



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Яхно, Линеаризованная многомерная обратная задача Лэмба, *Докл. АН СССР*, 1984, том 276, номер 2, 314–318

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

11 февраля 2025 г., 23:38:36



• При $y = 0$ ряд (11), вообще говоря, не сходится по норме пространства $W_{2,U}^{7/2}$ к функции $u(x, 0) = \varphi_0(x)$. Также ряд, получающийся из (11) почленным дифференцированием по y , не сходится по норме $W_{2,U}^{5/2}$ к функции $u'_y(x, 0) = \varphi_1(x)$. Однако, как и в статическом случае (при $\omega = 0$), заведомо можно гарантировать сходимость этих рядов по метрике пространств $W_{2,U}^1, L_2$ соответственно (см. [15]). При этом используется [14], что соответствующая краевая задача почти регулярна порядка 2.

Можно привести примеры задач, когда коэффициенты уравнения (1) есть дифференциальные операторы в частных производных, и переформулировать для них теоремы 1, 4. Однако получить в таких задачах дополнительную информацию о базисных свойствах соответствующих систем весьма сложно.

Автор благодарит проф. А.Г. Костюченко за обсуждение работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
30 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. – Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 2, с. 38.
2. Костюченко А.Г., Образов М.Б. Тр. семинара им. И.Г. Петровского, 1981, т. 6, с. 97.
3. Образов М.Б. Докт. дис. М.: МГУ, 1983.
4. Шкаликов А.А. – УМН, 1983, т. 38, № 3, с. 92.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
6. Агранович М.С., Вишик М.И. – УМН, 1964, т. 19, № 3, с. 53.
7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
8. Мирзоев С.С. – Функц. анализ и его прилож., 1983, т. 17, № 2, с. 84.
9. Келдыш М.В. – УМН, 1971, т. 26, № 4, с. 15.
10. Шкаликов А.А. В сб.: Тез. докл. республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям. Ашхабад, 1978, с. 132.
11. Шкаликов А.А. – Матем. заметки, 1981, т. 30, № 3, с. 371.
12. Гасымов М.Г. – ДАН, 1971, т. 200, № 1, с. 13–16.
13. Евзеров И.Д. – Матем. заметки, 1977, т. 21, № 6, с. 835.
14. Шкаликов А.А. – Тр. семинара им. И.Г. Петровского, 1983, т. 9, с. 190.
15. Шкаликов А.А. В кн.: Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск, 1982.

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В.Г. ЯХНО

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЛЭМБА

(Представлено академиком М.М. Лаурентьевым 1 VI 1983)

Основное содержание настоящей работы составляют теоремы о необходимых и достаточных условиях существования и об оценках устойчивости решения линеаризованной многомерной обратной задачи Лэмба. Вопросы единственности и устойчивости решения подобных задач рассматривались ранее В.Г. Романовым [1, 2], Е.А. Волковой [3].

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, t \in R, (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in R^3, T, r, X$ – фиксированные положительные числа;

$$\Lambda_1 = \{(\mu(x_3), \rho(x_3), \lambda(x_3)) \in C^5 [0, \infty) \mid \mu'(+0) = \rho'(+0) = \lambda'(+0) = 0, \\ \mu(x_3) > 0, \rho(x_3) > 0, \lambda(x_3) + \mu(x_3) > 0\};$$

$\tilde{\rho}(\nu_1, \nu_2, x_3)$ будет функцией класса $\tilde{\Lambda}(r, X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\rho}(\nu_1, \nu_2, x_3) \in C(R^2 \times [0, \infty)) \cap C(R^2; C^2[0, \infty))$ и для фиксированного $x_3 \in [0, X]$

$$\text{supp } \tilde{\rho}(\nu_1, \nu_2, x_3) \subset S_r = \{(\nu_1, \nu_2) \in R^2 \mid \nu_1^2 + \nu_2^2 \leq r^2\}; \quad .$$

$\rho(x)$ будет функцией из класса $\Lambda(r, X)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\rho}(\nu_1, \nu_2, x_3) = F_{x_1, x_2}[\rho(x)](\nu_1, \nu_2, x_3) \in \tilde{\Lambda}(r, X)$. При этом оператор преобразования Фурье F_{x_1, x_2} по переменным x_1, x_2 есть линейный изоморфизм $\Lambda(r, X)$ на $\tilde{\Lambda}(r, X)$. Вектор-функция $(\mu_0(x_3), \rho_0(x_3), \lambda_0(x_3)) \in \Lambda_1$ считается известной, а $\mu_1(x), \rho_1(x), \lambda_1(x)$ — функции из класса $\Lambda(r, X)$. В дальнейшем будем использовать также следующие обозначения:

$$\sigma_j^{lms} = (\sigma_{j1}^{lms}, \sigma_{j2}^{lms}, \sigma_{j3}^{lms}), \quad \sigma_{jk}^{lms} = \mu_l(\partial u_j^{ms}/\partial x_k + \partial u_k^{ms}/\partial x_j) + \lambda_l \delta_{jk} \text{div } \mathbf{u}^{ms},$$

$$\mathbf{u}^{ms} = (u_1^{ms}, u_2^{ms}, u_3^{ms}), \quad L^l = (L_1^l, L_2^l, L_3^l); \quad L_j^l \mathbf{u}^{ms} = \text{div}(\sigma_j^{lms}),$$

$\delta_{j,k}$ — символ Кронекера; $j = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3; l = 0, 1; s = 2, 3; m = 0, 1; \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0, t)$ — дельта-функция Дирака. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \rho_0(x_3) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{1s}}{\partial t^2} - L^0 \mathbf{u}^{1s} = L^1 \mathbf{u}^{0s} - \rho_1(x) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{0s}}{\partial t^2}, \quad x_3 > 0,$$

со следующими условиями:

$$(2) \quad \mathbf{u}^{1s} \Big|_{t < 0} = 0, \quad \sigma_3^{01s} \Big|_{x_3 = +0} = 0,$$

где $\mathbf{u}^{0s} = \mathbf{u}^{0s}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3, t, x_3^0)$ есть решение задачи

$$(3) \quad \rho_0(x_3) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{0s}}{\partial t^2} - L^0 \mathbf{u}^{0s} = e_s \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0, t), \quad x_3 > 0,$$

$$(4) \quad \mathbf{u}^{0s} \Big|_{t < 0} = 0, \quad \sigma_3^{00s} \Big|_{x_3 = +0} = 0,$$

e_s — s -й базисный вектор в R^3 ; $s = 2, 3$.

Задачу построения обобщенной функции \mathbf{u}^{0s} , удовлетворяющей равенствам (3), (4), называют прямой задачей Лэмба для $\lambda = \lambda_0(x_3), \mu = \mu_0(x_3), \rho = \rho_0(x_3)$, а задачу построения обобщенной функции \mathbf{u}^{1s} , удовлетворяющей равенствам (1), (2), — прямой линеаризованной задачей Лэмба.

З а м е ч а н и е. Можно определить классы обобщенных функций $\mathcal{U}_s \subset C_{x_3^0}([0, \infty); \mathcal{D}'(R^4))$, $\mathcal{U}_s^1 \subset C_{x_3^0}([0, \infty); \mathcal{D}'(R^6))$, в которых существуют единственные функции $\mathbf{u}^{0s}(y_1, y_2, x_3, t, x_3^0) \in \mathcal{U}_s, \mathbf{u}^{1s}(x, t, x^0) \in \mathcal{U}_s^1$ такие, что $\mathbf{u}^{0s}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3, t, x_3^0)$ — решение задачи (3), (4), а $\mathbf{u}^{1s}(x, t, x^0)$ — решение задачи (1) (2), $s = 2, 3$. Эти классы определены так, что оператор преобразования Фурье F_{y_1, y_2} есть линейный изоморфизм. \mathcal{U}_s на $\tilde{\mathcal{U}}_s$ ($\tilde{\mathcal{U}}_s = F_{y_1, y_2} \mathcal{U}_s$), а оператор преобразования Фурье $F_{x_1, x_2, x_1^0, x_2^0}$ — линейный изоморфизм \mathcal{U}_s^1 на $\tilde{\mathcal{U}}_s^1$ ($\tilde{\mathcal{U}}_s^1 = F_{x_1, x_2, x_1^0, x_2^0} \mathcal{U}_s^1$). При этом обобщенная функция $\tilde{\mathbf{u}}^{0s}(\kappa_1, \kappa_2, x_3, t, x_3^0) \in \tilde{\mathcal{U}}_s$ непрерывна по κ_1, κ_2, x_3 , а обобщенная функция $\tilde{\mathbf{u}}^{1s}(\nu_1, \nu_2, x_3, t, \kappa_1, \kappa_2, x_3^0) \in \tilde{\mathcal{U}}_s^1$ непрерывна по $\nu_1, \nu_2, x_3, \kappa_1, \kappa_2$ (о понятии обобщенных функций, гладких по части переменных, см., например, [4]). Строгое определение классов $\mathcal{U}_s, \mathcal{U}_s^1, s = 2, 3$, громоздко, поэтому опущено.

$$\text{Пусть, далее } \tau_p(x_3) = \int_0^{x_3} (1/v_p(\xi)) d\xi; v_p(\xi) = [(\lambda_0(\xi) + 2\mu_0(\xi))/\rho_0(\xi)]^{1/2}; \quad \tau_p^{-1} -$$

функция, обратная к τ_p ; $X = \tau_p^{-1}(T/2)$.

Обратная задача 0. Определить функции $\mu_1(x), \rho_1(x), \lambda_1(x)$ из класса $\Lambda(r, X)$, для которых имеют место при $t \in [0, T], (\kappa_1, \kappa_2) \in R^2, (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ следующие равенства:

$$(5) \quad F_{x_1, x_2, x_1^0, x_2^0} [u_1^{1s}] |_{x_3^0=+0, x_3=\nu_1=\kappa_2=0} = h_s(t, \kappa_1, \nu_2), \quad s = 2, 3,$$

$$(6) \quad F_{x_1, x_2, x_1^0, x_2^0} [u_3^{13}] |_{x_3^0=+0, x_3=\nu_1=\nu_2=0} = h_1(t, \kappa_1, \kappa_2),$$

где $F_{x_1, x_2, x_1^0, x_2^0}$ — оператор преобразования Фурье по x_1, x_2, x_1^0, x_2^0 ; $\nu_1, \nu_2, \kappa_1, \kappa_2$ — параметрам преобразования Фурье; $u_j^{1s} - j$ — компонента решения $u^{1s} \in \mathcal{U}_s^1$ прямой линеаризованной задачи Лэмба (1), (2); $h_1(t, \kappa_1, \kappa_2), h_s(t, \kappa_1, \nu_2), s = 2, 3$, — заданные при $t \in [0, T], (\kappa_1, \kappa_2) \in R^2, (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ функции.

Решение обратной задачи сводится к последовательному решению следующих обратных задач.

Обратная задача 1. Пусть $\mu_1(x), \rho_1(x), \lambda_1(x) \in \Lambda(r, X)$, входящие в равенства (1), суть неизвестные функции. Определить $\mu_1(x) \in \Lambda(r, X)$, для которой при $t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$ имеет место равенство (5) при $s = 2$, где $h_2(t, \kappa_1, \nu_2)$ — заданная функция.

Обратная задача 2. Пусть $\mu_1(x), \rho_1(x), \lambda_1(x) \in \Lambda(r, X)$, входящие в равенство (1), такие, что $\rho_1(x), \lambda_1(x)$ — неизвестные, а $\mu_1(x)$ — известная функции. Определить функцию $\rho_1(x) \in \Lambda(r, X)$, для которой при $t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$ имеет место равенство (5) при $s = 3$, где $h_3(t, \kappa_1, \nu_2)$ — заданная функция.

Обратная задача 3. Пусть $\mu_1(x), \rho_1(x) \in \Lambda(r, X)$, входящие в равенство (1), суть известные функции, а $\lambda_1(x) \in \Lambda(r, X)$ — неизвестная функция. Определить функцию $\lambda_1(x) \in \Lambda(r, X)$, для которой при $t \in [0, T], (\kappa_1, \kappa_2) \in R^2$ имеет место равенство (6), где $h_1(t, \kappa_1, \kappa_2)$ — заданная функция.

В следующих теоремах T, r — фиксированные положительные числа; $X = \tau_p^{-1}(T/2); (\mu_0(x_3), \rho_0(x_3), \lambda_0(x_3)) \in \Lambda_1$ — известная вектор-функция; $\tau(x_3) = \int_0^{x_3} (1/v(\xi)) d\xi, v(\xi) = [\mu_0(\xi)/\rho_0(\xi)]^{1/2}; \tau^{-1}$ — функция, обратная к τ ; функция $s_0(t)$

определяется как корень $\xi = s_0(t)$ уравнения $t - \xi = \tau_p(\tau^{-1}(\xi)); u^{0s}(x, t, +0) \in \mathcal{U}_s$ — функция такая, что $u^{0s}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3, t, +0)$ — решение задачи (3), (4) при $x_3^0 = +0$, а $\tilde{u}^{0s}(\kappa_1, \kappa_2, x_3, t) = F_{x_1, x_2} [u^{0s}](\kappa_1, \kappa_2, x_3)$;

$$\|H(t, \nu_1, \nu_2)\| (T, r) = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{(\nu_1, \nu_2) \in S_r} |H(t, \nu_1, \nu_2)|.$$

Теорема 1. Для существования функции $\mu_1(x) \in \Lambda(r, X)$, являющийся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, \tau^{-1}(T/2)]$ единственным решением обратной задачи 1, отвечающим заданной информации $h_2(t, \kappa_1, \nu_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$, необходимо и достаточно, чтобы $h_2(t, \kappa_1, \nu_2)$ удовлетворяла условиям:

$$h_2(t, \kappa_1, \nu_2) / (\kappa_1 \nu_2) = H_2(t, \kappa_1, \nu_2) \in C_{\kappa_1, \nu_2}(R^2; C^4[0, T]) \cap C([0, T] \times R^2),$$

$$H_2(+0, \kappa_1, \nu_2) = \frac{\partial}{\partial t} H_2(t, \kappa_1, \nu_2) \Big|_{t=+0} = 0, \quad (\kappa_1, \nu_2) \in R^2;$$

$$H_2(t, \kappa_1, \nu_2) = 0, \quad \kappa_1^2 + \nu_2^2 > r^2, \quad t > 0.$$

Теорема 2. Пусть $\mu_1(x), \hat{\mu}_1(x) \in \Lambda(r, X)$ — функции, являющиеся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, \tau^{-1}(T/2)]$ решениями обратной задачи 1, отвечающими информацией $h_2(t, \kappa_1, \nu_2), \hat{h}_2(t, \kappa_1, \nu_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$.

Тогда имеет место оценка

$$\max_{x_3 \in [0, \tau^{-1}(T/2)]} \iint_{R^2} |\mu_1(x) - \hat{\mu}_1(x)|^2 dx_1 dx_2 \leq C_1 \| \hat{H}_2 - H_2 \|^2 (T, r),$$

где C_1 – некоторая константа, зависящая от величин T, r и заданной вектор-функции $(\mu_0(x_3), \rho_0(x_3), \lambda_0(x_3))$;

$$H_2(t, \kappa_1, \nu_2) = h_2(t, \kappa_1, \nu_2)/(\kappa_1 \nu_2), \quad \hat{H}_2(t, \kappa_1, \nu_2) = \hat{h}_2(t, \kappa_1, \nu_2)/(\kappa_1 \nu_2).$$

Т е о р е м а 3. Для существования функции $\rho_1(x) \in \Lambda(r, X)$, являющейся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, \tau^{-1}(s_0(T))]$ единственным решением обратной задачи 2, отвечающим заданной информации $h_3(t, \kappa_1, \nu_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$, необходимо и достаточно, чтобы $h_3(t, \kappa_1, \nu_2)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$[h_3(t, \kappa_1, \nu_2) - U(\nu_2, 0, t, \kappa_1, 0)]/\kappa_1 = H_3(t, \kappa_1, \nu_2) \in C([0, T] \times R^2) \cap$$

$$C_{\kappa_1, \nu_2}(R^2; C^3[0, T]);$$

$$H_3(+0, \kappa_1, \nu_2) = 0, (\kappa_1, \nu_2) \in R^2; H_3(t, \kappa_1, \nu_2) = 0, \kappa_1^2 + \nu_2^2 > r^2, t > 0.$$

Здесь $U(\nu_2, x_3, t, \kappa_1, \kappa_2)$ – четная по x_3 функция, являющаяся решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \rho_0 U_{tt} - \mu_0 U_{x_3 x_3} - \mu'_0 U_{x_3} + \nu_2^2 \mu_0 U &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{\mu}_1(x_1, \nu_2 + \kappa_2, x_3) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{y}_1^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t) + i \kappa_1 \tilde{y}_3^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t) \right) \right] - \\ &- \nu_2 \tilde{\mu}_1(\kappa_1, \nu_2 + \kappa_2, x_3) (\kappa_2 \tilde{y}_1^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t) + \kappa_1 \tilde{y}_2^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t)), \\ U|_{t < 0} &= 0, \end{aligned}$$

где $\mu_1(x) \in \Lambda(r, X)$ – заданная функция, а $\tilde{\mu}_1(\nu_1, \nu_2, x_3) = F_{x_1, x_2}[\mu_1(x)](\nu_1, \nu_2, x_3)$.

Т е о р е м а 4. Пусть $\rho_1(x), \hat{\rho}_1(x) \in \Lambda(r, X)$ – функции, являющиеся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, \tau^{-1}(s_0(T))]$ решениями обратной задачи 2, отвечающими информациям $h_3(t, \kappa_1, \nu_2), \hat{h}_3(t, \kappa_1, \nu_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \nu_2) \in R^2$.

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \max_{x_3 \in [0, \tau^{-1}(s_0(T))]} \iint_{R^2} |\rho_1(x) - \hat{\rho}_1(x)|^2 dx_1 dx_2 &\leq \\ &\leq C_2 \left\| \frac{\partial}{\partial t} [h_3(t, \kappa_1, \nu_2) - \hat{h}_3(t, \kappa_1, \nu_2)]/\kappa_1 \right\|^2 (T, r), \end{aligned}$$

где C_2 – некоторая константа, зависящая от величин T, r и вектор-функции $(\mu_0(x_3), \rho_0(x_3), \lambda_0(x_3))$.

Т е о р е м а 5. Для существования функции $\lambda_1(x) \in \Lambda(r, X)$, являющейся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, X]$ единственным решением обратной задачи 3, отвечающим заданной информации $h_1(t, \kappa_1, \kappa_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \kappa_2) \in R^2$, необходимо и достаточно, чтобы $h_1(t, \kappa_1, \kappa_2)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$h_1(t, \kappa_1, \kappa_2) - V(0, t, \kappa_1, \kappa_2) = H_1(t, \kappa_1, \kappa_2) \in C(R^2; C^2[0, T]) \cap$$

$$\cap C([0, T] \times R^2);$$

$H_1(t, \kappa_1, \kappa_2) = 0$ при $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 > r^2, t > 0$. Здесь $V(x_3, t, \kappa_1, \kappa_2)$ – четная по x_3 функ-

ция, являющаяся решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \rho_0 V_{tt} - (\lambda_0 + 2\mu_0) V_{x_3 x_3} - (\lambda'_0 + 2\mu'_0) V_{x_3} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\tilde{\mu}_1(\kappa_1, \kappa_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3} \tilde{u}_3^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t) \right] + \\ & + \tilde{\rho}_1(\kappa_1, \kappa_2, x_3) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}_3^{03}(-\kappa_1, -\kappa_2, x_3, t), \end{aligned}$$

$$V \Big|_{t < 0} = 0,$$

где $\rho_1(x) \in \Lambda(r, X)$ — заданная функция, а $\tilde{\rho}_1(\kappa_1, \kappa_2, x_3) = F_{x_1, x_2}[\rho]$; функция $\tilde{\mu}_1(\kappa_1, \kappa_2, x_3)$ определяется аналогично через заданную функцию $\mu_1(x) \in \Lambda(r, X)$.

Теорема 6. Пусть $\lambda_1(x), \hat{\lambda}_1(x) \in \Lambda(r, X)$ — функции, являющиеся при $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, X]$ решениями обратной задачи 3, отвечающими информации $h_1(t, \kappa_1, \kappa_2), \hat{h}_1(t, \kappa_1, \kappa_2), t \in [0, T], (\kappa_1, \kappa_2) \in R^2$.

Тогда имеет место оценка

$$\max_{x_3 \in [0, X]} \iint_{R^2} |\lambda_1(x) - \hat{\lambda}_1(x)|^2 dx_1 dx_2 \leq C_3 \|h_1 - \hat{h}_1\|^2(T, r),$$

где C_3 — некоторая константа, зависящая от величин T, r и вектор-функции $(\mu_0(x_3), \rho_0(x_3), \lambda_0(x_3))$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 VI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Г. В кн.: Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1983, с. 170–192.
2. Романов В.Г., Волкова Е.А. — ДАН, 1982, т. 267, № 4, с. 780–783.
3. Волкова Е.А. В кн.: Вопросы корректности обратных задач математической физики. Новосибирск, 1982, с. 62–68.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976, с. 280.