



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Киселев, Влияние неоднородности среды на направленность простейших источников упругих волн,

Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1984, том 140, 77–87

<https://www.mathnet.ru/zns14074>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

14 июля 2025 г., 14:52:44



ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА НАПРАВЛЕННОСТЬ
ПРОСТЕЙШИХ ИСТОЧНИКОВ УПРУГИХ ВОЛН

С ростом детальности сейсмических наблюдений усиливается интерес к тонким, т.е. не улавливаемым в нулевом порядке лучевого метода, деталям возбуждения и распространения упругих волн [1], [2]. Асимптотическое описание подобных явлений требует знания соответствующих начальных данных (дифракционных коэффициентов), характеризующих источник колебаний. В работе впервые вычисляются начальные данные первого поправочного приближения для простейших задач о возбуждении упругих волн в изотропной неоднородной среде. Геофизические следствия этих рассмотрений, связанных с так называемой естественной направленностью источников, целесообразнее изложить в другом месте.

Исследуется высокочастотная асимптотика в двух задачах с точечными источниками

$$\bar{L}(\bar{u}) = \bar{F}, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (0.1)$$

$$L_j(\bar{u}) = \partial \sigma_{ij} / \partial r_i + \rho(\bar{r}) \omega^2 u_j, \quad (0.2)$$

$$\sigma_{ij}(\bar{u}) = \mu(\bar{r}) (\partial u_i / \partial r_j + \partial u_j / \partial r_i) + \lambda(\bar{r}) \delta_{ij} \operatorname{div} \bar{u}, \quad (0.3)$$

$\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$. Функции $\lambda(\bar{r})$, $\mu(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$ — гладкие, $\lambda + 2\mu > \mu > 0$, $\rho > 0$. По повторяющимся значкам подразумевается суммирование от 1 до 3. Параметры Ламе λ и μ — объемная плотность среды ρ связаны со скоростями продольной и поперечной волн a и b соотношениями

$$\lambda(\bar{r}) + 2\mu(\bar{r}) = \rho(\bar{r}) a^2(\bar{r}), \quad \mu(\bar{r}) = \rho(\bar{r}) b^2(\bar{r}). \quad (0.4)$$

Единственное решение (0.1) выделяется условием излучения.

Рассматривается центр расширения

$$\bar{F}(\bar{r}) = -4\pi \operatorname{grad} \delta(\bar{r}), \quad (0.5)$$

(δ — дельта-функция) и центр вращения с осью \bar{e}_1

$$\bar{F}(\bar{r}) = -4\pi \omega t (\bar{e}_1 \delta(\bar{r})). \quad (0.6)$$

Обобщенные функции (0.5) и (0.6) моделируют сферически-симметричную и простейшую аксиально-симметричную нагрузки, приложенные к поверхности малой сферической полости [4].

В работе вычисляются начальные данные первого поправочного члена лучевого разложения продольной волны в случае (0.5). То же делается для поперечной волны от центра вращения (0.6).

Вычисления ведутся по использующей идеи [5] и [6] схеме работы [7] - [8], где найдены главные члены лучевых разложений поперечной волны от (0.5) и продольной - от (0.6). Приложению результатов [8] к сейсмике посвящена статья [1]. Другое изложение техники [7] - [8] имеется в [9], где, однако, как указал автору Ж.Жобер, рассматриваются уравнения, отличающиеся от уравнений (0.1)-(0.3) теории упругости младшими членами.

Автор признателен Н.Н.Пузыреву предложившему тему работы.

§ I. Разложение вблизи источника

I. Поле перемещений $\vec{u}(\vec{r}; \omega)$ вблизи точки источника $\vec{r} = 0$ описывается разложением, которое мы называем внутренним

$$\vec{u}(\vec{r}; \omega) \sim \omega^2 \{ \vec{V}^0(\vec{R}) + \omega^{-1} \vec{V}^1(\vec{R}) + \dots \}, \quad (I.1)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}}{\omega}, \quad \vec{R} = (X_1, X_2, X_3). \quad (I.2)$$

Коэффициенты в (0.1) раскладываются по степеням растянутых переменных (I.2)

$\mu(\vec{r}) \sim \mu^0 + \omega^{-1} \mu^1(\vec{R}) + \dots$, $\lambda(\vec{r}) \sim \lambda^0 + \omega^{-1} \lambda^1(\vec{R}) + \dots$,
 $g(\vec{r}) \sim g^0 + \omega^{-1} g^1(\vec{R}) + \dots$; $\lambda^0 = \lambda(0)$, $\mu^0 = \mu(0)$, $g^0 = g(0)$,
 $\lambda^i(\vec{R})$, $\mu^i(\vec{R})$, $g^i(\vec{R})$ - однородные полиномы по X_1, X_2, X_3 степени i . Оператор \vec{L} представляется в виде

$$\vec{L}(\vec{u}) \sim \omega^2 \{ \vec{L}^0(\vec{u}) + \omega^{-1} \vec{L}^1(\vec{u}) + \dots \}, \quad (I.3)$$

причем

$$L_j^m(\vec{u}) = \partial_k \sigma_{kj}^m(\vec{u}) + g^m(\vec{R}) u_j, \quad \partial_k = \partial / \partial X_k = \omega \partial / \partial r_k, \quad (I.4)$$

а σ_{kj}^m получены из σ_{kj} заменой $\partial / \partial r_j \rightarrow \partial_j$, $\lambda \rightarrow \lambda^m(\vec{R})$, $\mu \rightarrow \mu^m(\vec{R})$. Оператор \vec{L}^0 имеет постоянные коэффициенты

$$\vec{L}^0(\vec{u}) = g^0 \{ \alpha^{-2} \text{grad}_{\vec{R}} \text{div}_{\vec{R}} \vec{u} - \beta^{-2} \text{rot}_{\vec{R}} \text{rot}_{\vec{R}} \vec{u} + \vec{u} \} \quad (I.5)$$

$$\alpha = \frac{1}{a(0)} = \sqrt{\frac{g^0}{\lambda^0 + 2\mu^0}}, \quad \beta = \frac{1}{b(0)} = \sqrt{\frac{g^0}{\mu^0}}. \quad (I.6)$$

Подстановка (I.1) в (0.1) дает уравнения

$$\vec{L}^0(\vec{V}^0) = \vec{F}(\vec{R}), \quad (I.7)$$

$$\vec{L}^0(\vec{V}^1) = -\vec{L}^1(\vec{V}^0), \quad (I.8)$$

Решение каждого из них выделяется ([7], [8], [9]) принципом предельного поглощения.

Уравнения (I.6), (I.7), ... можно решить в элементарных функциях.

Функция \vec{V}^1 для источников (0.5) и (0.6) имеет вид [7], [8], [9]:

$$\vec{V}^1(\vec{R}) = e^{i\omega R} \sum_{j=-3}^{j=1} \vec{W}_j^a(\vec{R}) + e^{i\omega R} \sum_{j=-3}^{j=1} \vec{W}_j^b(\vec{R}), \quad R = |\vec{R}|, \quad (I.9)$$

где \vec{W}_j^a и \vec{W}_j^b однородны степени j .

2. На выражениях вида (I.9) с другими, может быть, пределами суммирования, определим операции проектирования [8]

$$\vec{\pi}^a(\vec{V}^1) = e^{i\omega R} \langle \vec{W}_{-1}^a, \vec{s} \rangle \vec{s}, \quad (I.10)$$

$$\vec{\pi}^b(\vec{V}^1) = e^{i\omega R} \{ \vec{W}_{-1}^b - \langle \vec{W}_{-1}^b, \vec{s} \rangle \vec{s} \}, \quad (I.11)$$

где $\langle \vec{f}, \vec{q} \rangle = f_j q_j$, а \vec{s} - следующий единичный вектор

$$\vec{s} = \text{grad}_{\vec{R}} R = R^{-1} \vec{R}. \quad (I.12)$$

Функции $e^{i\omega R} \vec{\pi}^a(\vec{V}^1)$ и $e^{i\omega R} \vec{\pi}^b(\vec{V}^1)$ имеют большое сходство с диаграммами направленности продольной и поперечной волн в случае однородной среды.

Полезно еще ввести на скалярных функциях вида

$$V(\vec{R}) = e^{i\omega R} \sum_{j < j_0} W_j(\vec{R}), \quad j_0 < +\infty, \quad (I.13)$$

где W_j однородны степени j , операцию \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}V = e^{i\omega R} W_{-1}(\vec{R}). \quad (I.14)$$

Целью двух ближайших параграфов является вычисление функций $\vec{\pi}^a(\vec{V}^1)$ в случае (0.5) и $\vec{\pi}^b(\vec{V}^1)$ в случае (0.6), содержащих всю информацию, необходимую для вычисления искомых начальных данных [7], [8].

§ 2. Вычисление функции $\vec{\pi}^a(\vec{V}^1)$ для центра расширения

Из (I.7) легко следует, что в случае (0.5)

$$\begin{aligned} V_j^0 &= \frac{d^2}{\rho^2} \partial_j A, \\ A &= R^{-1} e^{i\omega R}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\vec{\pi}^a(\vec{V}^0) = \frac{i d^3}{\varrho^0} A \vec{s}. \quad (2.2)$$

Как нетрудно проверить [8],

$$\frac{\varrho^0}{d^2} L_i^1(\vec{V}^0) = \partial_i \{ (\lambda^1(\vec{R}) + 2\mu^1(\vec{R}) + \varrho^1(\vec{R})) A \} + 2\mu_k \partial_{kj}^2 A - 2\mu_j \Delta_{\vec{R}} A - \varrho_j A \quad (2.3)$$

где μ_j и ϱ_j - постоянные коэффициенты линейных функций $\mu^1(\vec{R})$ и $\varrho^1(\vec{R})$:

$$\mu^1(\vec{R}) = \mu_k X_k, \quad \varrho^1(\vec{R}) = \varrho_k X_k. \quad (2.4)$$

Можно показать [8], что первое слагаемое в правой части (2.3) не дает вклада в $\vec{\pi}^a(\vec{V}^1)$. Следовательно,

$$\vec{\pi}^a(\vec{V}^1) = \frac{d^2}{\varrho^0} \{ \vec{\pi}^a(\vec{f}) + \vec{\pi}^a(\vec{q}) + \vec{\pi}^a(\vec{h}) \} \quad (2.5)$$

причем, если \vec{e}_j - орт оси X_j , то

$$\vec{L}^0(\vec{f}) = -2\vec{e}_k \mu_k \partial_{kj}^2 A, \quad \vec{L}^0(\vec{q}) = 2\vec{e}_j \mu_j \Delta_{\vec{R}} A,$$

$$\vec{L}^0(\vec{h}) = \vec{e}_j \varrho_j A.$$

Без труда находится, что

$$\vec{f}_j = -\frac{d^2}{\varrho^0} \cdot 2\mu_k \partial_{kj}^2 \frac{e^{i d R}}{2i d}. \quad (2.6)$$

Далее, элементарно проверяются формулы [8], [9]

$$\varrho_j = 2 \frac{\mu_k}{\varrho^0} \left\{ \frac{\beta^2 (d^2 \delta_{kj} + \partial_{kj}^2) A - (\beta^2 \delta_{kj} + \partial_{kj}^2) B}{d^2 - \beta^2} + d^2 \partial_{kj}^2 \frac{e^{i d R}}{2i d} \right\},$$

$$B = R^{-1} e^{i \beta R},$$

$$\vec{h}_j = -\frac{\mu_k}{\varrho^0} \left\{ (\beta^2 \delta_{kj} + \partial_{kj}^2) \frac{A - B}{d^2 - \beta^2} + \partial_{kj}^2 \frac{e^{i d R}}{2i d} \right\}.$$

Используя тождества

$$\mathcal{P} \partial_{kj}^2 A = -d^2 s_k s_j A, \quad \mathcal{P} \partial_{kj}^2 \frac{e^{i d R}}{2i d} = \frac{1}{2} (\delta_{kj} - s_k s_j) A, \quad (2.7)$$

находим, что $\vec{\pi}^a(\vec{f}) = \vec{\pi}^a(\vec{q}) = 0$, а

$$\vec{\pi}^a(\vec{V}^1) = \frac{d^2}{\varrho^0} \vec{\pi}^a(\vec{h}) = \left(\frac{d}{\varrho^0} \right)^2 \varrho_k s_k \vec{s} A,$$

$$\bar{\Pi}^a(\bar{V}^1) = \frac{1}{\rho(0)a^2(0)} \left\langle \frac{\text{grad}_{\bar{r}} \rho(\bar{r})}{\rho(\bar{r})}, \bar{s} \right\rangle \Big|_{\bar{r}=0} \bar{s} A. \quad (2.8)$$

§ 3. Вычисление функции $\bar{\Pi}^b(\bar{V}^1)$ для центра вращения

Решая (I.7) в случае источника (0.6), легко найти

$$\bar{V}^0(\bar{R}) = \frac{\beta^2}{\rho^0} \text{rot}_{\bar{R}}(\bar{e}_1 B) = \frac{\beta^2}{\rho^0} \{ \bar{e}_2 \partial_3 - \bar{e}_3 \partial_2 \} B, \quad (3.1)$$

откуда

$$\bar{\Pi}^b(\bar{V}^0) = \frac{i\beta^3}{\rho^0} [\bar{s}, \bar{e}_1] B. \quad (3.2)$$

Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^1(\bar{V}^0) &= \frac{\beta^2}{\rho^0} \mu^1(\bar{R}) \{ \delta_{2j} \partial_{3i}^2 - \delta_{3j} \partial_{2i}^2 + \delta_{2i} \partial_{3j}^2 - \delta_{3i} \partial_{2j}^2 \} B, \\ \partial_i \delta_{ij}^1(\bar{V}^0) &= \frac{\beta^2}{\rho^0} \{ \mu_{\kappa} \partial_{\kappa} (\delta_{2j} \partial_3 - \delta_{3j} \partial_2) + \partial_j (\mu_2 \partial_3 - \mu_3 \partial_2) \} B + \\ &+ \frac{\beta^2}{\rho^0} \mu^1(\bar{R}) (\delta_{2j} \partial_3 - \delta_{3j} \partial_2) \Delta_{\bar{R}} B. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \mu^1(\bar{R}) (\delta_{2j} \partial_3 - \delta_{3j} \partial_2) \Delta_{\bar{R}} B &= (\delta_{2j} \partial_3 - \delta_{3j} \partial_2) (\mu^1(\bar{R}) \Delta_{\bar{R}} B) - \\ &- (\delta_{2j} \mu_3 - \delta_{3j} \mu_2) \Delta_{\bar{R}} B, \\ \rho^1 \bar{V}^0 &= \text{rot}_{\bar{R}} \{ \rho^1(\bar{R}) B \bar{e}_1 \} - (\bar{e}_2 \rho_3 - \bar{e}_3 \rho_2) B. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{L}^1(\bar{V}^0) = \frac{\beta^2}{\rho^0} \{ \bar{c} + \bar{d} + \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} \}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \mu_{\kappa} \partial_{\kappa} \text{rot}_{\bar{R}}(B \bar{e}_1), \\ \bar{d} &= \text{grad}_{\bar{R}} (\mu_2 \partial_3 - \mu_3 \partial_2) B, \\ \bar{i} &= \text{rot}_{\bar{R}} \{ (\mu^1(\bar{R}) \Delta_{\bar{R}} + \rho^1(\bar{R})) B \bar{e}_1 \}, \\ \bar{j} &= -(\bar{e}_2 \mu_3 - \bar{e}_3 \mu_2) \Delta_{\bar{R}} B = -[\nabla_{\bar{R}} \mu^1(\bar{R}), \bar{e}_1] \Delta_{\bar{R}} B, \\ \bar{k} &= -(\bar{e}_2 \rho_3 - \bar{e}_3 \rho_2) B = -[\nabla_{\bar{R}} \rho^1(\bar{R}), \bar{e}_1] B. \end{aligned}$$

Как следует из (1.8) и (3.3),

$$\bar{V}^1 = -\frac{\beta^2}{\rho^0} \{ \bar{C} + \bar{D} + \bar{I} + \bar{J} + \bar{K} \} \quad (3.4)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{L}^0(\bar{C}) = \bar{c}, \quad \bar{L}^0(\bar{D}) = \bar{d}, \quad \bar{L}^0(\bar{I}) = \bar{i}, \\ \bar{L}^0(\bar{J}) = \bar{j}, \quad \bar{L}^0(\bar{K}) = \bar{k}. \end{aligned}$$

Разыскивая функции \bar{C} и \bar{D} в виде $\bar{C} = \text{rot}_{\bar{R}} \bar{\Psi}$, $\bar{D} = \text{grad}_{\bar{R}} \bar{\Psi}$, получаем

$$C_n = \frac{\beta^2}{\rho^0} \mu_k (\delta_{2n} \partial_{3k}^2 - \delta_{3n} \partial_{2k}^2) \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta}, \quad (3.5)$$

$$D_n = -\frac{\alpha^2}{\rho^0 (\alpha^2 - \beta^2)} (\mu_2 \partial_{3n}^2 - \mu_3 \partial_{2n}^2) B. \quad (3.6)$$

Пользуясь тождествами

$$\mathcal{P} \partial_{mn}^2 B = -\beta^2 \varepsilon_m \varepsilon_n B, \quad \mathcal{P} \partial_{mn}^2 \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{mn} - \varepsilon_m \varepsilon_n) B, \quad (3.7)$$

находим, что

$$\bar{\Pi}^b(\bar{D}) = 0, \quad (3.8)$$

$$\bar{\Pi}^b(\bar{C}) = \frac{\beta^2}{2\rho^0} \bar{\Pi}^b \{ \bar{e}_2 (\mu_3 - \mu_n \varepsilon_n \varepsilon_3) B - \bar{e}_3 (\mu_2 - \mu_k \varepsilon_k \varepsilon_2) B \}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\bar{\Pi}^b(\bar{C}) = \frac{\beta^2}{2\rho^0} \bar{\Pi}^b \{ [\nabla_{\bar{R}} \mu'(\bar{R}), \bar{e}_2] B - \langle \nabla_{\bar{R}} \mu'(\bar{R}), \bar{e}_3 \rangle [\bar{e}, \bar{e}_1] \}. \quad (3.9)$$

Нетрудно проверить также, см. [8], что

$$\bar{\Pi}^b(\bar{I}) = 0 \quad (3.10)$$

Для вычисления $\bar{\Pi}^b(\bar{J})$ и $\bar{\Pi}^b(\bar{K})$ приведем два элементарно проверяемых тождества. Пусть

$$\bar{L}^0(\bar{\Phi}) = \bar{\varphi} B, \quad \bar{L}^0(\bar{\Psi}) = \bar{\Psi} \Delta_{\bar{R}} B \quad (3.11)$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\Psi}$ — постоянные. Тогда (см. [8], [9])

$$\Phi_j = \frac{\varphi_k}{\rho^0} \left\{ \partial_{kj}^2 \frac{A-B}{\alpha^2 - \beta^2} + (\beta^2 \delta_{kj} + \partial_{kj}^2) \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta} \right\}, \quad (3.12)$$

откуда следует, что

$$\Psi_j = \frac{\Psi_k}{\rho^0} \left\{ \partial_{kj}^2 \frac{-d^2 A + \beta^2 B}{d^2 - \beta^2} + (\beta^2 \delta_{kj} + \partial_{kj}^2) (B - \beta^2 \frac{e^{i\beta R}}{2i\beta}) \right\}. \quad (3.13)$$

(В формуле (4.13) работы [8], аналогичной (3.13) имеется опечатка).

Из (3.7), (3.11)-(3.13) получаем

$$\Pi_j^b(\bar{\Phi}) = \frac{\Psi_k}{2\rho^0} (\delta_{kj} - \varepsilon_k \varepsilon_j) B, \quad \Pi_j^b(\bar{\Psi}) = -\frac{\beta^2 \Psi_k}{2\rho^0} (\delta_{kj} - \varepsilon_k \varepsilon_j) B. \quad (3.14)$$

Пользуясь (3.11)-(3.14), находим, что

$$\bar{\Pi}^b(\bar{J} + \bar{K}) = \frac{1}{2\rho^0} \bar{\Pi}^b \left\{ \left[\beta^2 \nabla_{\bar{R}} \mathcal{M}'(\bar{R}) - \nabla_{\bar{R}} \rho'(\bar{R}), \bar{e}_1 \right] B \right\} \quad (3.15)$$

Наконец, из (3.8), (3.9), (3.15) и (0.4) следует формула

$$\bar{\Pi}^b(\bar{V}^i) = \left\{ \bar{U} - \langle \bar{U}, \bar{s} \rangle \bar{s} + \langle \bar{Z}, \bar{s} \rangle [\bar{s}, \bar{e}_1] \right\} \frac{\beta^2}{\rho^0} B, \quad (3.16)$$

где

$$\bar{U} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\text{grad}_{\bar{r}} \rho(\bar{r})}{\rho(\bar{r})} + 4 \frac{\text{grad}_{\bar{r}} b(\bar{r})}{b(\bar{r})}, \bar{e}_1 \right] \Big|_{\bar{r}=0}, \quad (3.17)$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{grad}_{\bar{r}} \rho(\bar{r})}{\rho(\bar{r})} + 2 \frac{\text{grad}_{\bar{r}} b(\bar{r})}{b(\bar{r})} \right) \Big|_{\bar{r}=0} \quad (3.18)$$

§ 4. Лучевые ряды и процедура определения начальных данных

I. Вне малой окрестности источника поле ищется в виде сумм продольного и поперечного лучевого рядов

$$\bar{u}(\bar{r}; \omega) \sim \bar{U}^a(\bar{r}; \omega) + \bar{U}^b(\bar{r}; \omega), \quad (4.1)$$

$$\bar{U}^a \sim e^{i\omega \tau^a(\bar{r})} \sum_{m \geq 0} \frac{\bar{U}^{am}(\bar{r})}{(-i\omega)^{m-1}}, \quad \bar{U}^b \sim e^{i\omega \tau^b(\bar{r})} \sum_{m \geq 0} \frac{\bar{U}^{bm}(\bar{r})}{(-i\omega)^{m-1}} \quad (4.2)$$

Приведем формулы лучевого метода [3].

Пусть $\tau^a(\bar{r}) \geq 0$, $\tau^b(\bar{r}) \geq 0$ - эйконалы, соответствующие центральным полям лучей, вышущих из источника, $\bar{v}^a(\bar{r})$ и $\bar{v}^b(\bar{r})$ - единичные векторы, касательные в источнике к проходящему через \bar{r} лучу, соответственно, продольному и поперечному. Обозначим через $\gamma^a(\bar{r})$ и $\gamma^b(\bar{r})$ геометрические расхождения, нормированные так, что

$$\gamma^{a,b}(\bar{r}) = |\bar{r}|^2 + O(|\bar{r}|^3), \quad |\bar{r}| \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Пусть $\vec{p} = \nabla \tau$, а

$$\vec{M}(\vec{u}) = (\lambda + \mu) [\langle \nabla, \vec{u} \rangle \vec{p} + \nabla \langle \vec{u}, \vec{p} \rangle] + \mu [\vec{u} \langle \nabla, \vec{p} \rangle + 2 \langle \vec{u}, \nabla \rangle \tau] + \nabla \lambda \langle \vec{u}, \vec{p} \rangle + \langle \nabla \mu, \vec{u} \rangle \vec{p} + \langle \nabla \mu, \vec{p} \rangle \vec{u}. \quad (4.4)$$

Полагая в (4.4) $\tau = \tau^a$, будем писать $\vec{M} = \vec{M}^a$, а если $\tau = \tau^b$, то $\vec{M} = \vec{M}^b$.

Как известно, [3], из уравнения $\vec{L}(\vec{u}) = 0$ следует, что

$$\vec{U}^{a0} = \sqrt{\frac{a}{\rho \gamma^a}} \psi^0(\vec{r}^a) \nabla \tau^a; \quad (4.5)$$

$$\vec{U}^{a1} = \vec{U}^{a1\parallel} + \vec{U}^{a1\perp}; \quad \vec{U}^{a1\parallel} \nabla \tau, \quad \vec{U}^{a1\perp} \perp \nabla \tau; \quad (4.6)$$

$$\vec{U}^{a1\perp} = a^2 \rho^{-1} (b^2 - a^2)^{-1} \vec{M}^a(\vec{U}^{a0}), \quad (4.7)$$

$$\vec{U}^{a1\parallel} = \sqrt{\frac{a}{\rho \gamma^a}} \left\{ \psi^1(\vec{r}^a) - \int_0^{\tau^a} \frac{a^2}{2\rho} \sqrt{\frac{\rho}{a}} \left[\vec{M}^a(\vec{U}^{a1\perp}) - \vec{L}(\vec{U}^{a0}) \right] \nabla \tau^a d\tau^a \right\} \nabla \tau^a, \quad (4.8)$$

причем интегрирование ведется вдоль продольного луча, а интеграл понимается в смысле конечной части.

Функции угловых переменных ψ^0 и ψ^1 , называемые начальными данными нулевого и первого приближения для продольной волны, остаются произвольными, и должны выбираться в зависимости от источника.

Для поперечной волны получаются следующие формулы [3]

$$\vec{U}^{b0} = \frac{1}{\sqrt{\rho b \gamma^b}} \vec{H}(\vec{\chi}^0) \quad (4.9)$$

где \vec{H} - оператор вращения поляризации вокруг луча. В базисе, образованном касательной, нормалью и бинормалью к поперечному лучу, $H_{ij} = H_{ji} = 0$, $j = 1, 2, 3$; $H_{22} = H_{33} = \cos \Theta$, $H_{32} = -H_{23} = \sin \Theta$, $\Theta = - \int_0^{\tau^b} T^b d\tau^b$, причем T - кручение поперечного луча, вдоль которого ведется интегрирование. Далее,

$$\vec{U}^{b1} = \vec{U}^{b1\parallel} + \vec{U}^{b1\perp}, \quad \vec{U}^{b1\parallel} \perp \nabla \tau^b, \quad \vec{U}^{b1\perp} \parallel \nabla \tau^b; \quad (4.10)$$

$$\vec{U}^{b1\perp} = b^2 \rho^{-1} (a^2 - b^2)^{-1} \vec{M}^b(\vec{U}^{b0}), \quad (4.11)$$

$$\vec{U}^{b1\parallel} = \frac{1}{\sqrt{\rho b \gamma^b}} \vec{H}(\vec{\chi}^1(\vec{r}^b)) + \int_0^{\tau^b} \frac{\sqrt{\rho b \gamma^b}}{2\rho} \vec{H}^+(\vec{f}) d\tau^b. \quad (4.12)$$

Здесь $\vec{j} = \vec{L}(\vec{U}^{b_0}) - \vec{M}^b(\vec{U}^{b_{11}})$, а матрица \vec{H}^+ отличается от \vec{H} двумя матричными элементами: $H_{23}^+ = -H_{32}^+ = -H_{23}$.

Не определяемые из уравнения $\vec{L}(\vec{u}) = 0$ векторы $\vec{\chi}^0(\vec{r}^b)$ и $\vec{\chi}^1(\vec{r}^b)$, которые называются начальными данными нулевого и первого приближения для поперечной волны, можно считать перпендикулярными к $\nabla\tau^b$.

2. Перейдем к краткому описанию перестройки лучевых рядов вблизи источника и сшивания их с внутренним разложением, приводящего к определению начальных данных [7], [8].

При $|\vec{r}| \rightarrow 0$ амплитуды \vec{U}^{cm} и фазы τ^{cm} в лучевых формулах (4.2) (значок с заменяет a или b) имеют поведение [8]*

$$\vec{U}^{cm}(\vec{r}) \sim \sum_{m \geq 0} \vec{U}_{-1-m}^{cm}(\vec{r}) \sim \sum_{m \geq 0} \omega^{-1-m} \vec{U}_{-1-m}^{cm}(\vec{R}), \quad (4.13)$$

$$\omega\tau^c(\vec{r}) \sim \omega \{ \tau_1^c(\vec{r}) + \tau_2^c(\vec{r}) + \dots \} = \tau_1^c(\vec{R}) + \omega^{-1} \tau_2^c(\vec{R}) + \dots, \quad (4.14)$$

$$\tau_1^a = \alpha R, \quad \tau_1^b = \beta R, \quad (4.15)$$

причем функции \vec{U}_n^{cm} и τ_n^c однородны степени n.

Сохраняя в экспонентах члены $i\omega\tau_1^c$, а остальные разлагая в тейлоровские ряды, получаем [7], [8]

$$\vec{u}(\vec{r}; \omega) \sim \omega^2 \sum_{i \geq 0} \omega^{-i} \vec{v}^i(\vec{R}), \quad (4.16)$$

$$\vec{v}^i(\vec{R}) = e^{i\alpha R} \sum_{m \leq m_0(j)} \vec{w}_m^{aj}(\vec{R}) + e^{i\beta R} \sum_{m \leq m_0(j)} \vec{w}_m^{bj}(\vec{R}), \quad (4.17)$$

где \vec{w}_m^{cj} однородны степени m, $m_0(j) < +\infty$.

В [8] доказан аналог "леммы единственности" [6], утверждающий, что ряды (4.16) и (1.1) совпадают, если начальные данные лучевых рядов выбраны так, что

$$\vec{\pi}^a(\vec{v}^m) = \vec{\pi}^a(\vec{V}^m), \quad \vec{\pi}^b(\vec{v}^m) = \vec{\pi}^b(\vec{V}^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

3. С помощью (4.1), (4.2), (4.13)-(4.15) можно проследить, что все ненулевые функции \vec{w}_i^{c0} и \vec{w}_i^{aj} в (4.16)-(4.17) таковы

$$\vec{w}_i^{c0}(\vec{R}) = i^{i+1} \vec{U}_{-1-i}^{cj}(\vec{R}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.19)$$

* В [8] установлено отсутствие логарифмов [5] в асимптотике \vec{U}^{cm} при $|\vec{r}| \rightarrow 0$.

$$\vec{w}_{-1}^{c0}(\vec{R}) = \vec{U}_{-1}^{c1}(\vec{R}) + i\tau_2^c(\vec{R})\vec{U}_{-3}^{c2}(\vec{R}); \quad (4.20)$$

$$\vec{w}_j^{c1}(\vec{R}) = i^j \vec{U}_{-1-j}^{c,1+j}(\vec{R}), \quad j=1,2,\dots \quad (4.21)$$

Пусть за счет выбора Ψ^0 и $\vec{\chi}^0$ удалось добиться выполнения (4.18) для $m=0$. Тогда $\vec{v}^0 = \vec{V}^0$, а отсюда, в случае источников (0.5) и (0.6) из (2.1), (3.1) следует, что $\vec{w}_{-3}^{c0} = \vec{w}_{-4}^{c0} = \dots = 0$. Вследствие (4.19)

$$\vec{U}_{-3}^{c2} \equiv 0 \quad (4.22)$$

Поэтому

$$\vec{p}^a(\vec{v}) = \vec{p}^a(e^{i\alpha R} \vec{U}_{-1}^{a1}), \quad \vec{p}^b(\vec{v}) = \vec{p}^b(e^{i\beta R} \vec{U}_{-1}^{b1}). \quad (4.23)$$

Наконец, из формул (4.3)-(4.12) легко вывести, что

$$\vec{p}^a(e^{i\alpha R} \vec{U}_{-1}^{am}(\vec{R})) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho^0} \Psi^m(\vec{s}) \vec{s} A, \quad m=0,1; \quad (4.24)$$

$$\vec{p}^b(e^{i\beta R} \vec{U}_{-1}^{bn}(\vec{R})) = \frac{1}{\sqrt{2}\rho^0} \vec{\chi}^n(\vec{s}) B, \quad n=0,1. \quad (4.25)$$

При $m>1$, $n>1$ (а для других источников - и при $m=1$, $n=1$) эти формулы, вообще говоря, не справедливы.

С помощью (4.18), (4.23)-(4.25), (2.2), (2.8), (3.2), (3.16) трудно выписать функции Ψ^0 и Ψ^1 для (0.5) и $\vec{\chi}^0$ и $\vec{\chi}^1$ для (0.6).

§ 5. Сводка начальных данных

I. В случае центра расширения (0.5)

$$\Psi^0(\vec{s}) = a^{-5/2}(0) \rho^{-1/2}(0), \quad (5.1)$$

$$\Psi^1(\vec{s}) = a^{-3/2}(0) \rho^{-1/2}(0) \left\langle \frac{\text{grad}_{\vec{r}} \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} \Big|_{\vec{r}=0}, \vec{s} \right\rangle, \quad (5.2)$$

$\vec{\chi}^0(\vec{s}) \equiv 0$, а выражение для $\vec{\chi}^1$ приведено в [1], [8] (в [8] принята другая нормировка) ж).

ж) При нормировке, соответствующей параметризации углов выхода сферических координатами Ψ, ϑ , (4.3) заменяется на $\Psi^{a,b}(\vec{r}) = |\vec{r}|^2 \sin \vartheta + O(|\vec{r}|^3)$, а правые части (5.1)-(5.5) следует домножить на $\sqrt{\sin \vartheta}$.

2. В случае центра вращения (0.6)

$$\vec{\chi}^0(\vec{s}) = b^{-5/2}(0) \rho^{-1/2}(0) [\vec{s}, \vec{e}_1], \quad (5.3)$$

$$\vec{\chi}^1(\vec{s}) = b^{-3/2}(0) \rho^{-1/2}(0) \{ \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{s} \rangle \vec{s} + \langle \vec{z}, \vec{s} \rangle [\vec{s}, \vec{e}_1] \}, \quad (5.4)$$

где \vec{y} и \vec{z} определены в (3.16), (3.17); $\Psi^0(\vec{s}) \equiv 0$, а функция $\Psi^1(\vec{s})$ выписана (для другой нормировки) в [8].

Литература

1. Киселев А.П., Фролова Е.Н. Поперечная волна от ненаправленного источника в неоднородной упругой среде. - Изв.АН СССР, Физика Земли, 1982, № 5, с.3-10.
2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. "Нелучевые эффекты" в теории распространения сейсмических волн. - Докл. АН СССР, 1982, т.267, № 5, с.1079-1083.
3. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. - Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. - В кн.: Вопр.динам.теории распр.сейсм.волн, 1961, т.5, с.3-24.
4. Киселев А.П. Малый сферический излучатель в неоднородной упругой среде. - Изв.АН СССР, Механика твердого тела, 1982, № 4, с.III-126.
5. Avila G.S.S., Keller J.B. The high-frequency asymptotic field of a point source in an inhomogeneous medium. - Comm.Pure Appl.Math., 1961, v.26, N 4, p.362-382.
6. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л., 1974.
7. Киселев А.П. О высокочастотных точечных источниках в неоднородных изотропных упругих средах. - Докл.АН СССР, 1974, т.219, № 4, с.829-831..
8. Киселев А.П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных упругих средах. - В кн.: Вопр.дин.теории распр.сейсм.волн, 1975, т.15, с.6-27.
9. Киселев А.П. Высокочастотные точечные источники в неоднородной упругой среде. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн.II. - Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1980, т.99, с.28-42.