Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. О. Слисенко, Одно свойство перечислимых множеств, содержащих “сложно выводимые” формулы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 200–207

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
26 марта 2025 г., 22:59:16

А.О.Слисенко

ОДНО СВОЙСТВО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ, СОДЕРЖАЩИХ "СЛОЖНО ВЫВОДИМЫЕ" ФОРМУЛЫ [ж)]

Рассматриваются перечислимые множества формул исчисления предикатов, содержащие для каждого достаточно большого n формулу, сложность установления выводимости которой наибольшая среди формул с длиной, не превосходящей n. В теореме, доказанной в настоящей заметке, приводится нижняя оценка некоторой характеристики плотности таких перечислимых множеств.

Хотя ниже рассматривается множество всех выводимых формул, причем их выводимость в исчислении предикатов устанавливается многоленточными машинами Тьюринга, эти рассмотрения, по-видимому, можно перенести на произвольные универсальные (для сильных сводимостей) множества и произвольные алгорифмы, для которых аксиоматически (как в [1]) заданы функции, считающие шаги.

1. Будем считать, что формулы исчисления предикатов строятся в некотором алфавите A, не содержащем знака $*$ и имеющем не менее двух букв. Через a будем обозначать число букв в A, через $|W|$ – длину слова W и через $w(k)$ – число слов в A, длина которых не превосходит k. Заметим, что можно рассматривать и нестандартные понятия "длины" слова – лишь бы все слова данной "длины" можно было эффективно задать списком.

Буквы X, Y будут использоваться в качестве переменных для формул, буквы k, l, n – в качестве переменных для натуральных чисел.

Буквы f, g, h и они же с индексами будут использоваться в

ж) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 24 сентября 1970 г.

качестве переменных для многоленточных машин Тьюринга со входом и выходом, имеющих входным алфавитом алфавит $A \cup \{*\}$ (знак $*$ будет служить разделительным знаком); ниже такие машины Тьюринга будут именоваться просто "машинами".

Посредством $t_{\mathfrak{f}}$ будет обозначаться функция, вычисляющая число шагов работы машины $\mathfrak{f}$, при этом, разумеется, для любого входного слова W

$$!\mathfrak{f}(W) \Leftrightarrow !t_{\mathfrak{f}}(W)$$

(знак $!$ означает вычислимость следующего за ним терма).

Известно, что имеется операция Δ, которая по любой машине $\mathfrak{f}$ и любому слову W строит формулу $\Delta(\mathfrak{f}, W)$, такую что

$$\vdash \Delta(\mathfrak{f}, W) \Leftrightarrow !\mathfrak{f}(W)$$

(здесь и ниже знак $\vdash$ означает выводимость в исчислении предикатов),

$$|\Delta(\mathfrak{f}, W)| \leqslant \Omega \cdot |W| + c_{\mathfrak{f}},$$

где константа Ω зависит лишь от языка, в котором строятся формулы (и от определения "длины" в случае нестандартных "длин"), а $c_{\mathfrak{f}}$ зависит еще и от $\mathfrak{f}$. Зафиксируем какую-нибудь такую операцию (и, тем самым, константу Ω).

Условимся придавать выражению "для достаточно длинных слов W " (сокращенно: "для д.д. слов W ") следующий смысл: "для всех слов W, длина которых больше некоторого натурального числа", причем не требуется, чтобы это натуральное число можно было эффективно построить. Аналогично будет пониматься выражение "для достаточно больших n " (сокращенно: "для д.б. n ").

Посредством $\nu(E, k)$ будем обозначать число элементов произвольного множества E, длина которых не превосходит k (это число, вообще говоря, эффективно не вычислимо).

2. Машину E будем называть **а л г о р и ф м о м у с т а н о в л е н и я в ы в о д и м о с т и**, если область ее применимости (обозначение: $\mathrm{dom}\,\mathfrak{f}$) есть множество всех выводимых формул.

Переменными для алгорифмов установления выводимости будут служить буквы $\mathfrak{z}$ и q .

Зафиксируем произвольный алгорифм $\mathfrak{z}$. Из результатов М.Блюма [I] вытекает, что, с одной стороны, по данному ускорению можно построить множество E_1 выводимых формул, на котором $\mathfrak{z}$ допускает это ускорение, а, с другой стороны, по заданой оценке сложности можно построить множество E_2 выводимых формул, на которых $\mathfrak{z}$ имеет данную нижнюю оценку числа шагов и не допускает произвольных ускорений; причем для некоторого C

$$\nu(E_i, n) \geqslant \omega\left(\frac{n-c}{\Omega}\right) \quad \text{для д.б. } n \quad (i=1,2)$$

Поэтому в терминах числа шагов работы $\mathfrak{z}$ над отдельными формулами трудно охарактеризовать качество работы $\mathfrak{z}$ в целом. Естественно рассмотреть "усредненные" характеристики вычислительной сложности $\mathfrak{z}$ - например, (невычислимую) функцию $\tau_{\mathfrak{z}}(n)$ - максимальное число шагов работы алгорифма $\mathfrak{z}$ над выводимыми формулами длины не более n :

$$\tau_{\mathfrak{z}}(n) = \max_{\vdash X,\ |X| \leqslant n} t_{\mathfrak{z}}(n).$$

Из неразрешимости множества всех выводимых формул вытекает, что для любых $\mathfrak{z}$ и q неверно утверждение

$$\tau_q(n+1) \leqslant \tau_{\mathfrak{z}}(n) \qquad \text{для д.б. } n.$$

Это утверждение можно истолковывать как невозможность "очень больших" (не оцениваемых общерекурсивной функцией) улучшений алгорифмов установления выводимости.

Более того, нетрудно видеть, что для любых $\mathfrak{z}$ и q можно построить общерекурсивную функцию H , такую что

$$\tau_{\mathfrak{z}}(n) \leqslant H(n, \tau_q(n)) \text{ для всех } n.$$

3. Функция $\tau_{\mathfrak{z}}$ определяется значениями $t_{\mathfrak{z}}$ на "предельно сложных" для установления выводимости формулах, т.е. таких X , что $t_{\mathfrak{z}}(X) = \tau_{\mathfrak{z}}(|X|)$. Одно свойство перечислимых множеств, содержащих "достаточно много" предельно сложных формул, формулируется ниже.

Теорема. Пусть алгорифм $\mathfrak{Z}$ – произволен, а перечислимое множество выводимых формул E для любого д.б. n содержит формулу X, для которой $|X| \leq n$ и $t_{\mathfrak{Z}}(X) = \tau_{\mathfrak{Z}}(n)$. Тогда при некотором C выполнено неравенство

$$\nu(E,n) > w\left(\frac{n-c}{\Omega} - \log_a n\right) \qquad \text{для д.б. } n.$$

(Здесь a — количество букв в A – см.[I]).

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и пусть машина h такова, что $E = \mathrm{dom}\, h$.

Допустим, что при любом натуральном C для бесконечно многих n

$$\nu(E,n) \leq w\left(\frac{n-c}{\Omega} - \log_a n\right). \tag{I}$$

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть ξ – произвольная машина. Возьмем достаточно большое n, для которого выполнено (I). Формулы из множества E с длиной, не превосходящей n можно закодировать столь короткими словами W, что $|\Delta(\xi, W)| < n$. Выбрав подходящим образом ξ, нетрудно получить противоречие. Кодирование и декодирование упомянутых формул осуществляется описанными ниже машинами $\bar\beta$ и β, а в качестве "подходящего" ξ берется одна из машин ζ_0, ζ_1 (см. ниже).

Будем считать, что положительные натуральные числа кодируются словами алфавита A с помощью алфавитной нумерации, т.е. слово $a_{i_n} \ldots a_{i_1} a_{i_0}$, где $i_0, i_1, \ldots, i_n$ – номера букв в A, принимающие значения от 1 до a, изображает натуральное число

$$i_0 + i_1 \cdot a + \ldots + i_n \cdot a^n.$$

Посредством β будем обозначать машину, работающую над формулой X следующим образом. Сначала она выписывает в порядке возрастания номеров все формулы с длиной, не превосходящей $|X|$, и записывает в счетчик ноль. Далее β моделирует шаги работы h и вычеркивает при этом некоторые из выписанных формул. Допустим, что

β смоделировала i шагов работы h и формула X еще не вычеркнута. Тогда β моделирует $(i+1)$ -ый шаг работы h над каждой из невычеркнутых формул. Возможны 2 случая.

(а). $(i+1)$-ый шаг h не оказался последним ни для какой из невычеркнутых формул. Тогда моделируется $(i+2)$-ой шаг.

(б) $(i+1)$-ый шаг h оказался последним для некоторых формул. Тогда вычеркивается первая из таких формул и в счетчик прибавляется 1, затем вторая и в счетчик прибавляется 1 и т.д. до тех пор, либо пока не вычеркнется X - тогда β кончает работу и результатом считается содержимое счетчика (являющееся словом в A), либо пока не вычеркнутся все из выписанных формул, над которыми h кончает работу ровно за $(i+1)$ шаг — тогда β переходит к моделированию $(i+2)$-го шага работы h над невычеркнутыми формулами.

Нетрудно видеть, что

$$\forall X (X \in E \Leftrightarrow !\beta(X)).$$

Пусть $\bar{\beta}$ - обращение машины β, точнее, машина, перерабатывающая любую пару вида $n * \ell$ следующим образом: выписываются в порядке возрастания номеров все формулы, длина которых не более n, и среди них ищется ℓ-ая путем такого же моделирования шагов работы h, как при работе машины β. Конструкцию машины $\bar{\beta}$ нетрудно уточнить так, чтобы для любого X

$$!\beta(X) \Rightarrow \bar{\beta}(|X| * \beta(X)) = X. \qquad (2)$$

Пусть машина α удовлетворяет условному равенству

$$\alpha(X) \simeq t_3(X) + t_\beta(X) + (2|X|+1)^2$$

Используя теорему 7 из [1], построим f, такую что

$$\mathrm{dom} f = E,$$

$$\forall X (X \in E \Rightarrow (f(X) = 0 \vee f(X) = 1))$$

какова бы ни была f', равная f,

$$t_{f'}(X) > \alpha(X) \qquad \text{для д.д.} X \text{ из } E$$

Посредством $f_i\,(i=0)$ обозначим машину со свойствами:

$$\forall X(!\mathfrak{f}_i(X)\Leftrightarrow \mathfrak{f}(X)\simeq i),$$

$$\forall X(!\mathfrak{f}_i(X)\Rightarrow t_{\mathfrak{f}_i}(X)=t_{\mathfrak{f}}(X)). \quad (i=0,1).$$

Нетрудно видеть, что для любой $\mathfrak{f}_i'$ с той же областью применимости, что и $\mathfrak{f}_i$,

$$t_{\mathfrak{f}_i'}(X)>\alpha(X) \text{ для д.д. } X \text{ из } \mathrm{dom}\,\mathfrak{f}_i (i=0,1) \qquad (3)$$

Построим естественным образом машины g_i, ζ_i удовлетворяющие равенствам

$$g_i(n*\ell)\simeq \mathfrak{f}_i(\bar{\beta}(n*\ell)),$$

$$\zeta_i(X)\simeq s(\Delta(g_i,|X|*\beta(X)))$$

при любых n,ℓ,X $(i=0,1)$.

При $i=0,1$ и любом X имеем, используя (2)

$$!\zeta_i(X)\Leftrightarrow !g_i(|X|*\beta(X))\Leftrightarrow \mathfrak{f}_i(X)\,\&\,!\beta(X)\Leftrightarrow !\mathfrak{f}_i(X), \qquad (4)$$

т.е. $\mathrm{dom}\,\zeta_i=\mathrm{dom}\,\mathfrak{f}_i$. Отсюда и из (3) получаем

$$t_{\zeta_i}(X)>\alpha(X) \qquad (5)$$

для д.д. X из $\mathrm{dom}\,\mathfrak{f}_i$ $(i=0,1)$.

Заметим, что имеется константа c' , обладающая свойством: для д.б. n из $t_s(X)=\tau_s(n)$ вытекает $|X|>\frac{n-c'}{\Omega}$ (Это можно получить следующим образом. Воспользуемся описанным выше способом построения по машине α машин $\mathfrak{f}_0$ и $\mathfrak{f}_1$. Применим эту конструкцию, взяв в качестве α машину t_s . Получим машины $\bar{\mathfrak{f}}_0$ и $\bar{\mathfrak{f}}_1$.Тогда для каждой д.д. выводимой формулы X при некотором $i (i=0,1)$ будет верно неравенство $t_s(\Delta(\bar{\mathfrak{f}}_i,X))>t_s(X)$, откуда следует требуемое).

Пусть γ_i $(i=0,1)$ – машины обладающие следующими свойствами:

для любого слова W в $A\cup\{*\}$

$$\gamma_i(W)\simeq\Delta(g_i,W)$$

и для д.д. слов W в $A\cup\{*\}$

$$t_{\gamma_i}(W) \leq |W|^2 \quad (i=0,1).$$

Зафиксируем n, для которого, во-первых, верно (I) при $c = 2\Omega - \max\{c_{g_0}, c_{g_1}\}$, во-вторых, для любого X из $\mathrm{dom}\, f_i$, такого что $|X| > \frac{n-c'}{\Omega}$, выполнено (5) и, в-третьих, для любого слова W из $A \cup \{*\}$, такого что $|W| > \frac{n-c'}{\Omega}$, выполнено

$$t_{\gamma_i}(W) \leq |W|^2 \tag{6}$$

Существует (неэффективно) y из E, для которого $t_3(y) = \tau_3(n)$. При некотором j $(j=0,1)$ будет $!\, f_j(y)$. Тогда

$$t_{\tau_j}(y) > \alpha(y) \tag{7}$$

Теперь оценим $t_{\tau_j}(y)$ сверху.

Учитывая, что композиция машин устраивалась естественным образом,

$$t_{\tau_j}(y) \leq t_3(\Delta(g_j, |y| * \beta(y))) + t_\beta(y) + t_{\gamma_j}(|y| * \beta(y))$$

(не умаляя общности считаем, что $|y|$ вычисляется за число шагов, не превосходящее $t_\beta(y)$).

В силу (I),

$$|\beta(y)| \leq \frac{n-c}{\Omega} - \log_a n.$$

Следовательно,

$$|\Delta(g_j, |y| * \beta(y))| \leq \Omega \cdot ||y| * \beta(y)| + c_{g_j}$$

$$= \Omega(||y|| + 1 + |\beta(y)|) + c_{g_j}$$

$$\leq \Omega(\log_a n + 2 + \frac{n-c}{\Omega} - \log_a n) + c_{g_j}$$

$$= 2\Omega + n - c + c_{g_j} \leq n$$

Отсюда, учитывая равенство $t_3(y) = \tau_3(n)$, (6) и очевидное неравенство $|\beta(y)| \leq |y|$, получаем

$$t_{\tau_j}(y) \leq t_3(y) + t_\beta(y) + (2|y|+1)^2 = \alpha(y),$$

что противоречит (7).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Blum M. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions. "J.Assoc.Comput.Mach.", 1967, 14, 2, 322-336. (Русский перевод в книге: "Проблемы математической логики", М., 1970).