А. И. Бобенко, Конечнозонные решения на языке автоморфных функций. Уравнение Кадомцева–Петвиашвили, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 129, 5–16

А.И.Бобенко

# КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ НА ЯЗЫКЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ. УРАВНЕНИЕ КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ

## § I. Введение

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx})\right), \tag{I}$$

выведенное в 1970 году [I] является естественным двумерным аналогом уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Степень универсальности физического вывода уравнения КП для волн в средах с дисперсией такая же, как и уравнения КдФ.

Известен целый ряд классов точных решений уравнения КП, обладающих замечательными математическими свойствами. В частности, в 1976 году И.М.Кричевером [2] была предложена схема интегрирования уравнения КП, основанная на найденном им красивом обобщении алгеброгеометрической схемы интегрирования уравнения КдФ, построенной в работах [3-5]. Ему удалось построить широкий класс периодических и условно периодических решений уравнения (I), получивших название конечнозонных, по аналогии с соответствующими решениями уравнения КдФ (операторы Шредингера с конечнозонными решениями уравнения КдФ в качестве потенциалов имеют спектр с конечным числом лакун). Эти решения уравнения КП, так же, как и аналогичные решения других нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния, традиционно выражаются через $\theta$-функции Римана.

В настоящей работе мы, используя теорию униформизации римановых поверхностей, получаем выражение для конечнозонных решений уравнения КП в терминах тэта-рядов Пуанкаре.

## § 2. Функция Бейкера-Ахиезера. Решения уравнения КП в $\theta$-функциях Римана

Все построение конечнозонных решений уравнения КП базируется на хорошо известной теории так называемой функции Бейкера-Ахиезера, краткое содержание которой мы и приведем в этом параграфе, отсылая за подробным изложением к работам [2,6].

Рассмотрим произвольную риманову поверхность $\Gamma$ рода $g$ с фиксированным каноническим базисом ориентированных циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$. Существует ровно $g$ голоморфных абелевых дифференциалов или, как их называют по-другому, абелевых дифференциалов первого рода $dU_k$, $k=1,\dots,g$, т.е. дифференциалов, представимых в окрестности любой точки $P\in\Gamma$ в виде $dU_k(z)=f(z)\,dz$, где $z$ - локальная координата в окрестности $P$, а $f(z)$ - голоморфная в окрестности $P$ функция. Абелевы интегралы первого рода определяются естественным образом:

$$U_k(P)=\int_{P_0}^{P} dU_k .$$

Это неоднозначные функции на $\Gamma$, которые характеризуются своими $a$ и $b$-периодами

$$A_{ik}=\oint_{a_i} dU_k \;, \qquad B_{ik}=\oint_{b_i} dU_k .$$

Базис голоморфных абелевых интегралов $U_1,\dots,U_g$ называется нормированным в каноническом базисе циклов $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g$, если $A_{ik}=\delta_{ik}$. В этом случае характеристикой римановой поверхности $\Gamma$ выступает $(g\times g)$ матрица $b$-периодов интегралов $U_1,\dots,U_g$, которую мы обозначим за $B$. Еще из классических работ Римана известно, что $B$ -симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью, поэтому корректно определена $\theta$ -функция Римана

$$\theta(\vec{x}|B)=\sum_{\vec{m}\in Z^g} \exp\{\pi i(B\vec{m},\vec{m})+2\pi i(\vec{x},\vec{m})\} , \qquad (2)$$

где $\vec{x}$ - $g$ -мерный вектор, а суммирование по $\vec{m}\in\mathbb{Z}^g$ означает суммирование по $g$ -мерной целочисленной решетке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Функцией Бейкера-Ахиезера (Б-А) отвечающей уравнению КП называется функция $\psi(x,y,t,P)$ на $\Gamma$, удовлетворяющая следующим условиям:

I. $\psi(x,y,t,P)$ мероморфна на $\Gamma\setminus P_0$ и имеет неспециальный дивизор полюсов $\gamma_1,\dots,\gamma_g$, не зависящий от $x,y,t$ *) (3)

2. $\psi$ имеет асимптотику

$$\psi=\Big(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(x,y,t)k^{-s}\Big)\exp(kx+k^2y+k^3t) \qquad (4)$$

при $k\to\infty$ ($P\to P_0$, $k^{-1}$ - локальная координата в окрестности $P_0$).

Легко доказывается единственность функции, удовлетворяющей условиям (3,4). Более сложным является ее явное построение, для

---

*) Это дивизор "общего положения", неспециальность его означает, что на $\Gamma$ не существует мероморфной функции с дивизором полюсов $\gamma_1,\dots,\gamma_g$.

которого нам потребуется еще понятие абелева интеграла второго рода, т.е. абелева интеграла, допускающего полюсные особенности. Определим нормированные абелевы интегралы второго рода $\Omega_1(P)$, $\Omega_2(P)$, $\Omega_3(P)$ следующими условиями:

1. $\Omega_i(P) = k^i + O(k^{-1})$, $i = 1, 2, 3$ — асимптотика этих интегралов при $P \to P_0\ (k \to \infty)$,

2. все они имеют нулевые $a$-периоды.

По этим двум условиям $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ определяются однозначно, поэтому однозначно определяются и их векторы $b$-периодов, которые мы будем обозначать соответственно $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$.

Теперь мы уже можем построить функцию $\psi(x, y, t, P)$

$$\psi(x,y,t,P) = T(x,y,t)\,\frac{\theta(\vec{U}(p) - \vec{\omega}_1 x - \vec{\omega}_2 y - \vec{\omega}_3 t - \vec{D}\,|\,B)}{\theta(\vec{U}(p) - \vec{D}\,|\,B)} \times \qquad (5)$$

$$\times \exp\{\Omega_1 x + \Omega_2 y + \Omega_3 t\},$$

где $T(x,y,t)$ – нормирующий множитель, не зависящий от $P$, $\vec{U}(p) = (U_1(p), \dots, U_g(p))$, $\vec{D}$ – произвольный $g$-мерный вектор "общего положения". Пользуясь свойствами $\theta$ -функций Римана легко показать, что $\psi$ функция, определенная формулой (5), однозначна на $\Gamma$, имеет неспециальный дивизор полюсов не зависящий от $x, y, t$ и нужный вид асимптотики при $P \to P_0$.

Связь между функцией Б-А и уравнением К-П задает следующая

ТЕОРЕМА I. Функция

$$u(x,y,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x,y,t), \qquad (6)$$

где $\xi_1$ – коэффициент в разложении (4), является решением уравнения КП.

Таким образом, построив функцию Б-А, мы немедленно получаем по формуле (6) решение уравнения КП. Используя выражение (5) удается получить компактное выражение для $u(x, y, t)$:

$$u(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(\vec{\omega}_1 x + \vec{\omega}_2 y + \vec{\omega}_3 t + \vec{D}\,|\,B) + const, \qquad (7)$$

описывающее богатый класс периодических и условно-периодических физически интересных решений этого уравнения.

Целью настоящей работы является построение функции $\psi(x,y,t,p)$, удовлетворяющей условиям (3,4) в терминах автоморфных функций, и как следствие выражение конечнозонных решений уравнения КП по формуле (6) через автоморфные функции. Мы не будем стремиться к максимальной общности изложения, а рассмотрим наиболее простую ситуацию, являющуюся вместе с тем наиболее типичной. Возможные обобщения будут очевидны из самого последующего изложения.

## § 3. Абелевы интегралы как функции униформизующей переменной

Рассмотрим риманову поверхность $\Gamma$ рода $g$, заданную алгебраическим соотношением

$$P(x,y) = 0, \tag{8}$$

где $P$ – полином. Классическая теорема об униформизации утверждает, что соотношение (8) может быть явно разрешено, более того, всегда можно ввести новую переменную $z \in \mathcal{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ такую, что $x(z)$ и $y(z)$ будут автоморфными функциями от $z$ на $\mathcal{D}$ относительно некоторой группы дробно-линейных отображений $G$. Фундаментальный многоугольник $\Pi = \mathcal{D}/G$, содержащий ровно по одной точке из каждой орбиты группы $G$ имеет $m$ пар сторон, каждая из которых есть дуга окружности. Каждой паре сторон $\ell_i$ и $\ell_i'$, $i=1,\dots,m$ отвечает элемент группы $\sigma_i$, отображающий сторону $\ell_i$ на $\ell_i'$; $\sigma_i$, $i=1,\dots,m$ и являются образующими группы $G$. Понятно, что из-за того, что образующие группы можно выбрать не единственным образом, неоднозначен и выбор фундаментального многоугольника $\Pi$. На $\Pi$ можно ввести аналитическую структуру, которая превращает его в риманову поверхность рода $g$ конформно эквивалентную $\Gamma$.

В этом параграфе мы обсудим свойства абелевых интегралов первого рода как функций униформизующей переменной $z$. Рассмотрим один из них

$$I(x,y) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} g(\xi,\eta)\,d\xi \tag{9}$$

здесь $x,y$ – точка на $\Gamma$, $g(x,y)$ – рациональная функция от $x$ и $y$. Заменим в интеграле (9) $x$ и $y$ их выражениями через $z$, тогда мы получим функцию на $\mathcal{D}$, определяемую равенством:

$$I(z) = \int_{z_0}^{z} g(\xi(\lambda),\eta(\lambda))\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{z_0}^{z} g(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda,$$

где $g(\lambda)$ – автоморфная функция, а $I(z)$ – однозначная функция $z$ внутри $\mathcal{D}$. Изучим как меняется последняя при действии на аргумент элементов группы $G$. Будем обозначать за $\sigma_i z$

выражение

$$\sigma_i z = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \qquad \sigma_i \in G .$$

Тогда

$$I(\sigma_k z) = \int_{z_0}^{\sigma_k z} g(\lambda) \frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \int_{\sigma_k z_0}^{\sigma_k z} g(\lambda) \frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + \int_{z_0}^{\sigma_k z_0} g(\lambda) \frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} d\lambda =$$

$$= I(z) + S_k, \quad S_k = \int_{z_0}^{\sigma_k z_0} g(\lambda) \frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} d\lambda . \tag{10}$$

Величина $S_k$ является одним из периодов абелева интеграла $I(z)$. Таким образом, абелевы интегралы первого рода как функции $z$ не имеют особенностей на $\mathfrak{D}$ и характеризуются свойством (10).

Ограничимся с этого места рассмотрением ситуации, когда $\mathfrak{D}$ - единичный круг, а $\Pi$ имеет $4n$ сторон его род равен $n$ и сумма углов $2\pi$. Как уже отмечалось, по данной группе $G$ фундаментальный многоугольник можно выбрать не единственным образом (эта неоднозначность аналогична неоднозначности задания базиса группы гомологий римановой поверхности $\Gamma$ ). Сейчас мы опишем канонический фундаментальный многоугольник $\Pi_0$ [7], который отвечает каноническому базису циклов на $\Gamma$.

Рассмотрим многоугольник $\Pi_0$ с $4n$ сторонами и вершинами (обход периметра совершается в положительном направлении) в точках

$$a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots, a_n, b_n, c_n, d_n .$$

Для большей симметрии в обозначениях последнюю вершину будем называть и вершиной $d_n$, и вершиной $d_0$. Предположим, что сторона $d_{i-1} a_i$ сопряжена со стороной $c_i b_i$, а сторона $a_i b_i$ -со стороной $d_i c_i$. Иначе говоря, сторона с номером $4p+1$ сопряжена со стороной $4p+3$, а сторона с номером $4p+2$ - со стороной $4p+4$. Нетрудно видеть, что все вершины такого многоугольника принадлежат одному и тому же циклу, т.е. при отождествлении сопряженных сторон сливаются в одну и что род $\Pi_0$ равен $n$ [7], [8].

Рассмотрим теперь два абелевых интеграла первого рода

$$I(z) = \int^{z} g(\lambda) \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda, \quad I'(z) = \int^{z} g'(\lambda) \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda .$$

Положим

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(\lambda) \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda = I(a_i) - I(d_{i-1}) = A_i = -\int_{b_i}^{c_i} g(\lambda) \frac{d\xi}{d\lambda} d\lambda ,$$

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g'(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda = I'(a_i) - I'(d_{i-1}) = A'_i\ ,$$
$$\int_{a_i}^{b_i} g(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda = I(b_i) - I(a_i) = B_i\ ,$$
$$\int_{a_i}^{b_i} g'(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda = I'(b_i) - I'(a_i) = B'_i\ .$$
Интеграл
$$\int I'(\lambda)\,g(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda$$
вычисленный вдоль периметра $\Pi_0$, должен быть равен нулю, и вычисляя этот интеграл, учитывая то, что интегралы по сопряженным сторонам равны, мы без труда получим известное тождество
$$\sum_{i=1}^{n=g}(A_iB'_i - B_iA'_i) = 0\ ,$$
означающее, что периоды $A_i, B_i, \ldots$ нормальны.

Отсюда стандартным образом (см., например, [6] ) получаем, что всегда можно выбрать базис таких абелевых интегралов первого рода $I_1(z),\ldots,I_g(z)$ , что
$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_j(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda = I_j(a_i) - I_j(d_{i-1}) = \delta_{ij}\ ,$$
а матрица $b$ -периодов
$$B_{ij} = \int_{a_i}^{b_i} g_j(\lambda)\frac{d\xi}{d\lambda}\,d\lambda\ ,\qquad i,j = 1,\ldots,n=g \tag{II}$$
симметрична, и ее мнимая часть положительно определена.

Изучим теперь свойства абелевых интегралов второго рода, рассмотренных в § 2, $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ как функций униформизующей переменной $z$ . Очевидно, что $\mathfrak{R}_i(z)$, $i=1,2,3$ также будут характеризоваться свойством (IO). Для наших целей более удобной является нормировка этих интегралов, отличная от канонической, поэтому мы докажем, что справедлива следующая

ЛЕММА. Существует ровно один абелев интеграл второго рода $\mathfrak{R}(z)$ , удовлетворяющий условиям:

I. В фиксированной точке $z_0 \in \Pi_0$ интеграл имеет особенность вида $\mathfrak{R}(z) = (z - z_0)^{-1} + O(z - z_0)$, $z \longrightarrow z_0$ . В остальной области $\Pi_0 \setminus z_0$ $\mathfrak{R}(z)$ является голоморфной функцией.

2. Для любого элемента группы $\sigma \in G$ справедливо равенство
$$\mathfrak{R}(\sigma z) = \mathfrak{R}(z) + i\omega\ ,\quad \omega \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем (см.§ 2), что существует абелев интеграл второго рода, удовлетворяющий условию I и имеющий нулевые $a$-периоды. Обозначим его за $\widetilde{\mathfrak{R}}(z)$, его $b$-периоды за $\widetilde{\omega}_k$, $k=1,\dots,g$, и покажем как с его помощью получить $\mathfrak{R}(z)$. Будем $\mathfrak{R}(z)$ искать в виде

$$\mathfrak{R}(z) = \widetilde{\mathfrak{R}}(z) + i\sum_{k=1}^{g} c_k \mathrm{I}_k(z) + c_0 , \tag{I2}$$

где $\mathrm{I}_k(z)$ - нормированные абелевы интегралы первого рода, $c_k$ - пока еще не определенные константы. Отметим, что если все $c_k \in \mathbb{R}$, то при любом их выборе $a$-периоды интеграла (I2) будут чисто мнимыми. Чтобы и все $b$-перироды были бы чисто мнимыми, необходимо выполнение равенств

$$\operatorname{Re}\widetilde{\omega}_s - \sum_{k=1}^{g} c_k \operatorname{Im} B_{sk} = 0 , \quad s=1,\dots,g , \tag{I3}$$

где $B_{sk}$ - элементы матрицы (II). Матрица $\operatorname{Im} B_{sk}, s,k=1,\dots,g$ невырождена, поэтому из соотношения (I3) величины $c_k$ находятся единственным образом. Наконец, постоянная $c_0$ находится из условия сохранения асимптотики, т.е. из условия

$$i\sum_{k=1}^{g} c_k \mathrm{I}_k(z_0) + c_0 = 0 .$$

Такая нормировка оказывается более естественной еще и потому, что она не связана с определенным базисом генераторов группы $G$. По сути дела, мы доказали, что для любой группы $G$, фундаментальный многоугольник которой имеет род $g$, существует функция $\mathfrak{R}_1(z)$, удовлетворяющая условиям Леммы. Канонический многоугольник $\Pi_0$ являлся просто промежуточным этапом доказательства, и его в формулировке Леммы можно заменить на произвольный фундаментальный многоугольник $\Pi$ (который, например, может быть выбран многоугольником с сопряженными противоположными сторонами или каким-либо другим образом). Аналогично доказывается существование функций $\mathfrak{R}_2(z)$ и $\mathfrak{R}_3(z)$, имеющих соответственно асимптотики

$$\mathfrak{R}_2(z) = (z-z_0)^{-2} + O(z-z_0), \quad \mathfrak{R}_3(z) = (z-z_0)^{-3} + O(z-z_0)$$

и мнимые периоды.

## § 4. Автоморфная функция Бейкера-Ахиезера

В этом параграфе мы построим выражение для функции Бейкера-Ахиезера уравнения КП используя абелевы интегралы второго рода, рассмотренные в § 3 и тэта-ряды Пуанкаре с системой множителей. Но сначала мы дадим новое определение функции Бейкера-Ахиезера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть дана группа дробно-линейных отображений $G$, действующая на $\mathcal{D}$, такая, что фундаментальная область $\Pi = \mathcal{D}/G$ имеет род $g$. Функцией Бейкера-Ахиезера уравнения КП называется функция $\psi(x,y,t,z)$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

I. Она инвариантна относительно действия группы $G$, т.е. для любого $\sigma \in G$ $\psi(x,y,t,\sigma z) = \psi(x,y,t,z)$.

2. Она мероморфна на $\Pi \setminus z_0$, причем ее дивизор полюсов $\gamma_1,\dots,\gamma_g \in \Pi$ неспециален и не зависит от $x,y,t$. Неспециальность означает, что не существует автоморфной функции, имеющей на $\Pi$ этот дивизор полюсов. Это дивизор "общего положения".

3. $\psi$ имеет асимптотику при $z \to z_0$

$$\psi = \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x,y,t) k^{-s}\right) \exp(kx + k^2 y + k^3 t), \quad k = (z - z_0)^{-1}.$$

Такая функция единственна и весь вопрос заключается в ее построении, для которого нам необходимо понятие $\theta$-ряда Пуанкаре с системой множителей. Напомним соответствующие классические определения, следуя монографии [8] и ограничиваясь случаем, когда $\mathcal{D}$ - единичный круг, $\Pi = \mathcal{D}/G$ - $4g$ - угольник рода $g$ с суммой углов $2\pi$, не имеющий параболических вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Автоморфной формой группы $G$ размерности $-r$ $(r \in \mathbb{N})$ с системой множителей $v(\sigma)$, $\sigma \in G$ называется функция $F(z)$ мероморфная в $\mathcal{D}$, которая удовлетворяет соотношению

$$F(\sigma z) = v^{-1}(\sigma)(cz+d)^r F(z). \qquad (I4)$$

При этом для функции $v(\sigma)$ справедливо равенство $v(\sigma_1 \sigma_2) = v(\sigma_1) v(\sigma_2)$ для любых $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, другими словами, $v(\sigma)$ - характер группы $G$, т.е. гомоморфизм $G$ в мультипликативную группу комплексных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\theta$-рядом Пуанкаре группы $G$ размерности $-r$ $(r \in \mathbb{N})$ с системой множителей $v(\sigma)$, $\sigma \in G$ называется ряд

$$\theta(z, v(\sigma)) = \sum_{\sigma_k \in G} H(\sigma_k z)(c_k z + d_k)^{-r} v(\sigma_k), \qquad (I5)$$

где суммирование ведется по всем элементам группы, а $H(z)$ – рациональная функция в круге $\mathfrak{D}$.

По-существу, автоморфные формы изучены только в случае $|v(\sigma)|=1$. При этом система множителей не влияет на абсолютную сходимость ряда (I5), и справедливы следующие результаты, восходящие к Пуанкаре [7,8] :

I. Ряд (I5) абсолютно сходится при $r\geqslant 4$ и ограниченной в $\mathfrak{D}$ функции $H(z)$.

2. Любая автоморфная форма (I5), не имеющая в $\Pi$ полюсов, имеет там ровно $r(g-1)$ нулей.

3. Очевидно, что $\Theta$-ряд Пуанкаре (I5) является автоморфной формой; оказывается верно и обратное, а именно: существует $N=(r-1)(g-1)$ линейно независимых $\Theta$-рядов Пуанкаре (I5), определяющихся различными ограниченными в $\mathfrak{D}$ функциями $H(z)$, эти ряды образуют базис в пространстве автоморфных форм размерности – $r$, без полюсов в $\Pi$.

Обозначим этот базис $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Omega_1(z), \Omega_2(z), \Omega_3(z)$ – нормированные абелевы интегралы второго рода, определенные в § 3 видом асимптотики при $z\to z_0$, $\Omega_s(z)=(z-z_0)^{-s}+O(z-z_0)$, $s=1,2,3$ с чисто мнимыми периодами соответственно $i\omega_1(\sigma)$, $i\omega_2(\sigma), i\omega_3(\sigma), \omega_s(\sigma)\in\mathbb{R}$, $s=1,2,3$, $x,y,t\in\mathbb{R}$; $v(\sigma)$ – некоторая система множителей "общего положения", $|v(\sigma)|=1$, $\Theta_k(z,v)$, $k=1,\ldots,N$ – базисные $\Theta$-ряды Пуанкаре, не имеющие полюсов в $\Pi$. Зададим $N-1$ точку "общего положения" $z_1,\ldots,z_{N-1}\in\Pi$. Величины $a_k(x,y,t)$ и $b_k$, $k=1,\ldots,N$ определяются с точностью до общего множителя из равенств

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,t)\,\Theta_k(z_i, v(\sigma)\exp\{i\omega_1(\sigma)x+i\omega_2(\sigma)y+i\omega_3(\sigma)t\})=0\\ \sum_{k=1}^{N} b_k\Theta_k(z_i, v(\sigma))=0,\qquad i=1,\ldots,N-1\,.\end{gathered}\tag{I6}$$

Тогда выражение для функции Бейкера-Ахиезера дается формулой

$$\begin{gathered}\Psi(x,y,t,z)=\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,t)\,\Theta_k(z, v(\sigma)\exp\{i\omega_1(\sigma)x+i\omega_2(\sigma)y+i\omega_3(\sigma)t\})}{\sum_{k=1}^{N} b_k\Theta_k(z,v(\sigma))}\times\\ \times\exp\{\Omega_1(z)x+\Omega_2(z)y+\Omega_3(z)t\}\cdot T(x,y,t)\,,\end{gathered}\tag{I7}$$

где $T(x,y,t)$ – множитель, определяющийся из условия нормировки в точке $z_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться в том, что функция, задаваемая формулами (I6–I7) удовлетворяет трем требованиям определения 2. Проверка первого и третьего условий тривиальна, остается доказать, что у функции $\psi(x,y,t,z)$ ровно $g$ полюсов не зависящих от $x,y,t$.

Знаменатель является автоморфной формой размерности $-r$, поэтому имеет $r(g-1)$ нулей, но положение $N-1=(r-1)(g-1)-1$ нулей мы знаем – они находятся в точках $z_1,\dots,z_{N-1}$ и не являются полюсами функции $\psi$, т.к. сокращаются с нулями числителя в силу соотношений (I6). Неизвестными остаются $r(g-1)-(N-1)=g$ нулей знаменателя, которые и являются не зависящими от $x,y,t$ полюсами $\psi$ "общего положения".

Отметим, что благодаря удачной нормировке абелевых интегралов $\mathfrak{R}_i(z)$, обеспечивающей их чисто мнимые периоды, тэта-ряды, стоящие в знаменателе выражения (I6), имеют систему множителей по мо модулю равных I, что позволяет не заниматься вопросом о их существовании и свойствах.

Никакого труда не составляет, пользуясь формулой (6) получить решение уравнения КП, отвечающее функции Бейкера-Ахиезера (I7). Для этого надо изучить асимптотику выражения (I7). Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\frac{\sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,t)\,\theta_k(z,v(\sigma)\exp\{i\omega_1(\sigma)x+i\omega_2(\sigma)y+i\omega_3(\sigma)t\})}{\sum_{k=1}^{N} b_k\theta_k(z,v(\sigma))},$$

имеющую при $z\to z_0$ асимптотическое разложение вида

$$\varphi(z)=1+\sum_{s=1}^{\infty}\eta_s(x,y,t)\,k^{-s},\quad k=(z-z_0)^{-1}.$$

Тогда

$$\ln\varphi(z)\underset{z\to z_0}{=}\ln\left(1+\sum\eta_s k^{-s}\right)=\eta_1(x,y,t)(z-z_0)+O((z-z_0)^2). \tag{I8}$$

Посмотрим, как связаны между собой коэффициент $\eta_1$ в разложении функции $\varphi(z)$ и искомый коэффициент $\xi_1$ в разложении функции $\psi(z)$. Для этого более детально изучим асимптотику интегралов $\mathfrak{R}_1(z)$, $\mathfrak{R}_2(z)$, $\mathfrak{R}_3(z)$. Пусть в окрестности $z_0$ справедливы разложения

$$\mathfrak{R}_1(z)=(z-z_0)^{-1}+c_1(z-z_0)+O((z-z_0)^2) \tag{I9}$$

$$\mathcal{P}_2(z) = (z-z_0)^{-2} + c_2(z-z_0) + O((z-z_0)^2)$$

$$\mathcal{P}_3(z) = (z-z_0)^{-3} + c_3(z-z_0) + O((z-z_0)^2)$$

с неизвестными заранее величинами $c_1, c_2$ и $c_3$.

Проводя асимптотическое разложение равенства

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp\{\mathcal{P}_1(z)x + \mathcal{P}_2(z)y + \mathcal{P}_3(z)t\}$$

в окрестности $z_0$, получаем соотношение:

$$(1+\xi_1 k^{-1}+O(k^{-2}))\exp(kx+k^2y+k^3t) = (1+\eta_1 k^{-1}+O(k^{-2}))\times$$

$$\times\exp(kx+c_1k^{-1}x+k^2y+c_2k^{-1}y+k^3t+c_3k^{-1}t) =$$

$$=(1+(\eta_1+c_1x+c_2y+c_3t)k^{-1}+O(k^{-2}))\exp(kx+k^2y+k^3t)$$

откуда следует, что

$$u(x,y,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x,y,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\eta_1(x,y,t) - 2c_1 .$$

Величину $\eta_1$ найти очень легко, пользуясь выражением (I8):

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\ln\varphi(z)\Big|_{z=z_0} =$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left\{\sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,t)\theta_k(z,v(\sigma))\exp\{i\omega_1(\sigma)x+i\omega_2(\sigma)y+i\omega_3(\sigma)t\}\right\}\Big|_{z=z_0}$$

Таким образом, окончательно получаем, что функция

$$u(x,y,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left\{\sum_{k=1}^{N} a_k(x,y,t)\theta_k(z,v(\sigma))\exp\{i\omega_1(\sigma)x+i\omega_2(\sigma)y+i\omega_3(\sigma)t\}\right\}\Big|_{z=z_0} - 2c_1,$$

где $c_1$ - коэффициент в разложении (I9), является решением уравнения КП. Коэффициенты $a_k(x,y,t)$ находятся из условия (I6) обращения в ноль выражения, стоящего под знаком логарифма в некоторых точках $z_1, \dots, z_{N-1}$ не зависящих от $x, y, t$ .

В заключение отметим, что настоящая работа представляет собой лишь первую попытку получения решений нелинейных уравнений интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния в автоморфных функциях и требует еще серьезной эффективизации. Наши надежды связаны с тем, что, в новых терминах, возможно, будет удобнее исследовать решения, отвечающие накрытиям над простыми кривыми, а также, удастся с единой точки зрения объяснить конструкцию быстроубывающих и конечнозонных решений.

Автор приносит свою искренную благодарность А.Р.Итсу за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

## Литература

I. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах. - Докл.АН СССР, 1970, т.192, № 4, с.753-756.

2. Кричевер И.М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова-Шабата и их периодических решений. - Докл.АН СССР, 1976, т.227, № 2, с.291-294.

3. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. - УМН, 1977, т.32, № 6, с.183-208.

3. Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза I. - Функц.анализ, 1974, т.8, № 3, с.54-66.

4. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. - УМН, 1976, т.31, № 1, с.55-136.

5. Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза. - ТМФ, 1975, т.23, № 1, с.51-67.

6. Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения. - УМН, 1981, т.36, № 2, с.11-80.

7. Пуанкаре А., Избранные труды, т.3, М., 1974, 769 с.

8. Lehner J. Discontinous groups and automorphic functions. A.M.S., 1964., 425 p.

Bobenko A.I. Finite-gap solutions in terms of automorphic functions. The Kadomcev-Petviashvily equation.

The expression of finite-gap solutions of the Kadomcev-Petviashvily equation in terms of the theta-series of Poincare is obtained.