Ya. I. Belopol'skaya, O. A. Grechaniy, О стохастических моделях и методе пересчета толубинского в линейной теории переноса,
TVT, 1973, Volume 11, Issue 5, 1017–1024

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 11 **1973** *№ 5*

УДК 530.1

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ И МЕТОДЕ ПЕРЕСЧЕТА ТОЛУБИНСКОГО В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Я. И. Белопольская, О. А. Гречаный

Рассмотрен марковский скачкообразный случайный процесс, моделирующий движение в фазовом одночастичном пространстве, используемый Е. В. Толубинским в линейной теории переноса. На основе свойств выборочных функций и построения континуального интеграла по мере, связанной со случайным процессом, изложен метод пересчета, который обобщается для представления средних значений функционалов от случайного процесса, возникающих при изучении процессов переноса вещества и энергии.

В теории явлений переноса в линейных статистических системах рассматривается ряд задач, связанных с изучением эволюции динамической системы, находящейся в контакте с большой термодинамической системой. Макроскопическое состояние системы характеризуется функцией распределения $f(t, x)$ в фазовом пространстве (x — совокупность динамических переменных системы). При изучении общих задач переноса весьма плодотворным является использование вероятностной интерпретации $f(t, x)$ и привлечение методов теории стохастических процессов. Так, в случае слабого непрерывного взаимодействия системы со средой эволюция описывается уравнением типа Фоккера — Планка, а движение точки $x(t)$ в фазовом пространстве представляет собой марковский диффузионный случайный процесс [1, 2]. Стохастический подход в случае сильного взаимодействия, при котором динамическое состояние системы изменяется во времени скачкообразно, был развит Е. В. Толубинским [3, 4]. Он основан на аппроксимации динамического состояния системы случайным процессом $x(t)$ и последующем представлении функции f в виде континуального интеграла по пространству фазовых траекторий

$$f(t,x)=\int\limits_{B[t,x]}\mu(dy)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{B_n[t,x]}\mu(dy), \tag{1}$$

где μ — вероятностная мера в пространстве траекторий процесса $x(t)$, $B[t, x]$ — множество траекторий, имеющих в момент t координаты x, $B_n[t, x]$ — подмножество траекторий из $B[t, x]$ с фиксированным числом разрывов n. Представление (1) названо в [3, 4] разложением функции распределения f в ряд пересчета по числу актов взаимодействия. В предположении, что $x(t)$ является марковским процессом, интегралы по функциональным множествам B_n удается свести к n-кратным интегралам Римана, а для функции f следует линейное кинетическое уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=\hat{J}_c f, \tag{2}$$

где H — гамильтониан системы, $[\ldots]$ — классические скобки Пуассона,

$$\hat{J}_c f = \int K(t, \mathbf{v}, \mathbf{r}, \Delta\mathbf{v})\,[f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) - f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})\,]\,d\Delta\mathbf{v} \qquad (3)$$

— интеграл столкновений; K — вероятность перехода в единицу времени. Уравнение (2) совпадает с прямым уравнением Феллера — Колмогорова [5] для плотности вероятности двухкомпонентного марковского процесса $x(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$, где $\mathbf{v}(t)$ — марковский скачкообразный случайный процесс, а $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)\,dt$. Поэтому представление в виде ряда пересчета может быть получено на основе свойств выборочных функций процесса.

При стохастическом описании эволюции системы задача вычисления ее макроскопических характеристик сводится к вычислению средних значений функций и функционалов от случайного процесса. Например, в ряде задач химической технологии приходится иметь дело с процессами превращения или изменения термодинамического состояния макрочастиц, совершающих случайные блуждания [6, 7]. Если такие процессы происходят в неоднородной среде и зависят от динамического состояния частицы, то нахождение распределения по степени превращения связано с рассмотрением траекторий частиц и вычислением средних значений функционалов типа $\langle \int_0^t \varphi(x(\tau), \tau)\,d\tau \rangle$, где $\varphi(x, t)$ — некоторая функция от x и t. Распределение времени пребывания частиц в фазовом объеме X_1 можно найти по статистическим моментам $\nu_n = \langle \int_0^t [\chi_{x_1}(x(\tau))\,d\tau]^n \rangle$, где $\chi_{x_1}(x)$ — характеристическая функция области X_1.

В частности, ν_1 представляет собой решение задачи диффузии в области R_1 с поглощающей границей.

Многие задачи стохастической теории явлений переноса приводят к вычислению средних значений экспоненциальных функционалов от случайного процесса [8—10]. Пусть $\alpha(t)$ — некоторая макроскопическая характеристика системы, удовлетворяющая уравнению

$$d\alpha(t)/dt = \varphi(x(t), t)\,\alpha(t),$$

тогда

$$\langle \alpha(t) \rangle = \left\langle \exp\left[\int_0^t \varphi(x(\tau), \tau)\,d\tau \right] \right\rangle. \qquad (4)$$

Например, если φ — сечение поглощения, то $\langle \alpha(t) \rangle$ — среднее число непоглощенных частиц в системе. Метод вычисления средних значений экспоненциальных функционалов от траекторий диффузионного марковского процесса был предложен в [8]. В [9, 10] этим методом получено интегро-дифференциальное уравнение для среднего значения экспоненциального функционала от скачкообразного марковского процесса.

Предлагаемая работа посвящена изложению метода представления f в виде ряда пересчета на основе свойств модельного двухкомпонентного марковского процесса $x(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ и применению этого метода к вычислению средних значений функционалов от $x(t)$. Выводятся формулы для средних от некоторых функционалов, вычисление которых сводится к интегрированию по множествам траекторий, имеющих фиксированное число скачков. В частном случае экспоненциального функционала получены интегро-дифференциальные уравнения для средних значений этого функционала.

Рассмотрим марковский процесс $x(t) = (\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ с фазовым пространством $X = V \times R$ (R и V — пространство координат и скоростей частицы соответственно), в котором фиксирована σ-алгебра L. Пусть $P(t_0, x_0;\, t, A) = P\{x(t) \in A / x(t_0) = x_0\}$ — вероятность перехода, $t > t_0$, $A \in L$. Полагаем, что переходные вероятности непрерывны, т. е.

$\lim\limits_{t\to t_0} P(t_0, x_0;\ t, A) = \chi_A(x_0)$, где $\chi_A(x)=1$ при $x\in A$ и $\chi_A(x)=0$ при $x\bar{\in} A$, и

$$\lim_{t\to t_0} [P(t_0, x_0; t, A) - \chi_A(x_0)](t-t_0)^{-1} = q(t_0, x_0, A),$$

где $q(t_0, x_0, A)$ — непрерывная функция по t_0, борелевская функция по x_0, аддитивная функция по A и $|q(t_0, x_0, A)| \leqslant \mathrm{const}$. Из определения $q(t_0, x_0, A)$ следует, что она счетно-аддитивна на L, причем $q(t_0, x_0, X)=0$. Положим

$$q(t_0, x_0) = q(t_0, x_0, \{x_0\}),$$

$$\Pi(t_0, x_0, A) = \begin{cases} q(t_0, x_0, A-\{x_0\}) & \text{при } q(t_0, x_0)\neq 0; \\ \chi_A(x_0) & \text{при } q(t_0, x_0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\{x_0\}$ — множество, состоящее из одной точки, и обозначим через $x_0=(\mathbf{r}_0^t, \mathbf{v}_0^t)$ непрерывную траекторию в фазовом пространстве, определяемую уравнениями

$$d\mathbf{r}_0^t/dt = \mathbf{v}_0^t, \quad d\mathbf{v}_0^t/dt^t = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_0^t, \mathbf{v}_0^t) \tag{6}$$

и начальными условиями $\mathbf{r}_0^t=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0^t=\mathbf{v}_0$ при $t=0$. Очевидно, траектория x_0^t реализуется в случае, когда нет взаимодействия с термостатом. Из (5) следует, что $\Pi(t_0, x_0, A)$ — вероятность на L. В дополнение к (4) потребуем, чтобы имело место соотношение

$$P(t_0, x_0;\ t_0+\Delta t, A) = \chi_A(x_0^{\Delta t}) + \Delta t q(t_0, x_0^{\Delta t}, A) + O(\Delta t)$$

или с учетом (5)

$$\begin{aligned} P(t_0, x_0;\ t_0+\Delta t, A) = {} & [1-\Delta t q(t_0, x_0^{\Delta t})]\chi_A(x_0^{\Delta t}) + \\ & + \Delta l q(t_0, x_0^{\Delta t})\Pi(t_0, x_0^{\Delta t}, A) + O(\Delta t). \end{aligned} \tag{7}$$

Вероятностный смысл $q(t_0, x_0^t)$ нетрудно понять из равенства

$$P(t_0, x_0;\ t_0+\Delta t, \{x_0^{\Delta t}\}) = 1 - \Delta l q(t_0, x_0^{\Delta t}) + O(\Delta t),$$

вытекающего из (7), с учетом того, что $\Pi(t_0, x_0^{\Delta t}, \{x_0^{\Delta t}\})=0$. Таким образом, $1-\Delta t q(t_0, x_0^{\Delta t})$ есть с точностью до $O(\Delta t)$ вероятность того, что в течение времени Δt траектория частицы совпадает с $x_0^{\Delta t}$. Далее из (4) и (5) следует, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{P(t_0, x_0; t_0+\Delta t, A)}{\Delta t} = q(t_0, x_0)\Pi(t_0, x_0, A) \quad \text{при } x_0^{\Delta t}\bar{\in} A, \tag{8}$$

т. е. $q(t_0, x_0)\Pi(t_0, x_0, A)$ — вероятность перехода из x_0 в A в единицу времени. Очевидно, эти переходы в рамках принятой модели представляют результат взаимодействия частицы с термостатом.

Аналогично [5] можно показать, что рассматриваемый процесс обладает следующими свойствами. 1. Процесс $x(t)$ стохастически непрерывен; 2. Существует случайное время τ пребывания процесса $x(t)$ на траектории x_0^t (x_0^t назовем в дальнейшем свободной траекторией), причем

$$P\{x(\tau)\in\{x_0^t\}, \quad \tau\in[t_0, t]/x(t_0)=x_0\} = \exp\left[-\int_0 q(s, x_0^s)\,ds\right]; \tag{9}$$

3. Процесс $x(t)$ не имеет разрывов второго рода; 4. Почти все траектории процесса $x(t)$ имеют следующий характер. В теченние случайного времени τ, распределение которого задается в (9), реализуется движение по свободной траектории, затем происходит мгновенный переход $x_0^\tau \to x_1$, вероятность которого в единицу времени есть (8) при $A=\{x_1\}$, далее, в течение случайного времени τ_1 реализуется свободная траектория $x_1^{\tau_1}$ и т. д.

Рассмотрим семейство конечномерных распределений случайного процесса $x(t)$

$$\{P_{t_1t_2\ldots t_n}(B),\ n=1,2,\ldots,\ B\in L^n\}. \tag{10}$$

В силу марковского свойства процесса $x(t)$, имеем

$$P_{t_1t_2\ldots t_n}(B)=\int\limits_{B_1}\int\limits_{B_2}\ldots\int\limits_{B_{n-1}}P(dx_1)P(t_1,x_1;t_2,dx_2)\ldots P(t_{n-2},x_{n-2};t_{n-1},dx_{n-1})\times$$

$$\times P(t_{n-1},x_{n-1};t_n,B_n), \tag{11}$$

причем семейство (10) удовлетворяет условию согласования

$$P_{t_1t_2\ldots t_n\ldots t_{n+m}}\ (B\times X^m)=P_{t_1t_2\ldots t_n}(B). \tag{12}$$

При этом, в силу теоремы Колмогорова [5], существует вероятностное пространство (Ω^T,S,μ) такое, что (Ω^T,S,μ) и функция $x(t,\omega)$, $\omega\in\Omega^T$ — представления семейства распределений (10). Здесь Ω^T — пространство всех функций от $t\in[t_0,T]$ со значениями в фазовом пространстве X, S — σ-алгебра в Ω^T и мера μ такова, что $\mu\ (C)$, $C\in S$ равна вероятности того, что траектория случайного процесса $x(t)$ принадлежит множеству C.

Учитывая, что почти все траектории рассматриваемого процесса $x(t)$ имеют характер, описанный выше, введем подпространство $F^T\subset\Omega^T$ функций, имеющих конечное или счетное число разрывов первого рода и таких, что между двумя последовательными разрывами они удовлетворяют уравнениям (6) и соответствующим начальным условиям, т. е. совпадают со свободными траекториями. Очевидно, что $\mu(\Omega^T\backslash F^T)=0$, т. е. $\mu(F^T)=1$. При этом для любого $C\in S$, $C\diagdown C\cap F^T\subset\Omega^T\diagdown F^T$, откуда $\mu(C\diagdown C\cap F^T)=0$ и $\mu(C\cap F^T)=\mu(C)$. Обозначим через S_1 σ-алгебру множеств вида $C\cap F^T$. Тогда процесс $x(t)$ может быть задан на вероятностном пространстве (F^T,S_1,μ).

Рассмотрим в F^T подмножества $F_n{}^T$ $(n=0,1,2,\ldots)$, состоящие из функций с фиксированным числом разрывов n. Очевидно, что $F_n{}^T\in S_1$, так как $F_n{}^T$ — непересекающиеся множества и $\cup F_n{}^T\in S_1$. Любое множество $B\in S_1$ можно представить в виде

$$B=\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n{}^T\cap B=\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n \tag{13}$$

и

$$\mu(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(B_n), \tag{14}$$

так как $B_n\in S_1$, $B_n\cap B_m=\Phi$ при $n\neq m$.

Рассмотрим множество $B(t_0,x_0;t,A)$ траекторий из F^t, начинающихся в момент времени t_0 в точке x_0 и попадающих в момент времени t в множество A. Среднее значение функционала $\Psi(x(\cdot))$ при условии $x(t_0)=x_0$, $x(t)\in A$, может быть выражено в виде континуального интеграла

$$\langle\Psi(x(\cdot))\rangle_{t_0,x_0,t,A}=\int\limits_{B[t_0,x_0;t,A]}\Psi(y)\mu(dy),$$

который с учетом (13) и (14) представим в виде

$$\langle\Psi(x(\cdot))\rangle_{t_0,x_0,t,A}=\sum_{n=0}\ \int\limits_{B_n[t_0,x_0;t,A]}\Psi(y)\mu(dy), \tag{15}$$

где $B_n[t_0,x_0;t,A]=B[t_0,x_0;t,A]\cap F_n{}^t$. Если задано начальное распределение P_0 процесса $x(t)$, то среднее функционала есть

$$\langle \Psi(x(\cdot))\rangle = \int_X \langle \Psi(x(\cdot))\rangle_{t_0,x_0,t,x} P_0(dx_0).$$

Для вероятности перехода $P(t_0, x_0; t, A)$ имеет место следующее представление:

$$P(t_0,x_0;t,A)=\int\limits_{B[t_0,x_0;t,A]}\mu(dy)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{B_n[t_0,x_0;t,A]}\mu(dy)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(B_n[t_0,x_0;t,A]). \tag{16}$$

Очевидно, что $\mu(B_n[t_0, x_0; t, A])$ — вероятность перехода при условии, что процесс $x(t)$ совершает n скачков в произвольные моменты времени $t_k \in [t_0, t]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим далее некоторое множество $B_n \in S_1$. Учитывая свойства функций из множества F_n^t, B_n, можно задать интервалы времени Δ_k, в течение которых происходит k-й скачок $(k=1, 2, \ldots, n)$ на всех траекториях из B_n и n борелевскими множествами $A_k \in X$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, представляющими начальные условия для свободных траекторий, которые реализуются после k-го разрыва. Тогда, принимая во внимание, что выражение (9) представляет собой вероятность того, что выборочная траектория процесса $x(t)$ является свободной траекторией, проходящей через x_0 в момент время t_0, а $q(t_1, x_0^{t_1-t_0})\,dt_1\Pi(t_1, x_0^{t_1-t_0}, dx_1)$ — вероятность того, что траектория, проходящая через точку $x_0^{t_1-t_0}$ в момент времени t_1, имеет разрыв величины dx_1 на интервале времени от t_1 до t_1+dt_1, получаем, что

$$\mu(B_n)=\int\limits_{\Delta_1}dt_1\ldots\int\limits_{\Delta_n}dt_n q(t_1,x_0^{t_1-t_0})\int\limits_{A_1}\Pi(t_1,x_0^{t_1-t_0},dx_1)\times$$

$$\times\exp\left[-\int_0^{t_1}q(s,x_1^s)\,ds\right]\int\limits_{A_2}\Pi(t_2,x_1^{t_2-t_1},dx_2)\,q(t_2,x_1^{t_2-t_1})\ldots \tag{17}$$

$$\ldots q(t_n,x_{n-1}^{t_n-t_{n-1}})\int\limits_{A_n}\Pi(t_n,x_{n-1}^{t_n-t_{n-1}},dx_n)\exp\left[-\int_{t_n}q(s,x_n^s)\,ds\right]\chi_A(x_n^{t-t_n}).$$

Таким образом, интегрирование по мере μ в функциональном пространстве F^t может быть сведено к интегрированию по непересекающимся множествам $B_n \in F_n^t$, что в свою очередь приводит к вычислению n последовательных интегралов по множествам A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ и k-кратному интегрированию по интервалам времени Δ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\mu(B_n)=\int\limits_{B_n}\mu(dy)=\int\limits_{\Delta_1}\ldots\int\limits_{\Delta_n}\int\limits_{A_1}\ldots\int\limits_{A_n}\int\limits_{A}d\mu_1, \tag{18}$$

где

$$d\mu_n=dt_1\ldots dt_n\exp\left[-\int_{t_0}^{t_1}q(s,x_0^s)\,ds\right]q(t_1,x_0^{t_1-t_0})\times$$

$$\times\Pi(t_1,x_0^{t_1-t_0},dx_1)\ldots\Pi(t_n,x_{n-1}^{t_n-t_{n-1}},dx_n)\exp\left[-\int_{t_n}q(s,x_n^s)\,ds\right]\times$$

$$\times\delta(x-x_n^{t-t_n})\,dx=p_n\,dt_1\ldots dt_n\,dx_1\ldots dx_n\,dx. \tag{19}$$

Очевидно, что $p_n(t_1 \dots t_n, x_1 \dots x_n)$ — плотность вероятности того, что функция с n разрывами $x_k - x_{k-1}{}^{t_k - t_{k-1}}$ в моменты времени t_k ($k=1, 2, \dots, n$) и отрезками свободных траекторий на интервалах от t_k до t_{k+1} совпадает с траекторией процесса $x(t)$. В силу (18), (19) выражение (17) для вероятности перехода $P(t_0, x_0; t, A)$ может быть представлено с учетом того, что $B_n[t_0, x_0; t, A]$ задается набором $A_k = X$, $\Delta_k = [t_{k-1}, t]$, $k=1, 2, \dots, n$, в виде

$$P(t_0, x_0; t, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_{n-1}}^{t} dt_n \int_X dx_1 \dots \int_X dx_n \int_A dx p_n. \tag{20}$$

Обозначим через $\hat{W}(t, x)$ оператор

$$\hat{W}(t, x) f(x) = q(t, x) \int_X f(x_1) \Pi(t, x, dx_1)$$

и введем оператор хронологического упорядочения $\hat{T}$. Тогда (20) может быть переписано в виде

$$P(t_0, x_0; t, A) = \hat{T} \exp \left\{ \int_{t_0}^{t} dt_1 \exp \left[- \int_{t_0}^{t_1} q(s, x_0{}^s) ds \right] \times \right.$$

$$\left. \times \hat{W}(t_1, x_0{}^{t_1 - t_0}) \right\} \exp \left[- \int_{t_0}^{t} q(s, x_0{}^s) ds \right] \chi_A(x_0{}^{t - t_0}). \tag{21}$$

Из (21) вытекает, что вероятность перехода $P(t_0, x_0; t, A)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$P(t_0, x_0; t, A) = \exp \left[- \int_{t_0}^{t} q(s, x_0{}^s) ds \right] \chi_A(x_0{}^{t - t_0}) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \exp \left[- \int_{t_0}^{t_1} q(s, x_0{}^s) ds \right] q(t_1, x_0{}^{t_1 - t_0}) \int_X \Pi(t_1, x_0{}^{t_1 - t_0}, dx_1) P(t_1, x_1, t, A), \tag{22}$$

представляющему собой интегральную форму обратного уравнения Колмогорова.

Аналогично, в силу (18), (19) выражение (15) может быть представлено в виде

$$\left\langle \Psi \left(\int_{t_0}^{t} \varphi(s, x(s)) ds \right) \right\rangle_{t_0, x_0, t, A} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} dt_1 \dots \int_{t_{n-1}}^{t} dt_n \int_X dx_1 \dots \int_X dx_n \int_A dx \times$$

$$\times p_n(t_0, t_1 \dots t_n, x_0, x_1, \dots, x_n, x) \Psi \left(\int_{t_0}^{t_1} \varphi(s, x_0{}^s) ds + \dots \int_{t_n}^{t} \varphi(s, x_0{}^s) ds \right). \tag{23}$$

В частности, когда

$$\Psi \left(\int_{t_0}^{t} \varphi(s, x(s)) ds \right) = \exp \left[\int_{t_0}^{t} \varphi(s, x(s)) ds \right], \tag{24}$$

формула (23) приобретает вид

$$\left\langle \exp \left[\int_{t_0}^{t} \varphi(s, x(s)) ds \right] \right\rangle_{t_0, x_0, t, A} = \hat{T} \exp \left\{ \int_{t_0}^{t} dt_1 \exp \left[- \int_{t_0}^{t_1} ds [q(s, x_0{}^s) - \right. \right.$$

$$-\varphi(s, x_0^s)\Big]\hat{W}(t_1, x_0^{t_1-t_0})\Big\}\tilde{P}_0(t_0, x_0; t, A) = \tilde{P}(t_0, x_0; t, A), \quad (25)$$

где

$$\tilde{P}_0(t_0, x_0; t, A) = \int\limits_{B_0[t_0, x_0; t, A]} \Psi(y)\,\mu(dy) =$$

$$= \exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t} q(s, x_0^s)\,ds\Big]\chi_A(x_0^{t-t_0})\exp\Big[\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(s, x_0^s)\,ds\Big] \quad (26)$$

— среднее значение функционала (24) при условии, что траектория процесса $x(t)$ — свободная траектория. Выражение (25) удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\tilde{P}(t_0, x_0; t, A) = \tilde{P}_0(t_0, x_0; t, A) + \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 q(t_1, x_0^{t-t_1}) \times$$

$$\times \exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t_1} ds[q(s, x_0^s) - \varphi(s, x_0^s)]\Big]\int \Pi(t_1, x_0^{t-t_1}, dx_1)\tilde{P}(t_1, x_1; t, A), \quad (27)$$

из которого с учетом (26) нетрудно получить обратное уравнение Колмогорова для $\tilde{P}$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t_0} + \mathbf{v}_0\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \mathbf{r}_0} + \mathbf{F}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \mathbf{v}_0} - \varphi(x_0, t_0)\tilde{P} =$$

$$= q(x_0, t_0)\int \Pi(t_0, x_0, dx_1)[\tilde{P}(t_0, x_0; t, A) - \tilde{P}(t_0, x_1; t, A)]. \quad (28)$$

Заметим, что выражение (19) может быть записано также в виде

$$d\mu = dt_1 \ldots dt_n \exp\Big[-\int\limits_{t_1}^{t} q(s, x^{t-s})\,ds\Big] q(t_1, x^{t-s})\,\Pi(t_1, x^{t-s}, dx_2)\ldots$$

$$\ldots q(t_n, x_{n-1}^{t_{n-1}-t_n})\,\Pi(t_n, x_{n-1}^{t_{n-1}-t_n}, dx_n)\exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t_n} q(s, x_n^{t_n-s})\,ds\Big]\delta(x_n^{t_n-t} - x_0). \quad (29)$$

Полагаем здесь, что $t > t_1 > t_2 > \ldots > t_n > t_0$. Используя (29), можно получить для плотности вероятности перехода выражение

$$p(t_0, x_0; t, x) = \int\limits_{B[t_0, x_0; t, x]} \mu(dy) = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\ldots\int\limits_{t_0}^{t_{n-1}}\int\limits_{X}\ldots\int\limits_{X} d\mu_n =$$

$$= \hat{T}\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \hat{W}(t_1, x)\exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t_1} q(s, x^{t-s})\,ds\Big]\Big\} p_0, \quad (30)$$

или, вводя оператор эволюции

$$\hat{S}(t, t_0) = \hat{T}\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \hat{W}(t_1, x)\exp\Big[-\int\limits_{t_0}^{t_1} q(s, x^{t-s})\,ds\Big]\Big\}, \quad (31)$$

$$p(t_0, x_0; t, x) = \hat{S}(t, t_0)\,p_0. \quad (32)$$

Если задана начальная плотность распределения $f_0(x)$, то плотность распределения процесса $x(t)$ есть

$$f(t,x)=\int dx_0 f_0(x_0)\,p(t_0,x_0;t,x)=\hat{S}(t,t_0)f_0(x,t). \tag{33}$$

Используя явный вид оператора $\hat{S}$ (31), получаем

$$f(t,x)=f_0(t,x)+\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int q(x,t_1)\,\Pi(t_1,x,dx_1)\exp\left[-\int\limits_{t_1}^{t} q(s,x_1^{t-s})\,ds\right]f(t_1,x_1). \tag{34}$$

Отметим, что уравнение (34) представляет собой интегральную форму прямого уравнения Колмогорова (2).

Институт технической теплофизики
Академии наук УССР

Поступила в редакцию
2 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. Изд. иностр. лит., 1947.
2. H. A. Kramers. Physica, 7, 284, 1940.
3. Е. В. Толубинский. В сб. Исследования по теплопроводности. «Наука и техника», Минск, 1967.
4. Е. В. Толубинский. Теория процессов переноса. «Наукова думка», Киев, 1969.
5. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. «Мир», 1964.
6. Н. Н. Туницкий. Диффузия и случайные процессы. «Наука», Новосибирск, 1970.
7. Н. Н. Туницкий, В. А. Каминский, С. Ф. Тимашев. Методы физико-химической кинетики. «Химия», 1972.
8. М. Кац. Вероятность и смежные вопросы в физике. «Мир», 1965.
9. M. Lax. Rev. Mod. Phys., 38, 359, 1966.
10. Н. Н. Корст. ТМФ, 6, № 2, 1971.