультипликаторами. Тогда из (2.19) вытекает оценка

$$\Big\|x_n\,\frac{\partial^k}{\partial x_n^k}\,\frac{\partial^l}{\partial t^l}\,D_{x'}^{\beta}\,v_0\Big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\le$$
$$\le c(\big\|F^{-1}_{\xi,\eta}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{-1}{2}}F_{x,t}(e^{-\gamma t}f_0)\big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}+\|e^{-\gamma t}x_nf_0\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}),$$

которую можно также переписать в виде (см. [5])

$$\Big\|x_n\frac{\partial^k}{\partial x_n^k}\frac{\partial^l}{\partial t^l}D_{x'}^{\beta}v_0\Big\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}\le$$
$$\le c(\big\|e^{-\gamma t}f_0\big\|_{L_q(0,\infty;W_q^{-1}(\mathbb{R}^n))}+\|e^{-\gamma t}x_nf_0\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}), \quad \gamma\ge 0, \tag{2.20}$$

где $l=0,1$, $k=0,1,2,3,4$, $|\beta|+k+2l\le 4$. Запишем представление для решений задачи (2.1) из [3], упростив его в данной конкретной ситуации. Имеем

$$F_{x',t}u_1=\omega_1+\omega_2+F_{x',t}v_0, \quad \omega_1=J_1(i\xi',x_n,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_1(i\xi',y_n,\tau)g(\xi',y_n,\tau)\,dy_n,$$
$$\omega_2=J_2(i\xi',x_n,\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_2(i\xi',y_n,\tau)g(\xi',y_n,\tau)\,dy_n, \quad u_1=e^{-\gamma t}u(x,t), \tag{2.21}$$

где

$$J_1=\frac{\lambda_1^+e^{ix_n\lambda_2^+}-\lambda_2^+e^{ix_n\lambda_1^+}}{\lambda_1^+-\lambda_2^+}, \quad J_2=\frac{e^{ix_n\lambda_1^+}-e^{ix_n\lambda_2^+}}{i(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},$$
$$I_1=-(J_+(-y_n)\theta(-y_n)+\theta(y_n)J_-(-y_n)), \quad I_2=-(J'_+(-y_n)\theta(-y_n)+\theta(y_n)J'_-(-y_n)).$$

Далее используем рассуждения из [3] (см., например, § 6 гл.4). Имеем

$$x_n\omega_j^{(k)}=-\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial z_n}(x_n+z_n)J_j^{(k)}(x_n+z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n=$$
$$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n+z_n)\frac{\partial}{\partial z_n}\big((x_n+z_n)J_j^{(k+1)}(x_n+z_n)\big)\theta(z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I_j(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(x_n+z_n)(x_n+z_n)J_j^{(k)}(x_n+z_n)\theta(z_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}I'_j(y_n+z_n)g(y_n)\,dy_ndz_n.$$

В полученном представлении правая часть уже определена при всех $x_n \in \mathbb{R}$. Заменяя здесь переменную z_n на $-z_n$, и используя формулу преобразования Фурье свертки, придем к равенствам

$$F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_j^{(k)}) =$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}} F^{-1}_{\xi,\eta}\Big[\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_j^{(k)}(x_n)\theta(x_n))(\xi,\eta) F_{x,t} F^{-1}_{\xi',\eta}(\theta(-x_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n) -$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_i^{(k)}(x_n)\theta(x_n))(\xi,\eta) F_{x,t} F^{-1}_{\xi',\eta}(\theta(-x_n)\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_j'(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\Big]. \quad (2.22)$$

Величины $F_{x_n}(J_j^{(k)}(x_n)\theta(x_n))$ легко находятся в явном виде. Например, при $k = 0$ имеем

$$F_{x_n}(J_1\theta) = \frac{-i(\xi_n - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+))}{(2\pi)^{1/2}(\xi_n - \lambda_1^+)(\xi_n - \lambda_2^+)}, \quad F_{x_n}(J_2\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(\xi_n - \lambda_1^+)(\xi_n - \lambda_2^+)}. \quad (2.23)$$

Аналогичный вид имеют и преобразования Фурье оставшихся функций $F_{x_n}(J_j^{(k)})$. Используя лемму 2.2, теорему Лизоркина о мультипликаторах и индукцию, нетрудно установить, что функции

$$\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_1^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s'\rangle^{-1}\langle s\rangle^{-2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_1^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s\rangle^{-2},$$
$$\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_2^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s\rangle^{-2}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_n} F_{x_n}(J_j^{(k)}\theta)(i\xi')^\beta (i\eta)^l \langle s\rangle^{-1}$$

являются мультипликаторами Фурье (типа (q,q)) на $\mathbb{R}^{n+1}$ при $|\beta| + 2l + k \le 4$, $l = 0, 1$. Тогда из представления (2.22) вытекают оценки

$$\|D^\beta_{x'} D^l_t F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_1^{(k)})\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} \le c\|F^{-1}_{\xi,\eta}\langle s'\rangle\langle s\rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_1(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} +$$
$$+ c\|F^{-1}_{\xi,\eta}\langle s\rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_1'(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (2.24)$$

$$\|D^\beta_{x'} D^l_t F^{-1}_{\xi,\eta} F_{x_n}(x_n \omega_2^{(k)})\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} \le c\|F^{-1}_{\xi,\eta}\langle s\rangle^2 F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_2(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})} +$$
$$+ c\|F^{-1}_{\xi,\eta}\langle s\rangle F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_2'(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n)\|_{L_q(\mathbb{R}^{n+1})}. \quad (2.25)$$

Используя (2.14) – (2.17) легко получить, что

$$F_{x_n}(\int\limits_{-\infty}^{\infty} I_1^{(l)}(y_n - x_n) g(y_n)\, dy_n) = -\frac{(i\xi_n)^l}{M(i\xi,\tau)} F_{x_n}(g)(\xi,\eta), \quad l = 0, 1, 2. \quad (2.26)$$

Кроме того [3], можно убедиться, что функции

$$\frac{\langle s'\rangle\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac12}}{M(i\xi,\tau)},\ \frac{\xi_n\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac12}}{M(i\xi,\tau)},$$
$$\frac{\xi_n\langle s\rangle^2(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac12}}{M(i\xi,\tau)},\ \frac{\xi_n^2\langle s\rangle(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac12}}{M(i\xi,\tau)}$$

также являются мультипликаторами. Тогда из (2.24), (2.25) вытекают оценки

$$\|D^\beta_{x'}D^l_tF^{-1}_{\xi,\eta}F_{x_n}(x_n\omega_j^{(k)})\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}\le c\|F^{-1}_{\xi,\eta}(\langle s'\rangle^2+\xi_n^2)^{\frac{-1}{2}}F_{x,t}(e^{-\gamma t}f_0)\|_{L_p(\mathbb{R}^{n+1})}=$$
$$=c\|e^{-\gamma t}f_0\|_{L_p(0,\infty;W_p^{-1}(\mathbb{R}^n))},\quad |\beta|+k+2l\le 4,\ j=1,2 \tag{2.27}$$

Из (2.27), (2.20), определения f_0 и леммы 1.3 вытекает первая часть утверждения теоремы. Разрешимость задачи (2.3) и оценки устанавливаются по аналогии. Рассуждения в этом случае только упрощаются.

Рассмотрим задачу

$$Mu=pL_0u+L_1u=f(x)\ (x\in G,\ \mathrm{Re}\,p\ge 0), u|_\Gamma=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \tag{2.28}$$

где L_0,L_1 — эллиптические операторы с коэффициентами не зависящими от переменной t.

Теорема 2.3. *Пусть $q\in(1,\infty)$ и операторы L_0,L_1 удовлетворяют условиям* a)-c). *Тогда найдется $\gamma_0>0$ такое что при всех p с $\mathrm{Re}\,p\ge\gamma_0$ и $f\in L_{q,\rho}(G)$ задача (2.28) имеет единственное решение из $H^4_q(G)$ и справедлива оценка*

$$(1+|p|)\|u\|_{H^2_q(G)}+\|u\|_{H^4_q(G)}\le c\|f\|_{L_{q,\rho}(G)}, \tag{2.29}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим априорную оценку. Умножим уравнение (2.28) на $\overline{p}u$ и проинтегрируем уравнение по области G. Тогда получим

$$|p|^2(L_0u,u)+\overline{p}(L_1u,u)=\overline{p}(f,u). \tag{2.30}$$

В силу неравенства $\mathrm{Re}(L_0u,u)\ge\delta\|u\|^2_{W_2^1(G)}$ имеем

$$|p|^2\delta\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\mathrm{Re}\,\overline{p}\,\mathrm{Re}(L_1u,u)+\mathrm{Im}\,p\,\mathrm{Im}(L_1u,u)\le\mathrm{Re}\,\overline{p}(f,u),\quad p=\gamma+i\eta.$$

Из неравенства Гординга и неравенства Коши с ε вытекает, что

$$|p|^2\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\gamma\|u\|^2_{W_2^2(G)}\le c(\gamma\|u\|^2_{L_2(G)}+\varepsilon\eta^2\|u\|^2_{W_2^1(G)}+c(\varepsilon)\|u\|^2_{W_2^2(G)}+|p||(f,u)|).$$

Выберем $\varepsilon=1/(4c)$ и затем $\gamma_0\ge\max(4c,4cc(\varepsilon))$. Тогда из последнего неравенства, используя лемму 1.3, получим, что при $\gamma\ge\gamma_0>0$ выполнено

$$(1+|p|^2)\|u\|^2_{W_2^1(G)}+\gamma\|u\|^2_{W_2^2(G)}\le c_1\|\rho f\|^2_{L_2(G)}. \tag{2.31}$$

Возвращаясь к равенству (2.30) и используя (2.31) окончательно получим оценку

$$(1+|p|^2)\|u\|^2_{W_2^1(G)} + (1+|p|)\|u\|^2_{W_2^2(G)} \le c_2\|\rho f\|^2_{L_2(G)} \tag{2.32}$$

справедливую при $\operatorname{Re} p \ge \gamma_0$, что мы далее считаем выполненным. Без ограничения общности можем считать в (2.28), что $f \in C_0^\infty(G)$ в силу плотности этого класса в $L_{q,\rho}(G)$. Оценка (2.32) гарантирует (см. [10–11]), что при $\gamma \ge \gamma_0 > 0$ задача (2.28) имеет решение принадлежащее каждому из пространств $W_q^4(G)$ $(q \in (1,\infty))$. Фиксируем $\delta > 0$ и построим покрытие границы Γ областями U_j $(j \le m)$ такими, что $\rho(\partial \cup U_j, \Gamma) \ge 3\delta/4$ и $\operatorname{diam} U_j \le \delta$. Достроим это покрытие до покрытия $\{U_j\}_{j=1}^N$ $(\operatorname{diam} U_j \le \delta)$ всей области G, причем такого, что $\rho(U_j, \Gamma) \ge \delta/2$ $(j > m)$. Очевидным образом это возможно. Также без ограничения общности считаем, что кратность покрытия $k(n)$ не зависит от параметра δ. Построим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_j\}$, подчиненное покрытию $\{U_j\}$ и систему гладких функций $\{\psi_j\}$ таких, что $\operatorname{supp}\psi_j \subset U_j$, $\psi_j(x) \equiv 1$ на $\operatorname{supp}\varphi_j$. Фиксируем $j \le m$ и сделаем в уравнении (2.28) преобразование координат $x = x(z)$ $(z = z(x))$ класса C^4 выпрямляющее границу (см., например, [6,7]). Положим $K_j = z(U_j \cap G) \subset \{z_n > 0\}$. Получим уравнение $pL_0(z,D_z)u + L_1(z,D_z)u = f$. Умножая это уравнение на φ_j и выбирая произвольную точку $z_0 \in K_j$, придем к уравнению

$$p(L_0'(z_0,D_z)+1)(\varphi_j u) + (L_1'(z_0,D_z)+1)(\varphi_j u) = f\varphi_j + pL_{00}(z,D_z)u + L_{01}(z,D_z)u +$$

$$+\, p((L_0'(z_0,D_z) - L_0'(z,D_z))(\varphi_j u) + (L_1'(z_0,D_z) - L_1'(z,D_z))(\varphi_j u),$$

где L_{00}, L_{01} — дифференциальные операторы, содержащие соответственно 1-е и 3-е производные от функции u, операторы L_0', L_1' — главные части операторов L_0, L_1. Продолжая функцию $\varphi_j u(z)$ нулем на все $\mathbb{R}^n_+$ и используя теорему 2.2, получим оценку

$$\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(\mathbb{R}^+)}|p|^q + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(\mathbb{R}^n_+)} \le c_1(\delta)(|p|^q\|\psi_j u\|^q_{H_q^1(\mathbb{R}^n_+)} + \|\psi_j u\|^q_{H_q^3(\mathbb{R}^n_+)}) +$$

$$+\, \varepsilon(\delta)(|p|^q\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(\mathbb{R}^n_+)} + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(\mathbb{R}^n_+)}) + c\|f\varphi_j\|^q_{L_{q,x_n}(\mathbb{R}^n_+)}, \tag{2.33}$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$, $c_i(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ (величина $\varepsilon(\delta)$ зависит от модулей непрерывности коэффициентов). При достаточно малом δ $\varepsilon(\delta) \le 1/4$. Выбирая и фиксируя такое δ и затем переходя к исходной системе координат, получим

$$\|\varphi_j u\|^q_{H_q^2(G)}|p|^q + \|\varphi_j u\|^q_{H_q^4(G)} \le c\|f\varphi_j\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_2(|p|^q\|\psi_j u\|^q_{H_q^1(G)} + \|\psi_j u\|^q_{H_q^3(G)}). \tag{2.34}$$

В случае $j > m$ дополнительной замены переменной мы не делаем и, используя уже теорему 2.1, получаем неравенство вида (2.34). Просуммировав неравенства вида (2.34) по j, придем к неравенству

$$\|u\|^q_{H_q^2(G)}|p|^q + \|u\|^q_{H_q^4(G)} \le c\|f\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_3(|p|^q\|u\|^q_{H_q^1(G)} + \|u\|^q_{H_q^3(G)}). \tag{2.35}$$

При каждом $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon)$ такое, что

$$\|u\|^q_{H^i_q(G)} \le \varepsilon \|u\|^q_{H^{i+1}_q(G)} + c(\varepsilon)\|u\|^q_{L_q(G)} \quad (i = 1, 3).$$

Используя это неравенство с достаточно малым ε и (2.35), придем к оценке

$$\|u\|^q_{H^2_q(G)}|p|^q + \|u\|^q_{H^4_q(G)} \le c\|f\|^q_{L_{q,\rho}(G)} + c_4|p|^q\|u\|^q_{L_q(G)}. \tag{2.36}$$

Из уравнения (2.28) получим

$$(pu, L^*_0 v) + (L_1 u, v) = (f, v), \quad v \in W^2_r(G) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_r(G), \quad r = q/(q-1). \tag{2.37}$$

Разделив (2.37) на норму $\|L^*_0 v\|_{L_r(G)}$ (отметим, что задача $L^*_0 v = f$, $v|_\Gamma = 0$ имеет единственное решение из $W^2_r(G)$ при $f \in L_r(G)$), используя неравенство

$$|(D^\alpha u, D^\beta v)| \le c\|u\|_{W^{3-\delta}_q(G)}\|v\|_{W^{1+\delta}_r(G)}, \ \ \delta < 1/r, \ |\alpha| = 3, \ |\beta| = 1, \tag{2.38}$$

и лемму 1.3, придем к неравенству

$$\|pu\|_{L_q(G)} \le c\|f\|_{L_{q,\rho}(G)} + c_1\|u\|_{W^{3-\delta}_q(G)}. \tag{2.39}$$

Тогда из очевидной оценки

$$\|u\|_{W^{3-\delta}_q} \le \varepsilon\|u\|_{H^4_q(G)} + c(\varepsilon)\|u\|_{L_q(G)},$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, (2.39), (2.36) получим оценку (2.29), если необходимо увеличивая при этом величину γ_0. Из (2.29) вытекает существование решений. Единственность вытекает из оценки (2.32) и из того факта, что решение из класса полученного в теореме с нулевой правой частью на самом деле принадлежит классу $W^4_p(G)$ при всех $p < \infty$ [10–11]. Рассмотрим задачу

$$Mu = L_0(x, D_x)u_t + L_1(x, D_x)u = f(x, t), \quad u|_{S_\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_\infty} = 0, \quad u|_{t=0} = 0,$$

где L_0, L_1 — эллиптические операторы, удовлетворяющие условиям теоремы 2.3, $S_\infty = \Gamma \times (0, \infty)$, $(x, t) \in Q_\infty = G \times (0, \infty)$. Сделав замену $u = e^{\gamma t}v$, мы придем к задаче

$$L_0 v_t + L_1(x, D_x)v + \gamma L_0 v = g(x, t) = e^{-\gamma t}f(x, t), \quad v|_{S_\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{S_\infty} = 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{2.40}$$

Теорема 2.4. *Пусть $q \in (1, \infty)$. Найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma \ge \gamma_0$ и всех $g \in L_{q,\rho}(Q_\infty)$ задача (2.40) имеет единственное решение v такое, что $v \in L_q(0, \infty; H^4_q(G))$, $v_t \in L_q(0, \infty; H^2_q(G))$ и справедливы оценки*

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(G))} + \|v_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.41}$$

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} \le c\frac{1}{\gamma}\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.42}$$

где постоянная c не зависит от γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве постоянной γ_0 постоянную полученную в теореме 2.3. Используя лемму 1.4, сведем задачу (2.40) к задаче

$$v_t + Av = g_0, \quad A = L_0^{-1}(L_1 + \gamma L_0), \quad g_0 = L_0^{-1}(g), \tag{2.43}$$

где оператор A рассматривается как оператор из $L_q(0,\infty; \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$ в $L_q(0,\infty; \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$ с областью определения $L_q(0,\infty; \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G))$. В силу теоремы 2.3 A — генератор аналитической полугруппы. Положим $B^s_q = (\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G), \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))_{1-\theta,q}$ ($\theta = (s-2)/2$, $s \in (2,4)$). Как вытекает из известных результатов (см., например, [12]) при всех $g_0 \in L_q(0,\infty; B^s_q)$ задача (2.43) имеет единственное решение из класса $Av \in L_q(0,\infty; B^s_q)$, $v_t \in L_q(0,\infty; B^s_q)$ причем справедлива оценка

$$\|v_t\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} + \|Av\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} \le c\|g_0\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)}, \tag{2.44}$$

где постоянная c зависит от нормы резольвенты $(A+\lambda)^{-1}$ ($\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$) и соответственно она не будет зависеть от $\gamma \ge \gamma_0$. Отметим, что класс $L_q(0,\infty; B^s_q)$ плотно вложен в $L_q(0,\infty; \overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))$. В силу этого считаем, что $g_0 \in L_q(0,\infty; B^s_q)$. Получим априорные оценки, позволяющие доказать разрешимость задачи. Имеем вложения $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^4_q(G) \subset W^3_q(G)$, $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G) \subset W^1_q(G)$ и таким образом $B^s_q \subset (W^3_q(G), W^1_q(G))_{1-\theta,q} = W^{s-1}_q(G)$ ($s \ne 3, \theta = (s-2)/2$, $s \in (2,4)$). Применяя оператор A^{-1} к (2.43), получим, что функция $v_0 = A^{-1}v$ удовлетворяет уравнению (2.43) с правой частью $A^{-1}g_0$ и таким образом удовлетворяет оценке (2.44), где вместо g_0 стоит $A^{-1}g_0$. В частности, при $s > 4 - \delta$ имеем оценку

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))} \le c_1\|A^{-1}g_0\|_{L_q(0,\infty;B^s_q)} \le c_2\|g_0\|_{L_q(0,\infty;\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^2_q(G))} \le c_3\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)}, \tag{2.45}$$

где постоянные c_i не зависят от γ, $\delta \in (0,1)$. Повторяя рассуждения, использованные при получении оценки (2.39), получим оценку

$$\|v_t + \gamma v\|_{L_q(Q_\infty)} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} + c\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))}, \quad \delta < 1/r,\ r = q/(q-1), \tag{2.46}$$

где постоянная c не зависит от γ. Из (2.45), (2.46) вытекает оценка

$$\|v\|_{L_q(0,\infty;W^{3-\delta}_q(G))} + \|v_t\|_{L_q(Q_\infty)} + \gamma\|v\|_{L_q(Q_\infty)} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} \tag{2.47}$$

с постоянной c, не зависящей от $\gamma \ge \gamma_0$. Далее, повторяем рассуждения, использованные при получении оценки (2.36) теперь уже в области Q. Строим тоже самое покрытие G и разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}$ и используем первую половину теорем 2.1 и 2.2. Аналог неравенства (2.36) запишется в виде

$$\|v_t\|_{L_q(0,\infty;H^2_q(G))} + \|v\|_{L_q(0,\infty;H^4_q(G))} \le c\|g\|_{L_{q,\rho}(Q_\infty)} + \|v_t\|_{L_q(Q_\infty)} + \gamma\|v\|_{L_q(Q_\infty)}. \tag{2.48}$$

Неравенства (2.47), (2.48) дают оценку (2.41). Оценка (2.42) вытекает непосредственно из уравнения и (2.41). Единственность решения вытекает из того факта, что решение удовлетворяет уравнению (2.43) [12].

§ 3. Основные результаты

Основной результат этого параграфа — теорема о разрешимости задачи (0.1), (0.2).

Теорема 2.4. *Пусть* $q \in (1, \infty)$, *данные задачи удовлетворяют условиям* (1.1) *и операторы условиям* a)–c). *Тогда при* $f \in L_{q,\rho}(Q)$ *задача* (0.1), (0.2) *имеет единственное решение* $u \in H_q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 1.2, сведем задачу к однородной. Построим продолжение коэффициентов операторов $L_0(x,t,D_x), L_1(x,t,D_x)$ и правой части на область $(x,t) \in G \times [T, \infty)$ с сохранением класса и условий a)–c). Может считать, что при $t \geq T+1$ коэффициенты — постоянные, а правая часть в уравнении равна 0. Построим покрытие $[0,T]$ интервалами $U_k = ((k-1)\delta - \delta/4, k\delta + \delta/4)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, $N\delta = T$ и соответствующее разбиение единицы $\{\varphi_j(t)\}$. Построим также функции $\psi_j(t) \in C_0^\infty(U_j)$ такие, что $\psi_j(t) \equiv 1$ на $\operatorname{supp} \varphi_j$. Сделаем в (0.1) замену $u = e^{\gamma t} v$. Получим уравнение

$$M_\gamma(x,t,D_x)v = M(x,t,D_x)v + \gamma L_0(x,t,D_x)v = e^{-\gamma t} f. \tag{3.1}$$

Обозначим через $R_i(g)$ решение задачи

$$M_\gamma(x,t_i,D_x)v = g\varphi_i,\ v|_{t=t_i} = 0,\ v|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \quad t_i = (i-1)\delta - \delta/4,\ t_1 = 0.$$

В силу теоремы 2.4 решение этой задачи существует и функция $v(t+t_i)$ удовлетворяет (2.41) и (2.42). Ищем решение уравнения (3.1) в виде $u = \sum_{i=1}^N \psi_i R_i(g)$. Тогда

$$M_\gamma u = \sum_{i=1}^N \psi_i M_\gamma(t_i) R_i(g) + \sum_{i=1}^N \psi_i (M_\gamma(t) - M_\gamma(t_i)) R_i(g) + \sum_{i=1}^N \psi_{it} L_0 R_i(g) =$$

$$= g + R_{01}(g) + R_{02}(g) = e^{-\gamma t} f, \quad f, g \in L_{q,\rho}(Q). \tag{3.2}$$

В силу теоремы 2.4 имеем оценки

$$\|R_{01} g\|_{L_{q,\rho}(Q)} \leq \varepsilon(\delta) \|g\|_{L_{q,\rho}(Q)}, \quad \|R_{02} g\|_{L_{q,\rho}(Q)} \leq \frac{c(\delta)}{\gamma} \|g\|_{L_{q,\rho}(Q)},$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ и $c(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Выбрав параметр δ а затем и параметр γ, мы можем добиться того, что $\|R_{01} + R_{02}\|_{L_{q,\rho}(Q) \to L_{q,\rho}(Q)} < 1$. Тогда уравнение (3.2) имеет единственное решение и значит исходная задача (0.1), (0.2) разрешима. Покажем единственность. Рассмотрим малый интервал $(0, \delta)$. Перепишем уравнение (0.1) в виде

$$M(x,0,D_x)u + (M(x,t,D_x)u - M(x,0,D_x))u = 0.$$

Используя теорему 2.4, легко показать, что $u \equiv 0$ на $(0,\delta)$, если δ достаточно мало. Далее, повторяя рассуждения, покажем, что $u \equiv 0$.

Замечание. *Следуя схеме рассуждений из [4], можно упростить доказательство теоремы 3.1. Однако, условия на коэффициенты при этом усилятся.*

Литература

[1] *A. I. Kozhanov*, Composite type equations and inverse problems, Utrecht, VSP, 1999.

[2] *Yu. Ya. Belov*, Inverse problems for parabolic equations, J. Inv. Ill-Posed Problems, **1**, No. 4 (1993), 283–301.

[3] *Г. В. Демиденко, С. В. Успенский*, Уравнения и системы, не разрешеные относительно старшей производной, Н., Научная книга, 1998.

[4] *М. С. Агранович, М. И. Вишик*, Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, Усп. матем. наук, **19**, № 3 (1964), 53–161.

[5] *Х. Трибель*, Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы, М., Мир, 1980.

[6] *О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский*, Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., Наука, Физматлит, 1996.

[7] *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Наука, 1973.

[8] *P. Grisvard*, Commutative de deux functeurs d'interpolation et applications, J. Math. Pures et Appliq, **45**, No. 2 (1966), 144–206.

[9] *И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов*, Неклассические операторно-дифференциальные уравнения, Н., Наука, 2000.

[10] *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг*, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных вблизи границы, М., Иностранная литература, 1962.

[11] *S. Agmon*, Lectures on elliptic boundary value problems, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, New York, Toronto, London, 1965.

[12] *P. Grisvard, G. Da Prato*, Sommes d'operatours lineaires et equations differentielles operationnelles, J. Math. Pures et Appl, **54**, No. 2 (1975), 305–387.