



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Вишняков, А. И. Кибзун, Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями, *Автомат. и телемех.*, 2006, выпуск 6, 126–143

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.160.209

14 ноября 2024 г., 14:18:20



Стохастические системы

PACS 02.50.Fz

© 2006 г. Б.В. ВИШНЯКОВ,
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук
(Московский авиационный институт)

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ДЛЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

Рассматриваются задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Для ряда частных случаев строятся детерминированные эквиваленты исходных стохастических задач. Для рассматриваемых задач устанавливаются выпуклые свойства вероятностного и квантильного критериев.

1. Введение

В технике и экономике существует множество задач, относящихся к классу задач стохастического программирования [1]. В последнее время среди этих задач наибольшее распространение получили модели с вероятностным или квантильным критериями [2]. Но несмотря на актуальность этих критериев, они, в отличие от математического ожидания, не обладают свойством линейности, а потому оказываются более сложными для исследования. Наиболее важными с точки зрения последующей оптимизации являются выпуклые свойства вероятностных критериев. Многие известные результаты в этой области собраны в обзорной статье [3].

Одним из наиболее эффективных методов решения вероятностных задач является получение для них детерминированных эквивалентов, не зависящих от случайных величин и позволяющих свести исходную задачу стохастического программирования к эквивалентной ей, но детерминированной. Иначе говоря, детерминированные эквиваленты удобны тем, что для решения детерминированных задач, эквивалентных исходным стохастическим, можно использовать стандартные методы математического программирования [4]. Первые детерминированные эквиваленты для вероятностных постановок были получены в [5, 6]. Но в [5] строятся эквиваленты, которые, по сути, нельзя назвать детерминированными. В полученных в этой работе эквивалентах присутствуют некоторые характеристики распределения (плотность вероятности, функция распределения многомерной случайной величины), зависящие от параметров оптимизации и не имеющие явного аналитического выражения. Это значит, что для решения таких эквивалентов необходимо использовать численные методы стохастического программирования. В [7, 8] исследованы далеко не все свойства полученных эквивалентов и наложены слишком сильные ограничения на параметры распределений и целевых функций. В [9] в ходе решения экономической задачи строится детерминированный эквивалент, который оказывается частным случаем полученного здесь эквивалента. В [1] приводится детерминированный эквивалент для частного случая билинейной целевой функции.

В данной статье осуществлена попытка охватить и обобщить большинство известных случаев, рассмотренных в цитированных работах, когда удается получить детерминированные эквиваленты для задач с вероятностными критериями, имеющие явное аналитическое выражение. На основании полученных детерминированных эквивалентов устанавливаются выпуклые свойства исходных вероятностных критериев.

2. Постановка задачи

Пусть задана целевая функция $\Phi(u, X)$, где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $X \in \mathbb{R}^n$. Здесь вектор u – оптимизируемая стратегия, а X – случайный вектор с известным распределением и реализациями $x \in \mathbb{R}^n$.

Определим функцию вероятности

$$(2.1) \quad P_\varphi(u) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}^1$ – максимально допустимое значение $\Phi(u, X)$. Функция вероятности характеризует вероятность такого события, что значение целевой функции при выбранном u будет не больше заданного порога φ .

Функцией квантили будем называть функцию вида

$$(2.2) \quad \varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\},$$

где α – заданный уровень вероятности, $\alpha \in (0, 1)$. Функция квантили показывает, что значение целевой функции $\Phi(u, X)$ при выбранной стратегии u с вероятностью не меньше α будет не превосходить порог $\varphi_\alpha(u)$.

Рассмотрим три классические задачи стохастического программирования.

1. Максимизация функции вероятности:

$$(2.3) \quad P_\varphi(u) \rightarrow \max_{u \in U}.$$

2. Минимизация функции квантили:

$$(2.4) \quad \varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

3. Задача с вероятностным ограничением:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Phi_0(u) &\rightarrow \min_{u \in U}, \\ P_\varphi(u) &\geq \alpha, \end{aligned}$$

где $\Phi_0(u)$ – некая детерминированная функция.

В данных постановках не уточняется, существует оптимальная стратегия или нет. В последнем случае под решением задачи понимается оптимизирующая последовательность стратегий.

3. Случай билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения

Вначале рассмотрим случай, когда целевая функция имеет билинейную структуру:

$$(3.1) \quad \Phi(u, X) = r[u^T(AX + c)],$$

где A – некоторая матрица $m \times n$, c – фиксированный вектор размерности n , $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция, определенная на всей числовой оси. Пусть распределение случайного вектора X сферически симметрично, т.е. его плотность можно представить в виде

$$(3.2) \quad p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\|x\|^2) = f(x^T x),$$

где функция $f(t)$ определена для $t \in [0, \infty)$, неотрицательна и интегрируема по Лебегу.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть целевая функция имеет вид (3.1), где $\|A^T u\| > 0$, а плотность распределения вектора X имеет вид (3.2). Тогда

1) функция вероятности равна

$$(3.3) \quad P_\varphi(u) = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right),$$

где $F_1(\cdot)$ – функция распределения первой компоненты вектора X ;

2) ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству

$$(3.4) \quad r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\| x_{1_\alpha},$$

где x_{1_α} – квантиль первой компоненты вектора X уровня α ;

3) функция квантили имеет вид

$$(3.5) \quad \varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c).$$

Доказательство приведено в Приложении.

Замечание 1. Ограничение $\|A^T u\| > 0$ накладывается для того, чтобы исключить неопределенность в (3.3). Оно эквивалентно условию $A^T u \neq \text{col}(0, 0, \dots, 0)$ покомпонентно. Отсюда вытекают два случая и соответствующие им тривиальные решения:

- а) $u \neq 0$,
- б) $A^T u \neq 0 \quad \forall u \neq 0$.

Если не выполнено а), то $\Phi(0, X) \equiv r(0)$. При этом $P_\varphi(u) = 1$, если $\varphi \geq r(0)$, а $\varphi_\alpha(0) = r(0)$. Иными словами, стратегия $u = 0$ оказывается оптимальной, если она допустима, т.е. $0 \in U$.

Если не выполнено б), т.е. $A^T u_0 = 0$ для некоторого $u_0 \neq 0 \in U$, то $\Phi(u_0, X) = r(u_0^T c)$. При этом $P_\varphi(u_0) = 1$, если $\varphi \geq r(u_0^T c)$, а $\varphi_\alpha(u_0) = r(u_0^T c)$.

Замечание 2. Многие известные распределения сферически симметричны, например нормальное $\mathbf{N}(0, I)$, равномерное на шаре, многомерное Коши и др. В [7] рассмотрен аналогичный случай, но там предполагалось, что матрица A квадратная и симметричная и что функция $r(t) \equiv t$. Здесь же рассмотрен более широкий класс преобразований. Также в [7] не указывается аналитическое выражение для функций вероятности и квантили. В [9] рассмотрена экономическая задача минимизации квантили билинейной функции потерь. Случайные величины в [9] распределены по гауссовскому закону $\mathbf{N}(\mu, K)$. Целевая функция подходит под рассмотренную выше модель, если в (3.1) положить $A = -K^{\frac{1}{2}}$, вектор $c = (-s, -\mu_1, \dots, -\mu_n)$ и функцию $r(t) = t$.

Замечание 3. Выражение $Y = AX + c$ фактически имеет смысл преобразования сферически симметрично распределенного случайного вектора X в эллиптически симметрично распределенный случайный вектор Y .

На основании теоремы 1 сформулируем детерминированные эквиваленты исследуемых задач стохастического программирования. Задача (2.3) преобразуется к виду

$$(3.6) \quad P_\varphi(u) = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right) \rightarrow \max_{u \in U}.$$

Для получения детерминированного эквивалента рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функция $f(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, функция $g(u) : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ — произвольная. Тогда задача

$$(3.7) \quad f(g(u)) \rightarrow \max_{u \in U}$$

по поиску оптимальной стратегии эквивалентна задаче

$$(3.8) \quad g(u) \rightarrow \max_{u \in U}.$$

Доказательство приведено в Приложении.

Если функция распределения $F_1(\cdot)$ строго возрастающая, т.е. не имеющая площадок, то в силу леммы 1 задача (3.6) будет эквивалентна следующей:

$$(3.9) \quad G(u) \stackrel{def}{=} \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \rightarrow \max_{u \in U}.$$

Если все компоненты вектора X не имеют строго возрастающих функций распределения, то задачи (3.6) и (3.9) не будут эквивалентны в общем случае, но из решения задачи (3.9) будет вытекать решение задачи (3.6).

Согласно теореме 1 задача (2.4) примет вид

$$(3.10) \quad \varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Так как функция $r(t)$ по предположению строго возрастает по t и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, то по лемме 1 задача (3.10) эквивалентна следующей:

$$(3.11) \quad H(u) \stackrel{def}{=} \|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Задача с вероятностным ограничением (2.5) примет вид

$$(3.12) \quad \Phi_0(u) \rightarrow \max_{u \in U}, \\ r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\| x_{1_\alpha}.$$

Для выяснения выпуклых свойств функций вероятности и квантили докажем следующее утверждение. Напомним понятие из [2].

Определение 1. Скалярная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \in \mathbb{R}^m$, называется квазивыпуклой на U , если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) \leq \max\{f(u_1), f(u_2)\};$$

аналогично, функция $f(u)$ будет квазивогнутой на U , если

$$(3.13) \quad f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \geq \min\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

Лемма 2. Если $G(u) \geq 0$ для любых $u \in U$, то функции $G(u)$ и $P_\varphi(u)$ квазивогнуты на U . Если $x_{1_\alpha} \geq 0$, то функция $H(u)$ выпукла на U , а $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U .

Доказательство приведено в Приложении.

Замечание 4. Легко заметить, что условие $x_{1_\alpha} \geq 0$ для квазивыпуклости функции квантили совпадает с условием $G(u) \geq 0$ для квазивогнутости функции вероятности, так как функция $G(u)$ в функции вероятности (3.3) фактически играет роль квантили. Однако условие $G(u) \geq 0$ сложнее проверить, чем условие $x_{1_\alpha} \geq 0$.

Замечание 5. Еще одно достоинство детерминированных эквивалентов можно обнаружить, сравнивая задачи (3.10) и (3.11). Функция квантили в задаче (3.10) квазивыпукла, в то время как функция $H(u)$ в (3.11) выпукла, что значительно облегчает поиск экстремума. Для решения задачи (3.11) можно использовать известные методы выпуклого программирования [4]. Заметим, что задача (2.5), записанная в виде (3.12), оказывается задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U .

4. Случай возрастающей целевой функции относительно стратегии

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет следующий вид

$$(4.1) \quad \Phi(u, X) = r(s(u), X),$$

где $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая функция, $r(s, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая, непрерывная слева по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$.

Докажем следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть целевая функция имеет вид (4.1). Тогда

1) функция вероятности равна

$$(4.2) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\},$$

где $r_s^{-1}(\cdot)$ — обратная функция к $r(\cdot)$ по переменной s ;

2) ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ будет эквивалентно следующему

$$(4.3) \quad \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u),$$

где $\bar{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}$;

3) функция квантили

$$(4.4) \quad \varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\}.$$

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 2 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.3), (2.4) и (2.5). Постановка (2.3) примет вид

$$(4.5) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \rightarrow \max_{u \in U}.$$

Если функция $\bar{P}_\psi(\varphi) \stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , то согласно лемме 1 задача (4.5) будет эквивалентна задаче (4.6):

$$(4.6) \quad s(u) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

В противном случае каждое решение задачи (4.6) будет и решением задачи (4.5).

Несложно заметить, что поиск решения задачи (4.5) полностью зависит от свойств функции $s(u)$.

Постановка (2.4) с целевой функцией (4.1) примет вид

$$(4.7) \quad \varphi_\alpha(u) = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\} \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Если функция $\bar{\varphi}_\alpha(\psi) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq \psi\}$ строго возрастает по ψ , то согласно лемме 1 эта задача будет эквивалентна (4.6). В противном случае каждое решение задачи (4.6) будет являться и решением задачи (4.7).

Задача с вероятностным ограничением (2.5) в силу п. 2) теоремы 2 примет вид

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \Phi_0(u) &\rightarrow \max_{u \in U}, \\ \bar{r}_\alpha(\varphi) &\leq -s(u). \end{aligned}$$

Замечание 6. Ограничение в (4.8) проще, чем вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Вначале вычисляется число $\bar{r}_\alpha(\varphi)$ для фиксированных α и φ , а затем оно подставляется в ограничение $\bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)$. При проверке же условия $P_\varphi(u) \geq \alpha$ (или что то же, $\varphi_\alpha(u) \leq \varphi$) необходимо вычислять функцию вероятности $P_\varphi(u)$ (или функцию квантили $\varphi_\alpha(u)$) для каждого u .

Исследуем свойства выпуклости функций вероятности и квантили. Докажем утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и функция $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U , а $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U .

Доказательство приведено в Приложении.

Замечание 7. Обратим внимание, что детерминированные эквиваленты в данном случае значительно упрощают решаемые вероятностные задачи (2.3), (2.4), (2.5). Более того, даже в случае выпуклости $S(u)$ теорема 3 гарантирует лишь квазивогнутость $P_\varphi(u)$ и квазивыпуклость $\varphi_\alpha(u)$. При этом задача (4.6), эквивалентная исходным стохастическим задачам (2.3) и (2.4), оказывается задачей выпуклого программирования.

Пример 1. Пусть $r(s, x) = s\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^1$. Легко проверить, что выполнены все условия теоремы 2. При этом обратная функция в (4.2) будет равна

$$r_s^{-1}(\varphi, x) = \frac{\varphi - \varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

5. Случай возрастающей целевой функции относительно случайного вектора

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет следующий вид

$$(5.1) \quad \Phi(u, X) = r(u, t(X)),$$

где $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – некоторая измеримая функция, $r(u, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая и непрерывная слева по $t \in \mathbb{R}^1$ для любых $u \in \mathbb{R}^m$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть целевая функция имеет вид (5.1). Тогда

1) *функция вероятности равна*

$$(5.2) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\},$$

где $r_t^{-1}(\cdot)$ – обратная функция к $r(\cdot)$ по переменной t ;

2) *ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ будет эквивалентно*

$$(5.3) \quad r(u, t_\alpha) \leq \varphi,$$

где $t_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \min\{s : \mathcal{P}\{t(X) \leq s\} \geq \alpha\}$;

3) *функция квантили*

$$(5.4) \quad \varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha).$$

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 4 сформулируем детерминированные эквиваленты задач (2.3), (2.4) и (2.5). Постановка (2.3) примет вид

$$(5.5) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \rightarrow \max_{u \in U}.$$

В силу того, что

$$\mathcal{P} \{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} = F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)),$$

где $F_T(\cdot)$ – функция распределения случайной величины $T \stackrel{\text{def}}{=} t(X)$, получим из (5.5) задачу

$$(5.6) \quad F_T(r_t^{-1}(u, \varphi)) \rightarrow \max_{u \in U}.$$

Согласно лемме 1, если $F_T(t)$ строго возрастает по t , то задача (5.6) будет эквивалентна по стратегиям задаче

$$(5.7) \quad r_t^{-1}(u, \varphi) \rightarrow \max_{u \in U}.$$

В частности, согласно [2], если существует плотность у случайного вектора X , носитель A которой есть односвязное множество, а функция $t(x)$ непрерывна на A , то $F_T(t)$ строго возрастает по t . Если $F_T(\cdot)$ не будет строго возрастающей, то каждое решение задачи (5.7) будет решением задачи (5.6).

Постановка (2.4) с целевой функцией (5.1) примет вид

$$(5.8) \quad \varphi_\alpha(u) = r(u, t_\alpha) \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Очевидно, что данная задача уже является детерминированным эквивалентом.

Задача с вероятностным ограничением (2.5) в силу п. 2) теоремы 4 примет вид

$$(5.9) \quad \Phi_0(u) \rightarrow \max_{u \in U}, \\ r(u, t_\alpha) \leq \varphi.$$

Замечание 8. Поиск решения задачи (5.7) в данном случае полностью зависит от свойств функции $r_t^{-1}(\cdot)$. Исследуем выпуклые свойства функции $r_t^{-1}(u, \varphi)$. Если $r(u, t(x))$ квазивыпукла на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то обратная функция будет квазивогнутой. Действительно, в силу строгого возрастания и непрерывности слева функции $r(u, t)$ по t для всех $u \in U$ получаем

$$(5.10) \quad U_\varphi \stackrel{def}{=} \{u \in U : r(u, t(x)) \leq \varphi\} = \{u \in U : t(x) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^n$.

Если $r(u, t)$ квазивыпукла на U , то множество U_φ выпукло, а, значит, $r_t^{-1}(u, \varphi)$ квазивогнута на U . Кроме того согласно (5.6) функция $P_\varphi(u)$ в данном случае будет также квазивогнутой на U , так как $F_T(\cdot)$ неубывающая, а $r_t^{-1}(u, \varphi)$ квазивогнута на U .

Если же теперь $r(u, t)$ выпукла совместно по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$, то функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ будет вогнутой. Это утверждение легко следует из того факта, что согласно (5.10) множество $\{u, t : r_t^{-1}(u, \varphi) \geq t\} = \{u, t : r(u, t) \leq \varphi\}$, которое выпукло по $u \in U$ и $t \in \mathbb{R}^1$ одновременно. Следовательно, надграфик функции $-r_t^{-1}(u, \varphi)$ является выпуклым. Поэтому сама функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ будет вогнута на U . Если же функция $r_t^{-1}(u, \varphi)$ вогнута по $u \in U$, то задача максимизации функции вероятности сводится к задаче оптимизации вогнутой функции.

Если $r(u, t(x))$ выпукла (квазивыпукла) на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то согласно теореме 4 функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ будет выпуклой (квазивыпуклой) на U . При этом функция вероятности $P_\varphi(u)$ является лишь квазивогнутой на U .

Пример 2. Пусть $r(u, t) = s_1(u) + s_2(u)t$, где $s_2(u) \geq 0$ для всех $u \in U$. Такая функция удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Обратная функция в этом случае имеет вид

$$r_t^{-1}(u, \varphi) = \frac{\varphi - s_1(u)}{s_2(u)}.$$

Заметим, что если $s_1(u)$ и $s_2(u)$ – выпуклые на U , а $t(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $r(u, t(x))$ будет выпукла, а $r_t^{-1}(u, \varphi)$ – вогнута на U для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (см. рассуждения в замечании 8). Данный случай рассмотрен в [6, 8].

6. Случай квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет однородную квадратичную структуру, т.е.

$$(6.1) \quad \Phi(u, X) \stackrel{def}{=} r(u^T A X_1 \cdot u^T B X_2),$$

где случайные векторы X_1 и X_2 независимы, A и B – матрицы $m \times n$, $r(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – строго возрастающая непрерывная слева функция, а распределения случайных векторов сферически симметричны, т.е. их плотности можно представить в виде

$$(6.2) \quad p_1(x_1) = f_1(\|x_1\|^2), \quad p_2(x_2) = f_2(\|x_2\|^2).$$

Здесь функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – неотрицательные интегрируемые по Лебегу при $t \in [0, \infty)$.

Теорема 5. Пусть целевая функция имеет вид (6.1), а плотности распределения векторов X_1 и X_2 имеют вид (6.2) и, кроме того, $\|A^T u\| \|B^T u\| > 0$ для всех $u \in U$. Тогда каждое решение задачи выпуклого программирования

$$(6.3) \quad \|A^T u\| \|B^T u\| \rightarrow \min_{u \in U}$$

будет являться и решением задач (2.3), (2.4).

Доказательство приведено в Приложении.

7. Случай аддитивной структуры целевой функции

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет вид

$$(7.1) \quad \Phi(u, x) = r(|t(x) + s(u)|),$$

где $r(\cdot) : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — строго возрастающая, непрерывная слева функция, $t(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримая функция, а $s(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая функция.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть целевая функция имеет вид (7.1). Тогда функция вероятности будет равна

$$(7.2) \quad P_\varphi(u) = F_T(r^{-1}(\varphi) - s(u)) - F_T(-r^{-1}(\varphi) - s(u)),$$

где $F_T(\cdot)$ — функция распределения случайной величины $T \stackrel{\text{def}}{=} t(X)$.

Доказательство приведено в Приложении.

Теорема 6. Пусть выполнено условие леммы 3 и плотность распределения случайной величины $T = t(X)$ симметрична и унимодальна относительно точки m_T . Тогда каждое решение задачи

$$(7.3) \quad |m_T - s(u)| \rightarrow \min_{u \in U}$$

будет являться и решением задач (2.3), (2.4).

Доказательство приведено в Приложении.

Замечание 9. Если $s(u)$ выпукла на U и $s(u) \geq m_T$ для всех $u \in U$, то задача (7.3) оказывается задачей выпуклого программирования [4]. При этом легко проверить, что функция вероятности в этом случае оказывается лишь квазивогнутой, а функция квантили — квазивыпуклой.

8. Случай сепарабельной структуры целевой функции и логарифмически вогнутой меры

Рассмотрим случай, когда целевая функция имеет структуру

$$(8.1) \quad \Phi(u, x) = \max_{i=\overline{1, n}} \{r_i(s_i(u) + x_i)\},$$

где $r_i(\cdot) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$, — строго возрастающие, непрерывные слева функции, $s_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, n}$, — некоторые функции. Напомним следующее определение.

Определение 2 ([10]). Неотрицательная функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется логарифмически вогнутой на U , если для любых $u_1, u_2 \in U$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ выполняется

$$(8.2) \quad f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \geq f^\lambda(u_1)f^{1-\lambda}(u_2).$$

Теорема 7. Пусть целевая функция имеет вид (8.1), функции $s_i(\cdot)$, $i = \overline{1, n}$, выпуклы на U , плотность случайного вектора X логарифмически вогнута и его компоненты x_i независимы. Тогда функция вероятности будет равна

$$(8.3) \quad P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)),$$

где $F_i(\cdot)$ – функции распределения случайных величин X_i , $i = \overline{1, n}$, и логарифмически вогнута, а функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ – квазивыпукла.

Доказательство приведено в Приложении.

На основании теоремы 7 сформулируем детерминированные эквиваленты для задач (2.3) и (2.5). Вначале согласно (8.3) имеем

$$(8.4) \quad P_\varphi(u) = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)) \rightarrow \max_{u \in U},$$

Предположим, что для всех $u \in U$ функция вероятности $P_\varphi(u) > 0$. Прологарифмируем (8.4). Учитывая строгое возрастание функции $\ln(\cdot)$, получим

$$(8.5) \quad \ln(P_\varphi(u)) = \sum_{i=1}^n \ln \{F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u))\} \rightarrow \max_{u \in U},$$

Задача с вероятностным ограничением (2.5) примет вид

$$(8.6) \quad \Phi_0(u) \rightarrow \min_{u \in U},$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \{F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u))\} \geq \ln(\alpha).$$

По теореме 7 функция вероятности $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута на U . Но если $P_\varphi(u) > 0$ для всех $u \in U$, то согласно [3] $\ln(P_\varphi(u))$ будет вогнутой функцией на U . Поэтому полученный детерминированный эквивалент (8.5) является задачей выпуклого программирования.

Ограничение в (8.6) будет также выпуклым, а, следовательно, задача (2.5), записанная в виде (8.6), будет задачей выпуклого программирования, если функция $\Phi_0(u)$ выпукла на U .

Замечание 10. Многие известные распределения имеют логарифмически вогнутую плотность, например нормальное, экспоненциальное, равномерное, Коши и др. В [10] рассмотрен аналогичный случай для более частного вида целевой функции без предположения о независимости компонент вектора X . В [10] установлено, что для рассматриваемого там случая функция вероятности $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута, но в отличие от данной статьи детерминированный эквивалент в [10] получить не удалось, и не установлена квазивыпуклость функции квантили. Заметим также, что в случае целевой функции (8.1) явное выражение для функции квантили получить не удастся, и квазивыпуклость функции квантили является менее конструктивным свойством, чем логарифмическая вогнутость функции вероятности: в (8.5) получена задача выпуклого программирования.

9. Заключение

В статье рассмотрены задачи стохастического программирования с вероятностным, квантильным критериями и задача с вероятностным ограничением. Данные задачи решаются для случаев билинейной целевой функции и сферически симметричного распределения, квадратичной целевой функции и сферически симметричного распределения, возрастающей целевой функции относительно стратегии, возрастающей целевой функции относительно случайного вектора, случая аддитивной структуры целевой функции. Для рассматриваемых задач устанавливаются выпуклые свойства вероятностного, квантильного критериев и их детерминированных эквивалентов. Показывается большая простота использования детерминированных эквивалентов по сравнению с исходными вероятностным и квантильным критериями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как функция $r(\cdot)$ строго возрастающая и непрерывная слева, то у нее существует обратная функция $r^{-1}(\cdot)$ такая, что $r^{-1}(r(t)) = t$ и $r(r^{-1}(t)) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Причем функция $r^{-1}(\cdot)$ является неубывающей. Поэтому для всех $\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U$ неравенства $r(u^T(Ax + c)) \leq \varphi$ и $u^T(Ax + c) \leq r^{-1}(\varphi)$ эквивалентны.

Тогда функция вероятности примет вид

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{r[u^T(Ax + c)] \leq \varphi\} = \int_{r[u^T(Ax + c)] \leq \varphi} p_X(x) dx = \int_{u^T(Ax + c) \leq r^{-1}(\varphi)} p_X(x) dx.$$

Сделаем замену переменных $y \stackrel{def}{=} C^T x$, где матрица C – ортогональная с первым столбцом $A^T u \|A^T u\|^{-1}$. Матрица C имеет следующие свойства:

- (i) $x = Cy$;
- (ii) $\|x\|^2 = x^T x = y^T C^T C y = y^T y = \|y\|^2$;
- (iii) $\det C = 1$, следовательно, $dx = \det C \cdot dy = dy$;

$$(iv) \quad u^T A C = \left(\frac{u^T A A^T u}{\|A^T u\|}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1} \right) = \left(\frac{(A^T u)^T A^T u}{\|A^T u\|}, 0, \dots, 0 \right) = (\|A^T u\|, 0, \dots, 0),$$

следовательно, $u^T A x = u^T A C y = \|A^T u\| y_1$.

Так как плотность $p_X(x)$ сферически симметрична, то после ортогонального преобразования $Y \stackrel{def}{=} C^T X$ новая случайная величина Y будет иметь то же распределение, что и X , т.е.

$$(П.1) \quad p_X(y) = p_Y(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Легко заметить, что

$$(П.2) \quad p_X(x) = f(\|x\|^2) = f(\|y\|^2) = p_X(y)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n, y \stackrel{def}{=} C^T x$.

Из (П.1) и (П.2) следует

$$(П.3) \quad p_X(x) = p_X(y) = p_Y(y)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n, y \stackrel{def}{=} C^T x$.

Учитывая свойства матрицы C , а также (П.1) и (П.3), преобразуем выражение для функции вероятности

$$\begin{aligned}
(\text{П.4}) \quad P_\varphi(u) &= \int_{u^T(Ax+c) \leq r^{-1}(\varphi)} p_X(x) dx = \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} p_Y(y) dy = \\
&= \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} p_X(y) dy = \int_{y_1 \leq \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} p_X(y) dy_2 \dots dy_n \right) dy_1 = \\
&= F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right),
\end{aligned}$$

где $F_1(\cdot)$ – функция распределения первой компоненты вектора X .

Следовательно, функция вероятности будет равна

$$(\text{П.5}) \quad P_\varphi(u) = F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right).$$

2. Докажем вторую часть утверждения. По определению квантиль первой компоненты вектора X будет равна

$$(\text{П.6}) \quad x_{1_\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\psi : F_1(\psi) \geq \alpha\}.$$

Для функции вероятности, полученной в п. 1) данного утверждения, ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$ примет вид

$$(\text{П.7}) \quad F_1 \left(\frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \right) \geq \alpha.$$

Положим

$$\psi^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|},$$

тогда (П.7) преобразуется в следующее неравенство:

$$(\text{П.8}) \quad F_1(\psi^*) \geq \alpha.$$

Но поскольку ψ^* не обязательно есть $\min\{\psi : F_1(\psi) \geq \alpha\}$, то

$$(\text{П.9}) \quad \frac{r^{-1}(\varphi) - u^T c}{\|A^T u\|} \geq x_{1_\alpha}.$$

Теперь в силу сделанного предположения $\|A^T u\| > 0$ получим

$$(\text{П.10}) \quad r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \|A^T u\| x_{1_\alpha}.$$

3. Докажем третью часть утверждения. Преобразуем неравенство (П.10) относительно φ , учитывая, что $r(r^{-1}(t)) \leq t$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$:

$$\varphi \geq r(\|A^T u\| x_{1_\alpha} + u^T c).$$

Теперь легко заметить, что

$$\begin{aligned} \min \{ \varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha \} &= \min \{ \varphi : \varphi \geq r(\|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c) \} = \\ &= r(\|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c). \end{aligned}$$

Следовательно, функция квантили по определению (2.2) примет вид

$$(П.11) \quad \varphi_\alpha(u) = r(\|A^T u\|_{x_{1_\alpha}} + u^T c),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 1. Возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $g(u_2) > g(u_1)$. Тогда в силу того, что $f(t)$ возрастает и определена для всех $t \in \mathbb{R}^1$, получаем $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$. Следовательно, если u_0 максимизирует $g(u)$, то эта стратегия максимизирует и $f(g(u))$. Если не существует такого u_0 , что $g(u_0) \geq g(u)$ для всех $u \in U$, а существует лишь последовательность u_n , максимизирующая $g(u)$, то эта последовательность будет максимизирующей и для $f(g(u))$.

Если теперь, наоборот, возьмем такие $u_1, u_2 \in U$, что $f(g(u_2)) > f(g(u_1))$, то в силу свойства строгого возрастания $f(t)$ по t получаем $g(u_2) > g(u_1)$. Отсюда из задачи (3.7) следует задача (3.8). Следовательно, задачи (3.7) и (3.8) эквивалентны в смысле поиска оптимальной стратегии u .

Доказательство леммы 2. Функция $g(u) \stackrel{def}{=} \|u\|$ выпукла по u , так как она равна максимуму выпуклой функции $c^T u$ по $c \in \mathbb{R}^n$ при условии $\|c\| = 1$. Рассмотрим неравенство

$$(П.12) \quad G(u) \geq \lambda,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^1$ – некая константа.

Перенесем знаменатель левой части (П.12) в правую часть. Получим

$$r^{-1}(\varphi) - u^T c \geq \lambda \|A^T u\|.$$

Запишем неравенство относительно u :

$$(П.13) \quad \lambda \|A^T u\| + c^T u \leq r^{-1}(\varphi).$$

В начале доказательства было показано, что норма вектора – выпуклая функция. Следовательно, левая часть неравенства (П.13) является выпуклой функцией при $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda < 0$ не интересен в силу наложенного условия $G(u) \geq 0$. Неравенство (П.13) при $\lambda \geq 0$ задает выпуклое множество, следовательно, функция $G(u)$ квазивогнута при $\lambda \geq 0$.

Функция $H(u)$ выпукла на U как сумма выпуклых функций, если $x_{1_\alpha} \geq 0$. Поэтому функция квантили согласно (3.10) будет квазивыпуклой, так как функция $r(\cdot)$ неубывающая. Отсюда, вследствие теоремы об одновременной квазивогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$ и квазивыпуклости функции квантили для любого $\alpha \in (0, 1)$ [2], функция вероятности $P_\varphi(u)$ будет квазивогнута на U .

Доказательство теоремы 2. По определению квазивыпуклости для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ функция $s(u)$ должна обладать следующим свойством:

$$(П.14) \quad s(\tilde{u}) \leq \max\{s(u_1), s(u_2)\},$$

где $\tilde{u} \stackrel{def}{=} \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$.

Предположим, что неравенство (П.14) выполнено для u_1 , т.е.

$$(П.15) \quad s(\tilde{u}) \leq s(u_1).$$

Рассмотрим множество $\{x : r(s(\tilde{u}), x) \leq \varphi\}$. Так как $r(s, x)$ строго возрастает по $s \in \mathbb{R}^1$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, то в силу (П.15) получим

$$r(s(\tilde{u}), x) \leq r(s(u_1), x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$(П.16) \quad \{x : r(s(u_1), x) \leq \varphi\} \subset \{x : r(s(\tilde{u}), x) \leq \varphi\}.$$

Отсюда, учитывая монотонность меры, получим

$$P_\varphi(u_1) = \mathcal{P}\{r(s(u_1), X) \leq \varphi\} \leq \mathcal{P}\{r(s(\tilde{u}), X) \leq \varphi\} = P_\varphi(\tilde{u}).$$

Окончательно имеем

$$\min\{P_\varphi(u_1), P_\varphi(u_2)\} \leq P_\varphi(\tilde{u}),$$

что по определению доказывает квазивогнутость функции вероятности.

Теперь, основываясь на том факте, что функция квантили квазивыпукла на U для любых $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда функция вероятности квазивогнута на U для любых $\varphi \in \mathbb{R}^1$ [2], получаем, что функция квантили будет квазивыпукла, если $s(u)$ квазивыпукла по $u \in U$.

Доказательство теоремы 3. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(\cdot)$ существует неубывающая обратная $r_s^{-1}(\cdot)$ и сама $r(\cdot)$ строго возрастает и непрерывна слева, то неравенства $r(s(u), x) \leq \varphi$ и $s(u) \leq r_s^{-1}(\varphi, x)$ эквивалентны. Поэтому функция вероятности примет вид

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &= \mathcal{P}\{r(s(u), X) \leq \varphi\} = \mathcal{P}\{s(u) \leq r_s^{-1}(\varphi, X)\} = \\ &= \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\}. \end{aligned}$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Из п. 1) вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$(П.17) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \geq \alpha.$$

Введем функцию

$$(П.18) \quad \bar{r}_\alpha(\varphi) \stackrel{def}{=} \min\{\psi : \mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq \psi\} \geq \alpha\}.$$

Положив в (П.17) $\psi \stackrel{def}{=} -s(u)$, получим из (П.18)

$$(П.19) \quad \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u).$$

Пусть теперь выполнено (П.19). Тогда из (П.18) вытекает, что

$$\mathcal{P}\{-r_s^{-1}(\varphi, X) \leq -s(u)\} \geq \alpha,$$

а по п. 1) данное неравенство эквивалентно $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

Следовательно, (П.19) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (П.19), то по определению (2.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\{\varphi : \bar{r}_\alpha(\varphi) \leq -s(u)\},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4. 1. Докажем первую часть утверждения. Так как у функции $r(\cdot)$ существует неубывающая обратная $r_t^{-1}(\cdot)$ и $r(u, t)$ строго возрастающая и непрерывная слева по t , то функция вероятности равна

$$P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{r(u, t(X)) \leq \varphi\} = \mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\}.$$

2. Докажем вторую часть утверждения. Рассмотрим вероятностное ограничение $P_\varphi(u) \geq \alpha$. Из п. 1) теоремы 4 вытекает, что это неравенство эквивалентно следующему

$$(П.20) \quad P_\varphi(u) = \mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \geq \alpha.$$

Введем функцию

$$(П.21) \quad t_\alpha \stackrel{def}{=} \min\{s : \mathcal{P}\{t(X) \leq s\} \geq \alpha\}.$$

Положив в (П.21) $s = r_t^{-1}(u, \varphi)$, из (П.20) получим

$$(П.22) \quad t_\alpha \leq r_t^{-1}(u, \varphi).$$

Поддействовав на неравенство (П.22) функцией $r(\cdot)$, получим

$$(П.23) \quad r(u, t_\alpha) \leq \varphi,$$

так как $r(\cdot)$ – строго возрастающая и непрерывная слева по t .

Пусть теперь выполнено (П.23). Оно эквивалентно (П.22). Если подставить $s \stackrel{def}{=} r_t^{-1}(u, \varphi) \geq t_\alpha$ во внутреннее неравенство в (П.21), то

$$\mathcal{P}\{t(X) \leq r_t^{-1}(u, \varphi)\} \geq \mathcal{P}\{t(X) \leq t_\alpha\} \geq \alpha.$$

Следовательно, (П.22) есть детерминированный эквивалент вероятностному ограничению $P_\varphi(u) \geq \alpha$.

3. Докажем третью часть утверждения. Так как согласно п. 2) теоремы 4 неравенство $P_\varphi(u) \geq \alpha$ эквивалентно неравенству (П.23), то по определению (2.2) функции квантили получим

$$\varphi_\alpha(u) \stackrel{def}{=} \min\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\} = \min\{\varphi : r(u, t_\alpha) \leq \varphi\} = r(u, t_\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. В данном случае

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P}\{r(u^T A X_1 \cdot u^T B X_2) \leq \varphi\} = \int_{r(u^T A x_1 \cdot u^T B x_2) \leq \varphi} p_1(x) p_2(x) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{u^T A x_1 \cdot u^T B x_2 \leq r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Сделаем замены $y_1 = C_1^T x_1$, где матрица C_1 – ортогональная с первым столбцом $\|A^T u\|^{-1} A^T u$, и $y_2 = C_2^T x_2$, где матрица C_2 – ортогональная с первым столбцом $\|B^T u\|^{-1} B^T u$. Свойства (i), (ii) и (iii) из доказательства п. 1) теоремы 1 остаются неизменными для обеих матриц C_1 и C_2 , а вместо (iv) получим для C_1 :

$$u^T A C_1 = \left(\frac{u^T A A^T u}{\|A^T u\|}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-1} \right) = (\|A^T u\|, 0, 0, \dots, 0),$$

следовательно, $u^T A x_1 = u^T A C_1 y_1 = \|A^T u\| y_{11}$; и для C_2 :

$$u^T B C_2 = \left(\frac{u^T B B^T u}{\|B^T u\|}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-1} \right) = (\|B^T u\|, 0, 0, \dots, 0),$$

следовательно, $u^T B x_2 = u^T B C_2 y_2 = \|B^T u\| y_{21}$.

Учитывая свойства матриц C_1 и C_2 , преобразуем выражение для функции вероятности

$$\begin{aligned} \text{(П.24)} \quad P_\varphi(u) &= \int_{u^T A x_1 \cdot u^T B x_2 \leq r^{-1}(\varphi)} f_1(\|x_1\|^2) f_2(\|x_2\|^2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{y_{11} y_{21} \leq \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^T u\| \|B^T u\|}} f(\|y_1\|^2) f(\|y_2\|^2) dy_1 dy_2 = \\ &= \int_{y_{11} y_{21} \leq \frac{r^{-1}(\varphi)}{\|A^T u\| \|B^T u\|}} g_1(y_{11}^2) g_2(y_{21}^2) dy_{11} dy_{21}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g(y_{11}^2) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(y_{11}^2 + \sum_{i=2}^N y_{1i}^2\right) dy_{12} \dots dy_{1N}, \\ g(y_{21}^2) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(y_{21}^2 + \sum_{i=2}^N y_{2i}^2\right) dy_{22} \dots dy_{2N}. \end{aligned}$$

В силу неотрицательности функций $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ последний интеграл в (П.24) является неубывающей функцией своей верхней границы. Поэтому решая задачу

$$\text{(П.25)} \quad \|A^T u\| \|B^T u\| \rightarrow \min_{u \in U},$$

решаем и задачу (2.3). Легко показать, используя прием, приведенный при доказательстве леммы 2, что критериальная функция в полученном детерминированном эквиваленте будет выпуклой. Действительно, рассмотрим квадратичную функцию

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} c_1^T A^T u \cdot c_2^T B^T u = u^T (A c_1)(c_2^T B^T) u,$$

где векторы c_1 и c_2 имеют подходящие размерности, $\|c_1\| = 1$ и $\|c_2\| = 1$. Максимум функции $f(u)$ по c_1 и c_2 будет выпуклой функцией в силу выпуклости $f(u)$ при $(Ac_1)(c_2^T B^T) > 0$. Но

$$\max_{\|c_1\|=1} \max_{\|c_2\|=1} c_1^T A^T u \cdot c_2^T B^T u = \|A^T u\| \|B^T u\|,$$

и максимум выпуклой функции является выпуклой функцией.

Поэтому задача (П.25) оказывается задачей выпуклого программирования [4].

Согласно [2] каждое решение задачи (2.3) для $\varphi = \varphi_\alpha$, где φ_α – оптимальное значение квантильного критерия в задаче (2.4), является решением задачи (2.4). Так как задача (П.25) не зависит от φ , то каждое ее решение будет являться также решением задачи (2.4).

Доказательство леммы 3. Так как $r(t)$ – строго возрастающая, непрерывная слева функция, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P} \{r(|t(X) + s(u)|) \leq \varphi\} = \mathcal{P} \{|t(X) + s(u)| \leq r^{-1}(\varphi)\} = \\ &= \mathcal{P} \{t(X) \leq r^{-1}(\varphi) - s(u)\} - \mathcal{P} \{t(X) \leq -r^{-1}(\varphi) - s(u)\}, \end{aligned}$$

откуда следует выражение (7.2).

Доказательство теоремы 6. Согласно (7.2)

$$P_\varphi(u) = \int_{-r^{-1}(\varphi) - s(u)}^{r^{-1}(\varphi) - s(u)} f_T(t) dt.$$

Так как плотность $f_T(\cdot)$ симметрична и унимодальна относительно точки m_T , а длина отрезка интегрирования не зависит от u и равна $2r^{-1}(\varphi)$, то функция вероятности $P_\varphi(u)$ будет максимальна, когда будет минимальна величина $|m_T - s(u)|$. Иными словами, каждое решение задачи (7.3) будет решением задачи (2.3). Но согласно [2] каждое решение задачи (2.3) при $\varphi = \varphi_\alpha$ является решением задачи (2.4), а решение задачи (7.3) не зависит от параметра φ . Поэтому решение задачи (7.3) будет являться и решением задачи (2.4).

Доказательство теоремы 7. Так как функции $r_i(t)$ строго возрастающие, непрерывные слева, а компоненты вектора X независимы, то

$$\begin{aligned} P_\varphi(u) &\stackrel{def}{=} \mathcal{P} \left\{ \max_{i=1, n} \{r_i(s_i(u) + X_i)\} \leq \varphi \right\} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P} \{r_i(s_i(u) + X_i) \leq \varphi\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \mathcal{P} \{X_i \leq r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)\} = \prod_{i=1}^n F_i(r_i^{-1}(\varphi) - s_i(u)). \end{aligned}$$

В [2] показано, что утверждение из [11] о логарифмической вогнутости функции вероятности $P_\varphi(u)$ сохраняется, если целевая функция $\Phi(u, x)$ квазивыпукла (в [10] $\Phi(u, x)$ предполагается выпуклой) совместно по u и x , а вероятностная мера логарифмически вогнута (что гарантируется согласно [11] логарифмической вогнутостью плотности $p(x)$). Так как $\Phi(u, x)$ в данном случае совместно квазивыпукла по u и x , то функция $P_\varphi(u)$ логарифмически вогнута. Но легко проверить, сравнивая неравенства (8.2) и (3.13), что логарифмически вогнутая функция является также квазивогнутой (обратное в общем случае неверно). Таким образом, функция $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$. Поэтому согласно [2] функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла для любого $\alpha \in (0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974.
2. Kibzun A.I., Kan Yu.S. Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester: John Wiley, 1996.
3. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // *АиТ*. 1996. № 3. С. 82–102.
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1980.
5. Symonds G.H. Deterministic solution for a class of chance-constrained programming problems // *Oper. Res.* 1967. V. 15. № 3. P. 495–512.
6. Райк Э. О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // *Изв. АН ЭССР. Физ.-мат.*, 1971. Т. 20. № 1. С. 229–231.
7. Ленн Р. Детерминистические эквиваленты задач стохастического программирования с эллиптически симметричными распределениями // *Изв. АН ЭССР. Физ.-мат.*, 1979. Т. 28. № 2. P. 158–160.
8. Тамм Э. О квазивыпуклости функций вероятности и квантиля // *Изв. АН ЭССР. Физ.-мат.*, 1976. Т. 25. № 2. С.141–143.
9. Кан Ю.С., Тузов Н.В. Минимизация квантиля нормального распределения билинейной функции потерь // *АиТ*. 1998. № 11. С. 82–92.
10. Prékopa A. Contributions to the Theory of Stochastic Programming // *Math. Program.* 1973. № 64. P. 202–221.
11. Prékopa A. Logarithmic Concave Measures and Related Topics // *Stochast. Program.* ed. M.A.H. Dempster. Acad. Press. 1980. P. 63–82.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 31.01.2006