В. Г. Бардаков, А. Ю. Веснин, Об обобщении групп Фибоначчи, *Алгебра и логика*, 2003, том 42, номер 2, 131–160

Алгебра и логика, 42, № 2 (2003), 131—160

УДК 512.817+515.162

ОБ ОБОБЩЕНИИ ГРУПП ФИБОНАЧЧИ*)

В. Г. БАРДАКОВ, А. Ю. ВЕСНИН

Введение

Изучается класс групп с циклическим копредставлением, который ввели Кавикиоли, Хегенбарт и Реповш [1]. Интерес к этому классу обусловлен, с одной стороны, тем, что он содержит такие известные и активно изучавшиеся группы, как группы Фибоначчи и группы Сирадски, а с другой стороны, — сформулированным в [1] вопросом о том, являются ли данные группы фундаментальными группами трехмерных многообразий.

Фундаментальные группы компактных двумерных многообразий хорошо известны [2] и достаточно подробно изучены. В то же время [3, § 5.1], для $n \geqslant 4$ каждая конечно определенная группа может быть реализована как фундаментальная группа некоторого замкнутого ориентируемого n-многообразия. Случай трехмерных многообразий является наиболее сложным, поскольку, как показал Столлингс [4], не существует алгоритма, позволяющего по конечному копредставлению группы определить, является ли она фундаментальной группой некоторого трехмерного многообразия.

Проблема распознавания групп трехмерных многообразий представляет интерес как для трехмерной топологии (фундаментальная группа многообразия является одним из его важнейших инвариантов), так и для теории групп, поскольку зная, что группа является фундаментальной группой трехмерного многообразия, можно получить информацию о

*)Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 02-01-01118.

ее строении. В частности, если G — фундаментальная группа трехмерного многообразия постоянной отрицательной кривизны, то она является гиперболической по Громову, и тогда в G разрешимы проблемы равенства, сопряженности и т. д.

Одним из классов, для которого проблема распознавания трехмерных многообразий особенно актуальна, является класс групп с циклическим копредставлением. Будем говорить, что группа G обладает *циклическим копредставлением*, если она может быть задана в виде

$$G_n(w) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid w = 1,\ \eta(w) = 1, \ldots, \eta^{n-1}(w) = 1 \rangle,$$

где w — слово в алфавите $X = \{x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\}$, а η — автоморфизм свободной группы $F_n = F_n(x_1, \ldots, x_n)$, определенный на порождающих $\eta(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, где все индексы берутся по модулю n.

Алгебраические свойства групп с циклическим копредставлением (их конечность, абелевы инварианты) изучались в [5—9]. В [10—17] исследовались трехмерные многообразия, фундаментальные группы которых имеют циклическое копредставление. В частности, особое внимание уделялось случаю, когда автоморфизм группы $G_n(w)$, индуцированный указанным выше автоморфизмом η свободной группы F_n, соответствует циклическому разветвленному накрытию трехмерной сферы [18—23].

В данной работе рассматриваются группы с циклическим копредставлением, соответствующим слову $w = x_1 x_{1+m} x_{1+k}^{-1}$ для некоторых целых m и k, т. е. группы

$$G_n(m,k) = G_n(x_1 x_{1+m} x_{1+k}^{-1}) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k},\ i = 1, \ldots, n \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю n и принимают значения из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Отметим, что класс групп $G_n(m,k)$ содержит многие известные и активно изучавшиеся ранее группы. При $m = 1$, $k = 2$ имеем $G_n(1,2) \cong$ $\cong F(2,n)$, где $F(2,n)$ — группы Фибоначчи, введенные Конвеем [5]. Как показали Хеллинг, Ким и Меннике [21], если $n \geqslant 4$ четно, то $F(2,n)$ являются фундаментальными группами трехмерных многообразий, циклически $n/2$-листно накрывающих трехмерную сферу разветвленно над узлом "восьмерка". Более того, при $n \geqslant 8$ упомянутые многообразия являются гиперболическими. С другой стороны, как заметил Маклахлан [24], если n нечетно, то $F(2,n)$ не могут быть фундаментальными группами гиперболических трехмерных орбифолдов (в частности, многообразий) конечного объема. Различные обобщения групп Фибоначчи рассматривались в [7, 9, 15, 16]. Прищепов [25] исследовал асферичность и аторичность широкого класса обобщенных групп Фибоначчи. При $m = 2$, $k = 1$ имеем $G_n(2,1) \cong S(n)$, где $S(n)$ — группы Сирадски, изучавшиеся в [26], там было показано, что они являются фундаментальными группами трехмерных многообразий. Кавикиоли, Хегенбарт и Ким [27] установили, что эти многообразия циклически n-листно накрывают трехмерную сферу разветвленно над узлом "трилистник" (см. также [12, 28]). При $k = 1$ получаем семейство групп $G_n(m,1)$, которое изучали Гилберт и Хови [29]. Ими были исследованы HNN-расширения этих групп, их конечность и асферичность. В [30] показано, что группа $G_n(m,1)$ имеет бесконечный абелизатор тогда и только тогда, когда n кратно 6 и $m \equiv 2 \pmod 6$.

Данная работа имеет следующую структуру. В § 1 устанавливаются некоторые факты о строении и изоморфизме групп $G_n(m,k)$; даются признаки цикличности этих групп, разложимости в свободное произведение, а также их изоморфизма. В § 2 обобщается подход из [29] и с помощью результата [31] доказывается признак асферичности групп этого класса. В § 3 дается частичный ответ на вопрос из [1], а именно, показывается, что многие группы из $G_n(m,k)$ с нечетным числом n порождающих не реализуются как фундаментальные группы гиперболических трехмерных орбифолдов (в частности, многообразий) конечного объема. В § 4 приводятся порядки групп $G_n(m,k)$ и их абелизаторы для малых значений параметров, полученные в результате компьютерных вычислений с помощью GAP [32]. В § 5 формулируются некоторые вопросы о свойствах групп $G_n(m,k)$.

§ 1. Простейшие свойства групп $G_n(m,k)$

Непосредственно из копредставления групп $G_n(m,k)$ вытекает

ЛЕММА 1.1. *Группы $G_n(m,k)$ обладают следующими свойствами:*

1) *если n и k взаимно просты, то $G_n(0,k) \cong \mathbf{Z}_{2^n-1}$;*

2) *если $k=0$ или $m=k$, то группа $G_n(m,k)$ тривиальна;*

3) $G_n(m,k) \cong G_n(n-m, n-m+k)$;

4) $G_{2k}(k-1,k) \cong G_{2k}(k+1,1) \cong \mathbf{Z}_{2^k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Группа $G_n(0,k)$ имеет следующее копредставление:

$$G_n(0,k) = \left\langle x_1, \dots, x_n \;\middle|\; x_i^2 = x_{i+k},\ \ i = 1, 2, \dots, n \right\rangle.$$

В частности, $x_{n-k}^2 = x_n$. Подставив это выражение в соотношение $x_n^2 = x_k$, получим

$$G_n(0,k) = \left\langle x_1, \dots, x_{n-1} \;\middle|\; x_{n-k}^4 = x_k,\ x_i^2 = x_{i+k},\ i \neq n-k,\ i = 1, \dots, n-1 \right\rangle.$$

Аналогичным образом избавимся от порождающего x_{n-1}, затем от x_{n-2} и т. д. В результате

$$G_n(0,k) = \left\langle x_1 \;\middle|\; x_1^{2^n} = x_1 \right\rangle \cong \mathbf{Z}_{2^n-1}.$$

2) Непосредственно следует из определения групп $G_n(m,k)$.

3) Обозначим $y_i = x_i^{-1}$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что $G_n(m,k)$ может быть задана следующим копредставлением:

$$G_n(m,k) = \langle y_1, \dots, y_n \mid y_{i+m} y_i = y_{i+k},\ \ i = 1, \dots, n \rangle.$$

Положив $j = i+m$, перепишем эту систему соотношений в виде $y_j y_{j-m} = y_{j-m+k}$, $j = 1, \dots, n$. Все индексы берутся по модулю n, поэтому

$$\begin{aligned} G_n(m,k) &= \langle y_1, \dots, y_n \mid y_j y_{j+(n-m)} = y_{j+(n-m+k)},\ i = 1, \dots, n \rangle \\ &= G_n(n-m, n-m+k). \end{aligned}$$

4) Первый изоморфизм следует из п. 3, второй установлен в [29, предл. 2.2].

Доказательство леммы завершено.

В некоторых случаях группа $G_n(m,k)$ распадается в свободное произведение. Здесь и далее через $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ обозначается наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, \dots a_n$.

ЛЕММА 1.2. *Для группы $G_n(m,k)$ обозначим $u = (n,k)$ и $r = (n, k-m)$. Тогда*

1) *для любого положительного целого ℓ группа $G_{\ell n}(\ell m, \ell k)$ изоморфна свободному произведению ℓ экземпляров $G_n(m,k)$;*

2) *если $(u,r) > 1$, то $(n,m,k) > 1$ и $G_n(m,k)$ распадается в нетривиальное свободное произведение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что подгруппа $G_j = \langle x_j, x_{j+\ell}, \dots, x_{j+\ell(n-1)} \rangle$ рассматриваемой группы $G_{\ell n}(\ell m, \ell k)$ для каждого $j = 1, \dots, \ell$ изоморфна $G_n(m,k)$, причем G_j и $G_{j'}$ определены на непересекающихся множествах порождающих при $j \neq j'$. Из копредставления группы $G_{\ell n}(\ell m, \ell k)$ видно, что она равна свободному произведению $G_1 * G_2 * \dots * G_\ell$.

2) Нетрудно убедиться, что числа n, k и m имеют общий делитель $d = (u,r) > 1$, и требуемое утверждение следует из п. 1. Лемма доказана.

Группы $G_n(t,1)$ изучались в [29]. Следующее утверждение показывает, что во многих случаях группы $G_n(m,k)$ к ним сводятся, т. е. изоморфны им.

ЛЕММА 1.3. *Если $(n,k) = 1$ или $(n, m-k) = 1$, то $G_n(m,k)$ изоморфна $G_n(t,1)$ для некоторого натурального t.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(n,k) = 1$. Введем новый порядок на порождающих, положив

$$c_1 = x_1,\ c_2 = x_{1+k},\ \dots,\ c_i = x_{1+(i-1)k},\ \dots,\ c_n = x_{1+(n-1)k}.$$

Заметим, что множество порождающих $\{c_1, \dots, c_n\}$ совпадает с множеством $\{x_1, \dots, x_n\}$. При этом первое соотношение $x_1 x_{1+m} = x_{1+k}$ перепишется в виде $c_1 c_{1+t} = c_2$, где $c_{1+t} = x_{1+m} = x_{1+tk}$ и t определяется из условия $tk \equiv m \pmod n$. Следующее соотношение $c_2 c_{2+t} = c_3$ отвечает соотношению $x_{1+k} x_{1+k+m} = x_{1+2k}$, так как $c_{2+t} = x_{1+(1+t)k} = x_{1+k+m}$. Аналогично, $c_j c_{j+t} = c_{j+1}$ отвечает соотношению $x_{1+(j-1)k}\, x_{1+(j+t-1)k} = x_{1+jk}$, которое эквивалентно $x_{1+(j-1)k}\, x_{1+(j-1)k+m} = x_{1+(j-1)k+k}$.

Если j пробегает множество $\{1, \ldots, n\}$, то $1 + (j-1)k$, взятое по модулю n, также пробегает его. Следовательно, $G_n(m,k) \cong G_n(t,1)$.

Если $(n, m-k) = 1$, то в силу п. 3 леммы 1.1 доказательство сводится к рассмотренному выше случаю. Лемма доказана.

В силу лемм 1.1 и 1.2 далее можно считать, что параметры n, m, k удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < m < k < n, \ \ (n,m,k) = 1. \tag{1}$$

Группу $G_n(m,k)$, параметры которой удовлетворяют условиям (1), будем называть *несводимой*, поскольку иначе она либо тривиальная, либо циклическая, либо распадается в свободное произведение. Тем не менее, среди несводимых групп имеются попарно изоморфные, а именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $G_n(m,k)$ и $G_n(m',k')$ — две несводимые группы. Если k' делится на $r = (n, k-m)$ и найдутся натуральные числа i и j, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{cases} i + j(k-m) \equiv 1 - m \pmod n, \\ m' + 1 \equiv i + jk' \pmod n, \\ 1 \leqslant i \leqslant r, \ 1 \leqslant j \leqslant n/r, \end{cases} \tag{2}$$

то $G_n(m,k)$ изоморфна $G_n(m',k')$.

Проиллюстрируем ее на двух примерах.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $n = 4$, $m = m' = 1$, $k = 2$, $k' = 3$. Тогда $r = 1$ и числа $i = 1$, $j = 3$ удовлетворяют системе (2). Из теоремы 1.1 следует, что $G_4(1,2) \cong G_4(1,3)$. На самом деле, нетрудно проверить, что $G_4(1,2) \cong G_4(1,3) \cong Z_5$.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $n = 5$, $m = 1$, $k = 2$, $m' = 2$, $k' = 3$. Тогда $r = 1$ и числа $i = 1$ и $j = 4$ удовлетворяют системе (2). Следовательно, по теореме 1.1, $G_5(1,2) \cong G_5(2,3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Рассмотрим несводимую группу

$$G_n(m,k) = \langle x_1,\dots,x_n \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k},\ \ i=1,\dots,n\rangle.$$

Полагая $c_i = x_i^{-1}$, $i = 1,\dots,n$, получаем:

$$G_n(m,k) = \langle c_1,\dots,c_n \mid c_{i+m} c_i = c_{i+k},\ \ i=1,\dots,n\rangle.$$

Положим $j = i+m$. Тогда $i = j-m$ и систему соотношений можно представить в виде

$$c_j c_{j-m} = c_{j-m+k},\ \ j = 1,\dots,n.$$

Положим $\ell = n/r$, где $r = (n, k-m)$, и все порождающие $c_1,\dots,c_n$ разобьем на r групп по ℓ элементов в каждой:

$$\begin{gathered}
A_1 = \{c_1,\ c_{1+(k-m)},\ c_{1+2(k-m)},\ \dots,\ c_{1+(\ell-1)(k-m)}\},\\
A_2 = \{c_2,\ c_{2+(k-m)},\ c_{2+2(k-m)},\ \dots,\ c_{2+(\ell-1)(k-m)}\},\\
\dots\\
A_r = \{c_r,\ c_{r+(k-m)},\ c_{r+2(k-m)},\ \dots,\ c_{r+(\ell-1)(k-m)}\}.
\end{gathered}$$

Заметим, что разбиение порождающих на классы $A_1,\dots,A_r$ определяет разбиение соотношений на r классов $R_1,\dots,R_r$ по ℓ соотношений в каждом, а именно,

$$\begin{aligned}
R_1:\ \ & c_1 c_{1-m} = c_{1+(k-m)},\ c_{1+(k-m)} c_{1+k-2m} = c_{1+2(k-m)},\ \dots,\\
& c_{1+(\ell-1)(k-m)} c_{1+(\ell-1)(k-m)-m} = c_{1+\ell(k-m)};\\
R_2:\ \ & c_2 c_{2-m} = c_{2+(k-m)},\ c_{2+(k-m)} c_{2+k-2m} = c_{2+2(k-m)},\ \dots,\\
& c_{2+(\ell-1)(k-m)} c_{2+(\ell-1)(k-m)-m} = c_{2+\ell(k-m)};\\
& \dots\\
R_r:\ \ & c_r c_{r-m} = c_{r+(k-m)},\ c_{r+(k-m)} c_{r+k-2m} = c_{r+2(k-m)},\ \dots,\\
& c_{r+(\ell-1)(k-m)} c_{r+(\ell-1)(k-m)-m} = c_{r+\ell(k-m)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что, $c_{p+\ell(k-m)} = c_p$ при $p = 1,\dots,r$. Действительно, учитывая равенство $r = (n, k-m)$, полагаем $n = rn_1$, $k-m = rr_1$, где $n_1, r_1 \in \mathbf{N}$ и $(n_1, r_1) = 1$. Тогда $\ell(k-m) = (n/r)(k-m) = (n/r)rr_1 = nr_1 \equiv 0 \pmod n$, а значит, $c_{p+\ell(k-m)} = c_p$. Следовательно, если из каждого соотношения, входящего в класс R_p, выбрать первый порождающий из левой части и порождающий, входящий в правую часть, то получим порождающие, входящие в класс A_p.

Рассмотрим копредставление второй группы:

$$G_n(m',k') = \langle y_1,\ldots,y_n \mid y_i y_{i+m'} = y_{i+k'},\ \ i = 1,\ldots,n\rangle.$$

Разобьем ее порождающие на r групп по ℓ элементов в каждой:

$$\begin{gathered} B_1 = \{y_1,\ y_{1+k'},\ y_{1+2k'},\ \ldots,\ y_{1+(\ell-1)k'}\}, \\ B_2 = \{y_2,\ y_{2+k'},\ y_{2+2k'},\ \ldots,\ y_{2+(\ell-1)k'}\}, \\ \ldots \\ B_r = \{y_r,\ y_{r+k'},\ y_{r+2k'},\ \ldots,\ y_{r+(\ell-1)k'}\}. \end{gathered}$$

Аналогично предыдущей группе, разобьем соотношения группы $G_n(m',k')$ на классы, а именно,

$$\begin{aligned} Q_1:\ \ & y_1 y_{1+m'} = y_{1+k'},\ y_{1+k'} y_{1+k'+m'} = y_{1+2k'},\ \ldots, \\ & y_{1+(\ell-1)k'} y_{1+(\ell-1)k'+m'} = y_{1+\ell k'}; \\ Q_2:\ \ & y_2 y_{2+m'} = y_{2+k'},\ y_{2+k'} y_{2+k'+m'} = y_{2+2k'},\ \ldots, \\ & y_{2+(\ell-1)k'} y_{2+(\ell-1)k'+m'} = y_{2+\ell k'}; \\ & \ldots \\ Q_r:\ \ & y_r y_{r+m'} = y_{r+k'},\ y_{r+k'} y_{r+k'+m'} = y_{r+2k'},\ \ldots, \\ & y_{r+(\ell-1)k'} y_{r+(\ell-1)k'+m'} = y_{r+\ell k'}. \end{aligned}$$

Поскольку r делит k', имеем $\ell k' = (n/r)k' \equiv 0 \pmod n$, значит, $y_{p+lk'} = y_p$, $p = 1,\ldots,r$. Таким образом, если из каждого соотношения, входящего в класс Q_p, выбрать первый порождающий из левой части и порождающий, входящий в правую часть, то получим порождающие, входящие в класс B_p.

Определим отображение $\varphi : G_n(m,k) \to G_n(m',k')$ действием на порождающих по правилу

$$\varphi(c_{p+q(k-m)}) = y_{p+qk'},\ \ 1 \leqslant p \leqslant r,\ \ 0 \leqslant q \leqslant \ell-1,$$

и убедимся, что при этом каждое соотношение группы $G_n(m,k)$ переходит в соотношение группы $G_n(m',k')$.

В самом деле, рассмотрим соотношение $c_1 c_{1-m} = c_{1+k-m}$. По условию найдутся натуральные числа i,j, где $1 \leqslant i \leqslant r$ и $1 \leqslant j \leqslant (n/r) = l$, такие, что $i+j(k-m) \equiv 1-m \pmod n$. Следовательно, наше соотношение можно представить в виде $c_1c_{i+j(k-m)} = c_{1+k-m}$. Под действием φ оно перейдет в $y_1y_{i+jk'} = y_{1+k'}$. По условию $m'+1 \equiv i+jk' \pmod n$, поэтому $y_1y_{1+m'} = y_{1+k'}$, что является соотношением несводимой группы $G_n(m', k')$.

Осталось заметить, что все соотношения группы $G_n(m,k)$, равно как и $G_n(m', k')$, получаются из первого соотношения при помощи циклического сдвига индексов порождающих. Следовательно, φ является гомоморфизмом. Нетрудно заметить, что он обратим. Теорема доказана.

В качестве частного случая теоремы 1.1, получим следующий результат из работы Гилберта и Хови [29, лемма 2.1].

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть n, t — натуральные числа такие, что $n > t$ и $(n, t-1) = 1$, а s удовлетворяет условиям $0 \leqslant s < n$ и $t \equiv (t-1)s \pmod n$. Тогда группы $G_n(t,1)$ и $G_n(s,1)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу п. 3 леммы 1.1, $G_n(t,1) \cong G_n(n-t, n-t+1)$ и $G_n(s,1) \cong G_n(n-s, n-s+1)$. Таким образом, достаточно установить изоморфизм групп $G_n(n-t, n-t+1)$ и $G_n(n-s, n-s+1)$. Полагая $m = n-t$, $k = n-t+1$, $m' = n-s$ и $k' = n-s+1$, замечаем, что $r = (n, k-m) = 1$ и тем самым выполняется условие теоремы 1.1 о том, что k' делится на r. Полагая в системе (2) $i = 1$ и $j = t$, получаем

$$\begin{cases} 1+t \equiv 1+t+n \pmod n, \\ n-s \equiv 1+t(n-s+1)-1 \pmod n. \end{cases}$$

Первое сравнение очевидно, а второе эквивалентно сравнению $t \equiv s(t-1) \pmod n$, которое выполняется по условию. Следствие доказано.

ЛЕММА 1.4. *Пусть m — натуральное число, взаимно простое с n, и $\ell \geqslant 2$ — натуральное число такое, что $\ell m < n$. Тогда*

1) *группы $G_n(m, \ell m)$ и $G_n(1, \ell)$ изоморфны;*

2) *группы $G_n(\ell m, m)$ и $G_n(\ell, 1)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим группы

$$G = G_n(1, \ell) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i x_{i+1} = x_{i+\ell},\ i = 1, \ldots, n \rangle,$$

$$H = G_n(m, \ell m) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \mid y_i y_{i+m} = y_{i+\ell m},\ i = 1, \dots, n \rangle.$$

Определим отображение $\varphi : G \to H$ действием на порождающих, а именно,

$$\varphi(x_j) = y_{1+m(j-1)},\ \ j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что это отображение "на". Убедимся в том, что φ переводит соотношения группы G в соотношения группы H. В самом деле,

$$\varphi\left(x_i\, x_{i+1}\, x_{i+\ell}^{-1}\right) = y_{1+m(i-1)}\, y_{1+mi}\, y_{1+m(i+\ell-1)}^{-1} = y_j\, y_{j+m}\, y_{j+\ell m}^{-1},$$

где $j = 1+m(i-1)$. Следовательно, φ является гомоморфизмом. Поскольку φ обратимо, оно является требуемым изоморфизмом.

2) Рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Отмеченное свойство позволяет в некоторых случаях сводить изучение рассматриваемых групп к хорошо известным группам Фибоначчи и группам Сирадски.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. 1) *Группа $G_n(m, 2m)$ либо изоморфна группе Фибоначчи $F(2, n) \cong G_n(1, 2)$, либо распадается в свободное произведение.*

2) *Группа $G_n(2m, m)$ либо изоморфна группе Сирадски $S(n) \cong$ $\cong G_n(2, 1)$, либо распадается в свободное произведение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $(n, m) \neq 1$, то в силу п. 2 леммы 1.2 группа распадается в свободное произведение. Если $(n, m) = 1$, то в силу леммы 1.1 можно считать, что $2m < n$, и тогда, по лемме 1.4, $G_n(m, 2m)$ изоморфна $G_n(1, 2)$.

2) Рассмативается аналогично. Следствие доказано.

§ 2. Асферичность групп $G_n(m, k)$

При исследовании топологических свойств групп естественно возникает вопрос об асферичности их представлений (см. [33, 34]). В определенном смысле асферичность копредставления означает отсутствие нетривиальных тождеств среди соотношений.

Асферичность групп $G_n(t,1)$ изучалась в работе Гилберта и Хови [29]. Они установили признак асферичности для значений параметров (n,t), отличных от $\{(8,3),(9,4),(9,7)\}$. Отметим также, что группы $G_n(m,k)$ являются частным случаем групп, которые ввел Прищепов [25] и которые имеют следующее копредставление:

$$P(r,n,k,s,q) = \langle x_1,\ldots,x_n \mid x_i x_{i+q} \cdots x_{i+q(r-1)} = x_{i+k} x_{i+k+q} \cdots x_{i+k+q(s-1)} \rangle,$$

где $i = 1,\ldots,n$ и все индексы берутся по модулю n. Очевидно, $G_n(m,k) \cong \cong P(2,n,k,1,m)$. В [25] получены условия асферичности и аторичности для групп $P(r,n,k,s,q)$ в предположении $r > 2s > 0$. Полученные в этом параграфе результаты соответствуют случаю $r = 2$ и $s = 1$, и в этом смысле дополняют результаты [25]. Асферичность обобщенных групп Фибоначчи $F(r,2r+1)$, $F(r,2r)$ и некоторых других, не исследованных в [25], рассмотрена в [35].

В этом параграфе мы получим признак асферичности представлений $G_n(m,k)$, что обобщает результат из [29].

Следуя [33], напомним те основные факты об асферических группах и об асферичности относительных копредставлений, которые потребуются нам в дальнейшем.

Относительным копредставлением называется тройка $\mathbf{P} = \langle H, X|R\rangle$, где H — некоторая группа, $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — некоторое множество, а R — множество слов в алфавите $H \cup X \cup X^{-1}$ вида $r = y_1 h_1 y_2 h_2 \cdots y_n h_n$, где $y_i \in X \cup X^{-1}$, $h_i \in H$, циклически приведенных в следующем смысле: если $h_i = 1$, то $y_{i+1} \neq y_i^{-1}$, где все индексы рассматриваются по модулю n. Элементы из множества $X \cup X^{-1}$ будем называть X-*символами.*

Слова из R представляют элементы свободного произведения $H*\langle X\rangle$. Представление $\mathbf{P}$ задает группу, являющуюся фактор-группой группы $H * \langle X\rangle$ по нормальному замыканию множества R.

Для подмножества $S \subseteq R$ обозначим через S^* множество всех циклических перестановок слов из $S \cup S^{-1}$, начинающихся с X-символов.

Определим на R^* следующий оператор. Представим слово $r \in R^*$ в виде $r = sh$, где $h \in H$, а s начинается и заканчивается X-символами.

Положим $\overline{r} = s^{-1}h^{-1}$. Отметим, что $\overline{\overline{r}} = r$ и $\overline{r} \in R^*$.

Картинкой $\mathcal{P}$ называется замкнутый диск D^2, внутренность которого содержит конечное множество $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_d\}$ попарно непересекающихся замкнутых дисков Δ_i, $i = 1, \ldots, d$, и конечное множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ попарно непересекающихся компактных связных одномерных многообразий α_j (называемых *дугами*), $j = 1, \ldots, q$, таких, что объединие их границ принадлежит границам дисков, т. е. $\bigcup\limits_{j=1}^{q} \partial\alpha_j \subset \partial D^2 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{d} \partial\Delta_i$. *Границей* $\partial\mathcal{P}$ картинки $\mathcal{P}$ называется граница ∂D^2 диска D^2. *Углами* диска Δ_i, $i = 1, \ldots, d$, называются замыкания компонент связности множества $\partial\Delta_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{q} \alpha_j$, где $\partial\Delta_i$ — граница диска Δ_i. *Областями* картинки $\mathcal{P}$ называются замыкания компонент связности множества $D^2 \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{d} \Delta_i \cup \bigcup\limits_{j=1}^{q} \alpha_j\right)$. Односвязная область называется *внутренней*, если она не пересекается с $\partial\mathcal{P}$. Картинка $\mathcal{P}$ называется *нетривиальной*, если $d \geqslant 1$; *связной*, если множество $\bigcup\limits_{i=1}^{d} \Delta_i \cup \bigcup\limits_{j=1}^{q} \alpha_j$ является связным; *сферической*, если она нетривиальная и $\bigcup\limits_{j=1}^{q} \alpha_j \cap \partial\mathcal{P} = \varnothing$.

Фиксируя относительное копредставление $\mathbf{P} = \langle H, X | R\rangle$, будем говорить, что картинка $\mathcal{P}$ является *размеченной*, если выполняются следующие условия:

(i) каждая дуга снабжена нормальной ориентацией, изображенной на рисунке коротким вектором, трансверсальным дуге, и помечена элементом из множества $X \cup X^{-1}$;

(ii) каждый угол картинки $\mathcal{P}$ ориентирован в направлении против часовой стрелки и помечен элементом из H.

Если c — угол диска Δ размеченной картинки $\mathcal{P}$, то обозначим через $\omega(c)$ слово, возникающее при чтении меток на дугах и углах вдоль границы $\partial\Delta$ в направлении против часовой стрелки, начиная с метки на дуге, следующей за углом c. При этом метка t на дуге дает вклад t, если нормальная ориентация на дуге совпадает с направлением чтения, и вклад t^{-1} в противном случае.

Размеченная картинка $\mathcal{P}$ называется *картинкой над относительным* *копредставлением* $\mathbf{P}$, когда выпоненяются следующие условия:

(1) если c — угол в $\mathcal{P}$, то $\omega(c) \in R^*$;

(2) если $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — последовательность всех угловых меток, перечисленных в направлении против часовой стрелки вдоль границы некоторого внутреннего диска, то $h_1 h_2 \cdots h_m = 1$ в H.

Обычное копредставление $\mathbf{Q} = \langle X | R \rangle$ можно рассматривать как частный случай относительного копредставления при $H = \{1\}$. В этом случае каждый угол картинки имеет метку 1, и условие (2) автоматически выполняется. Игнорируя эти единичные метки углов, приходим к понятию (обычной) картинки над (обычным) копредставлением $\mathbf{Q}$ (см. [33]).

Вернемся к относительному копредставлению $\mathbf{P}$. *Диполем картинки* над $\mathbf{P}$ называется пара углов c, c' вместе с дугой α, соединяющей начало одного угла с концом другого так, что c и c' лежат в одной и той же области картинки, а $\omega(c') = \overline{\omega(c)}$.

Картинка над $\mathbf{P}$ называется *приведенной*, если она не содержит диполей. Относительное копредставление $\mathbf{P}$ называется *асферическим*, если каждая связная сферическая картинка над $\mathbf{P}$ содержит диполь (т. е. не является приведенной).

ЛЕММА 2.1. *Пусть $G = A * B$ — свободное произведение групп. Копредставление G является асферическим тогда и только тогда, когда хотя бы одно из копредставлений A и B является таковым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что картинка над G распадается на две не связанные между собой части. Одна из них соответствует картинке над копредставлением A, а вторая — над копредставлением B. Таким образом, картинка над G содержит диполь тогда и только тогда, когда это справедливо хотя бы для одной из картинок: над A или над B. Лемма доказана.

Таким образом, в дальнейшем при исследовании асферичности группы $G_n(m, k)$, можно исключить случаи, когда она распадается в свободное произведение или изоморфна $G_n(t, 1)$, так как вопрос об асферичности последней решен в [29]. Далее группу $G_n(m, k)$ будем называть *сильно* *несводимой*, если определяющие ее параметры удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0 < m < k < n, \\ (n, m, k) = 1, \\ (n, k) > 1, \ \ (n, k - m) > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Следующая теорема дает признак асферичности для сильно несводимых групп.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $G_n(m,k)$ — сильно несводимая группа. Группа $G_n(m,k)$ является асферической, если не выполняется ни одно из следующих условий*:

1) *найдется целое $\ell \geqslant 1$ такое, что n делит $\ell(2k - m)$ и $1/\ell + (n,k)/n + (n,k-m)/n > 1$;*

2) $n = k + m$;

3) $n = 2(k - m)$ и $(n, k) \leqslant n/2$;

4) $n = 2k$ и $(n, k - m) < n/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим расщепляемое расширение $Y_n(m,k)$ группы $G_n(m,k)$ посредством циклической группы порядка n с порождающим s. При этом s действует циклическим сдвигом на порождающих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ группы $G_n(m,k)$, т. е. $s^{-1} x_i s = x_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, n$. Отсюда имеем $s^{-i} x_1 s^i = x_{i+1}$. При этом первое соотношение группы $G_n(m,k)$ можно записать в виде $x_{1+m}^{-1} x_1^{-1} x_{1+k} = 1$, из которого получим $s^{-m} x s^m x s^{-k} x^{-1} s^k = 1$, где $x = x_1^{-1}$. Таким образом, группа $Y_n(m,k)$ (напомним, что $0 < m < k < n$) имеет копредставление

$$Y_n(m,k) = \langle x, s \mid s^n = 1, \, x s^m x s^{-k} x^{-1} s^{k-m} = 1 \rangle.$$

Заметим, что его может рассматривать как относительное копредставление, если положить $H = \langle s \mid s^n = 1 \rangle$.

Имеет место следующее свойство, аналогичное [29, лемма 3.1].

ЛЕММА 2.2. *Если копредставление $Y_n(m,k)$ является асферическим, то копредставление $G_n(m,k)$ также является асферическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P}$ — картинка над копредставлением $G_n(m,k)$. Тогда она содержит диски Δ_i, изображенные на рис. 1, соответствующие соотношениям $x_{i+m}^{-1} x_i^{-1} x_{i+k} = 1$.

Заменим каждый диск Δ_i картинкой $\mathcal{Q}_i$ над $Y_n(m,k)$, рассматриваемой как обычное (а не относительное) копредставление. Картинка $\mathcal{Q}_i$ приведена на рис. 2.

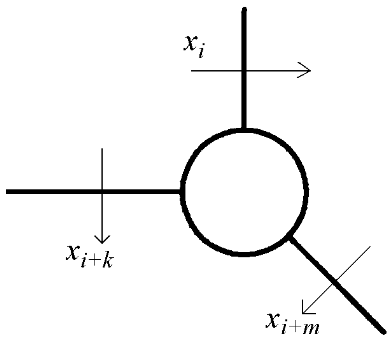

Рис. 1

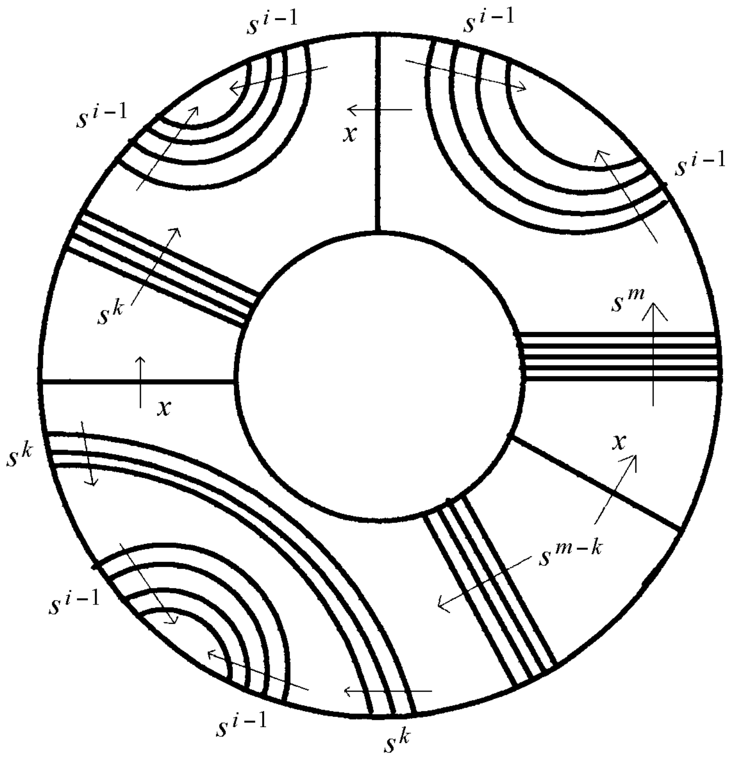

Рис. 2

При этом дуги, помеченные метками x_i, x_{i+m} и x_{i+k}, заменяются на семейства дуг, используя соотношения

$$\begin{aligned} x_i &= s^{-(i-1)}x^{-1}s^{i-1}, \\ x_{i+m} &= s^{-(i+m-1)}x^{-1}s^{i+m-1}, \\ x_{i+k} &= s^{-(i+k-1)}x^{-1}s^{i+k-1}, \end{aligned}$$

где $x = x_1^{-1}$. Вдоль границы $\partial\mathcal{Q}_i$ получаем соотношение

$$(s^{-(i+m-1)}xs^{i+m-1})(s^{-(i-1)}xs^{i-1})(s^{-(i+k-1)}x^{-1}s^{i+k-1}) = 1,$$

эквивалентное соотношению $x_{i+m}^{-1}x_i^{-1}x_{i+k} = 1$. Вдоль границы внутреннего диска получаем соотношение

$$xs^m xs^{-k}x^{-1}s^{k-m} = 1$$

из копредставления $Y_n(m,k)$. Те дуги картинки $\mathcal{Q}_i$, которые имеют оба конца на границе $\partial\mathcal{Q}_i$ и могут быть превращены в свободные окружности, удалим из картинки. Оставшиеся дуги с метками s заменим угловыми метками на диске (рис. 3).

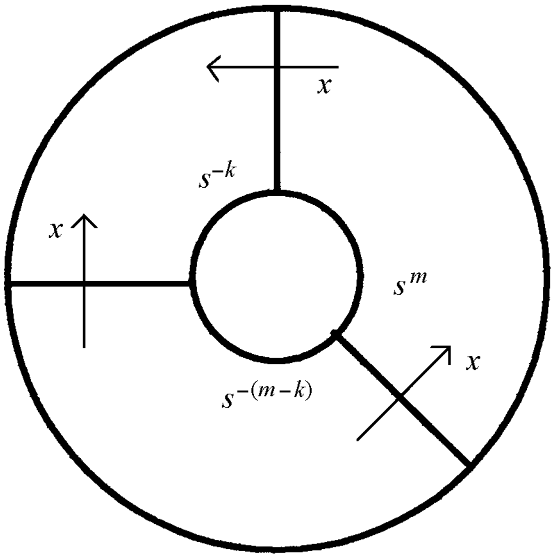

Рис. 3

Проделывая аналогичную процедуру для каждого диска исходной картинки $\mathcal{P}$ над копредставлением $G_n(m,k)$, получаем картинку $\mathcal{Q}$ над относительным копредставлением $Y_n(m,k)$. В силу предположения об асферичности $Y_n(m,k)$, картинка $\mathcal{Q}$ должна содержать диполь, т. е. пару противоположно ориентированных дисков, соединенных дугой картинки и задающих взаимнообратные слова (рис. 4).

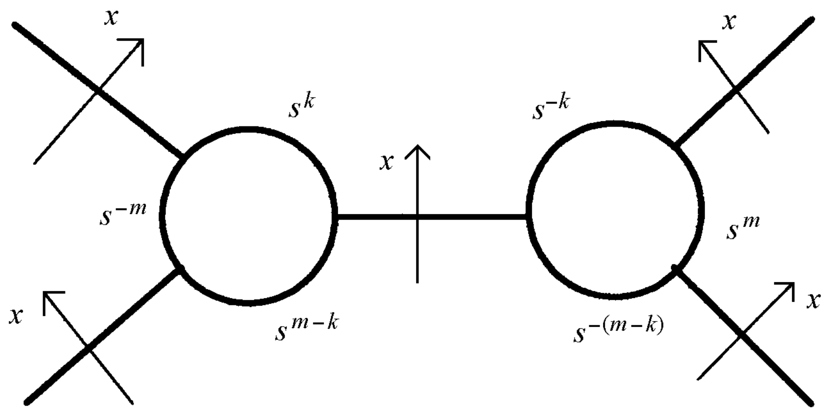

Рис. 4

В силу построения $\mathcal{Q}$ нетрудно заметить, что каждый такой диполь в $\mathcal{Q}$ возникает из пары одинаковых, но противоположно ориентированных дисков в $\mathcal{P}$, соединенных дугой с меткой x_i для некоторого i. Тогда и исходная картинка $\mathcal{P}$ будет содержать диполь, поскольку если в $\mathcal{Q}$ найдется пара дисков, которые можно сократить, то и в $\mathcal{P}$ найдется пара сокращаемых дисков. Таким образом, любая непустая картинка над копредставлением $G_n(m,k)$ эквивалентна картинке, имеющей на два диска меньше и, следовательно, представление является асферическим. Лемма доказана.

Для исследования асферичности групп $Y_n(m,k)$ воспользуемся следующим критерием Эджевета.

ТЕОРЕМА 2.2 [31]. *Пусть $G = \langle H, x \mid xaxbx^{-1}c\rangle$, где H — некоторая группа. Предположим, что порядки элементов b и c в H равны p и q соответственно, где $1 < q \leqslant p < \infty$, $(p,q) \neq (8,4),(9,3)$. Группа G является асферической тогда и только тогда, когда в H не выполняется ни одно из следующих условий:*

a) $(a^{-1}bac^{-1})^\ell = 1$ *для некоторого ℓ такого, что* $1/\ell + 1/p + 1/q > 1$;

b) $a^{-1}bac = 1$;

c) $a^{-1}b^2ac = 1$ *или* $a^{-1}bac^2 = 1$;

d) $q = 2$ *и* $a^{-1}b^{-1}aca^{-1}bac = 1$;

e) $q = 2$, $p = 3$ *и* $(a^{-1}bac)^2(a^{-1}b^{-1}ac)^2 = 1$;

f) $p = q = 3$ *и* $a^{-1}baca^{-1}b^{-1}ac^{-1} = 1$;

g) $q = 3$, $p = 6$ *и* $a^{-1}b^2ac^{-1} = 1$;

h) $q = p = 7$ *и либо* $a^{-1}b^2ac^{-1} = 1$, *либо* $a^{-1}b^{-1}ac^2 = 1$;

i) $q = p = 9$ *и либо* $a^{-1}b^2ac^{-1} = 1$, *либо* $a^{-1}b^{-1}ac^2 = 1$.

Продолжим доказательство теоремы 2.1.

Заметим, что определяющее соотношение $xs^mxs^{-k}x^{-1}s^{k-m} = 1$ из копредставления группы $Y_n(m,k)$ имеет вид, как в теореме Эджевета, где $H = \langle s \mid s^n = 1 \rangle$ и $a = s^m$, $b = s^{-k}$, $c = s^{k-m}$. При этом порядок элемента $b = s^{-k}$ равен $n/(n,k)$, а порядок элемента $c = s^{k-m}$ равен $n/(n,k-m)$. Обозначим $p = n/(n,k)$, $q = n/(n,k-m)$ и предположим, что $q \leqslant p$. В силу условия теоремы 2.1, $p > 1$ и $q > 1$.

В случае "a" имеем $a^{-1}bac^{-1} = s^{m-2k}$. Порядок элемента s^{2k-m} равен $n/(n, 2k-m)$. Если для некоторого натурального ℓ выполняется равенство $s^{\ell(2k-m)} = 1$, то $n \mid \ell(2k-m)$ и получаем условие 1 теоремы 2.1.

В случае "b" получаем $a^{-1}bac = s^{-m}$. Поскольку $0 < m < k < n$, равенство $s^{-m} = 1$ не имеет места.

В случае "c" имеем две возможности. Для того, чтобы $a^{-1}b^2ac = s^{-k-m} = 1$, должно выполняться $n \mid (k+m)$. Поскольку $0 < m < k < n$, это возможно лишь если $n = k+m$. Для того, чтобы $a^{-1}bac^2 = s^{k-2m} = 1$, должно выполняться $n \mid (k-2m)$. Поскольку $0 < k < m < n$, это возможно лишь при $k = 2m$, т. е. группа имеет вид $G_n(m, 2m)$. Если $(n,m) \neq 1$, то не выполняется условие $(n,m,k) = (n,m,2m) = 1$. Если $(n,m) = 1$, то не выполняется условие $(n,k-m) = (n,2m-m) = (n,m) > 1$. В обоих случаях группа не удовлетворяет предположениям теоремы 2.1. Таким образом, выполняется условие 2 теоремы 2.1.

Рассмотрим случай "d". Для того, чтобы $a^{-1}b^{-1}aca^{-1}bac = s^{2(k-m)} = 1$, должно выполняться $n \mid 2(k-m)$. Поскольку $0 < m < k < n$, это возможно лишь если $n = 2(k-m)$. Очевидно, условие $q = 2$ также будет выполняться. При этом условие $q \leqslant p$ примет вид $(n,k) \leqslant n/2$. Тем самым получаем условие 3 теоремы 2.1.

Рассмотрим случай "e". Поскольку $p = 3$, $q = 2$, то $n = 3(n,k) = 2(n,k-m)$. Следовательно, для некоторого целого $r \geqslant 1$ имеем $n = 6r$, $(n,k) = 2r$ и $(n,k-m) = 3r$. В силу условия $(n,m,k) = 1$ это возможно лишь если $r = 1$. Поскольку $0 < m < k < n$, то $n = 6$, $k = 4$, $m = 1$, что является частным случаем условия 3 теоремы 2.1.

Оставшиеся случаи "f"—"i" теоремы 2.2 не могут реализоваться в нашей ситуации. В самом деле, если $p = uq$ для некоторого целого $u \geqslant 1$, то $u(n,k) = (n, k-m)$. Обозначим $v = (n,k)$, тогда $v \mid n$ и $v \mid k$, где, в силу условий теоремы 2.1, $v > 1$. Поскольку $v \mid (n, k-m)$, то $v \mid m$, что противоречит предположению $(n,m,k) = 1$.

Отметим, что рассмотренные случаи соответствовали ограничению $q \leqslant p$, т. е. ситуации $n/(n,k) \leqslant n/(n,k-m)$.

Предположим теперь, что, наоборот, $n/(n,k) > n/(n,k-m)$. Соотношение $xs^m xs^{-k} x^{-1} s^{k-m} = 1$ группы $Y_n(m,k)$ равносильно соотношению $zs^{-m} zs^{m-k} z^{-1} s^k = 1$, где $z = x^{-1}$, которое имеет вид как в теореме Эджевета, если положить $a = s^{-m}$, $b = s^{m-k}$ и $c = s^k$. При этом порядок элемента b равен $n/(n,k-m)$, а порядок элемента c равен $n/(n,k)$. Пусть $p = n/(n,k)$ и $q = n/(n,k-m)$, тогда $q < p$. Тем самым снова выполняются условия теоремы Эджевета.

Как и выше, в случаях "a", "b" и "c" приходим к условиям 1 и 2 теоремы 2.1.

В случае "d" для того, чтобы $a^{-1}b^{-1}aca^{-1}bac = s^{2k} = 1$, должно выполняться $n \mid 2k$. Поскольку $1 < k < n$, это возможно лишь если $n = 2k$. Очевидно, условие $q = 2$ также будет выполняться. При этом условие $q \leqslant p$ примет вид $(n, k-m) < n/2$. Тем самым получено условие 4 теоремы 2.1.

Рассмотрим случай "e". Поскольку $p = 3$, $q = 2$, то $n = 3(n, k - m) = 2(n,k)$. Следовательно, для некоторого целого $r \geqslant 1$ имеем $n = 6r$, $(n,k) = 3r$ и $(n, k-m) = 2r$. В силу условия $(n,m,k) = 1$ это возможно лишь если $r = 1$. Поскольку $0 < m < k < n$, то $n = 6$, $k = 3$, $m = 1$, что является частным случаем условия 4 теоремы 2.1.

Оставшиеся случаи "f"—"i" теоремы 2.2 не могут реализоваться по соображениям, аналогичным вышеприведенным.

Суммируя рассмотренные случаи и применяя лемму 2.2, получаем утверждение теоремы 2.1.

§3. Группы с нечетным числом порождающих

В [1] был поставлен вопрос о том, при каких значениях n, m, k группы $G_n(m,k)$ являются фундаментальными группами трехмерных многообразий. Как отмечено в § 1, среди групп $G_n(m,k)$ содержатся группы Фибоначчи и группы Сирадски, а соответствующие им 3-многообразия описаны в [21] и [27] соответственно.

Следующий результат, обобщающий результат для групп Фибоначчи из [24], показывает, что во многих случаях рассматриваемые нами группы не могут быть группами гиперболических 3-многообразий (см. [37] о геометрических структурах на 3-многообразиях).

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть n нечетно, $k-m$ четно и $(m-2k,n)=1$. Тогда группа $G_n(m,k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда (в частности, 3-многообразия) конечного объема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя метод из работ [24, 36], проведем доказательство от противного. Предположим, что $G_n(m,k)$ — группа гиперболического 3-орбифолда и, тем самым, реализуется как группа изометрий трехмерного пространства Лобачевского $\mathbf{H}^3$. В силу предположения конечности объема фактор-пространства $\mathbf{H}^3/G_n(m,k)$ группа $G_n(m,k)$ является кристаллографической группой движений [39]. Рассмотрим расщепляемое расширение $W_n(m,k)$ группы $G_n(m,k)$ циклическим автоморфизмом $s : x_i \to x_{i+1}$ для $i=1,2,\ldots,n$. Обозначим его порядок через n_1. Ясно, что $n_1 \mid n$. Напомним [39, гл. 7], что в силу свойства "сильной жесткости" любой изоморфизм кристаллографических групп движений пространства Лобачевского индуцируется сопряжением в группе изометрий этого пространства. Обозначим сопрягающую изометрию также через s.

Положим

$$\begin{aligned} W_n(m,k) &= \langle G_n(m,k), s\rangle \\ &= \langle x_1,\ldots,x_n,s \mid s^{n_1}=1,\ x_1s^{-m}x_1s^m = s^{-k}x_1s^k, \\ &\quad x_{i+1}=s^{-1}x_is,\ i=1,\ldots,n\rangle. \end{aligned}$$

Применяя преобразования Титце, получаем

$$W_n(m,k) = \langle x,s \mid s^{n_1}=1,\, xs^{-m}xs^m = s^{-k}xs^k\rangle,$$

где $x = x_1$. В группе $W = W_n(m,k)$ рассмотрим вербальную подгруппу, порожденную квадратами элементов, т. е. $W^2 = \langle w^2 \mid w \in W\rangle$. Из второго соотношения группы W имеем

$$s^kxs^{-m} = xs^{k-m}x^{-1}.$$

Так как $k-m$ четно, то $s^{k-m} \in W^2$. Следовательно, $xs^{k-m}x^{-1} \in W^2$, а тогда $s^kxs^{-m} \in W^2$, т. е. $x \in W^2$. В силу нечетности n_1 имеем $s \in W^2$. Таким образом, группа W, являющаяся по предположению группой гиперболического 3-орбифолда, состоит только из сохраняющих ориентацию изометрий пространства Лобачевского. Напомним [37], что полная группа сохраняющих ориентацию изометрий пространства Лобачевского изоморфна $PSL_2(\mathbf{C})$. Следовательно, W является подгруппой $PSL_2(\mathbf{C})$.

Так как группа W содержится в $PSL_2(\mathbf{C})$, ей соответствует подгруппа в $SL_2(\mathbf{C})$, являющаяся ее прообразом при каноническом гомоморфизме. Пусть порождающему x группы W соответствует матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{C})$. Поскольку мы предположили, что W является группой 3-орбифолда конечного объема, она не будет элементарной (в смысле теории клейновых групп [38]), а потому $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

Порождающему $s \in W$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \in$ $\in SL_2(\mathbf{C})$, где ζ — примитивный корень из 1 степени $2n_1$. Тогда соотношение

$$xs^{-m}xs^m = s^{-k}xs^k$$

индуцирует соотношение для матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{-m} & 0 \\ 0 & \zeta^{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{m} & 0 \\ 0 & \zeta^{-m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \zeta^{-k} & 0 \\ 0 & \zeta^{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{k} & 0 \\ 0 & \zeta^{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Перемножая матрицы в левой и правой частях, получим равенство

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma\zeta^{2m} & \beta(\alpha\zeta^{-2m} + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta\zeta^{2m}) & \beta\gamma\zeta^{-2m} + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\alpha & \varepsilon\beta\zeta^{-2k} \\ \varepsilon\gamma\zeta^{2k} & \varepsilon\delta \end{pmatrix}.$$

Отсюда, поскольку $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} \alpha + \delta\zeta^{2m} = \varepsilon\zeta^{2k}, \\ \alpha\zeta^{-2m} + \delta = \varepsilon\zeta^{-2k}. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на ζ^{2m}, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \alpha + \delta\zeta^{2m} = \varepsilon\zeta^{2k}, \\ \alpha + \delta\zeta^{2m} = \varepsilon\zeta^{2(m-k)}. \end{cases}$$

Из последней системы вытекает равенство $\zeta^{2(m-2k)} = 1$. С другой стороны, $\zeta^{2n_1} = 1$. Поскольку мы предполагали $(n, m-2k) = 1$, получаем противоречие. Следовательно, $G_n(m,k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда конечного объема. Теорема доказана.

Напомним, что группы $G_n(1,2)$ с четным числом порождающих $n \geqslant 8$ являются группами гиперболических 3-многообразий, а значит, не содержат элементов конечного порядка. В случае нечетного n ситуация иная, а именно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Группа $G_n(m,2m)$ с нечетным числом порождающих имеет кручение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1.2 группа $G_n(m,2m)$ либо изоморфна группе Фибоначчи $G_n(1,2)$, либо разлагается в свободное произведение групп Фибоначчи с меньшим числом порождающих, которое также нечетно. Таким образом, далее достаточно рассматривать лишь группы вида $G_n(1,2)$.

Рассмотрим в $G_n(1,2)$ элемент $w = \prod_{i=0}^{2n-1} x_{1+i}$, где все индексы берутся по модулю n. Покажем, что он является элементом второго порядка. В самом деле, представим w в виде $w = uv$, где

$$u = \prod_{i=0}^{n-1} x_{1+im} = \prod_{i=0}^{2n_1} x_{1+im},$$

$$v = \prod_{i=n}^{2n-1} x_{1+i} = \prod_{i=0}^{n-1} x_{1+(n+i)} = \prod_{i=0}^{2n_1} x_{1+n+i} = \prod_{i=0}^{2n_1} x_{1+i} = u,$$

поскольку все индексы берутся по модулю n. Итак, $w = u^2$.

В силу соотношения $x_i x_{i+1} = x_{i+2}$, которое можно также переписать в виде $x_{i+1} = x_i^{-1} x_{i+2}$, имеем

$$\begin{aligned} w = \prod_{i=0}^{2n-1} x_{1+i} = \prod_{i=0}^{4n_1+1} x_{1+i} = \prod_{i=0}^{2n_1} (x_{1+2i} x_{2+2i}) \\ = \prod_{i=0}^{2n_1} x_{3+2i} = \prod_{i=0}^{2n_1} \left(x_{2+2i)}^{-1} x_{4+2i} \right) \\ = x_2^{-1} x_{4+4n_1} = x_2^{-1} x_{2+2(2n_1+1)} = x_2^{-1} x_{2+2n} = x_2^{-1} x_2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $u^2 = 1$. По существу, идея рассмотрения элемента такого вида восходит к [6].

Покажем, что элемент u является тривиальным тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, \ldots, n$ порождающие x_j и x_{j-1} коммутируют. В самом деле, условие $u = 1$ означает, что при любом $j = 1, \ldots, n$ выполняется соотношение

$$x_j \, x_{j+1} \, x_{j+2} \, \cdots \, x_{j+(2n_1-2)} \, x_{j+(2n_1-1)} \, x_{j+2n_1} = 1.$$

Последовательно используя соотношение $x_i x_{i+1} = x_{i+2}$, получаем

$$x_{j+2}^2 \, x_{j+3} \, \cdots \, x_{j+(2n_1-2)} \, x_{j+(2n_1-1)} \, x_{j+2n_1} = 1,$$

$$x_{j+2} \, x_{j+4}^2 \, \cdots \, x_{j+(2n_1-2)} \, x_{j+(2n_1-1)} \, x_{j+2n_1} = 1,$$

$$x_{j+2}\, x_{j+4} \, \cdots \, x_{j+(2n_1-2)}\, x_{j+2n_1}^2 = 1.$$

Отсюда

$$\left(x_{j+1}^{-1} x_{j+3}\right) \left(x_{j+3}^{-1} x_{j+5}\right) \cdots \left(x_{j+(2n_1-1)}^{-1} x_{j+(2n_1+1)}\right) x_{j+2n_1} = 1,$$

следовательно,

$$x_{j+1}^{-1}\, x_{j+2n_1+1}\, x_{j+2n_1} = 1.$$

Все индексы берутся по модулю $n = 2n_1 + 1$, поэтому $x_j\, x_{j-1} = x_{j+1}$. Вспоминая, что $x_{j-1}\, x_j = x_{j+1}$, получаем, что порождающие x_j и x_{j-1} коммутируют при всех $j = 1, \ldots, n$.

Покажем, что любые два порождающих x_i и x_{i+p} коммутируют. Для $p = 1$ это уже установлено. Предположим, что при $q < p$ порождающие x_i и x_{i+q} коммутируют. Тогда

$$x_i x_{i+p} = x_i x_{i+p-2} x_{i+p-1} = x_{i+p-2} x_i x_{i+p-1} = x_{i+p-2} x_{i+p-1} x_i = x_{i+p} x_i.$$

Таким образом, элемент u тривиален тогда и только тогда, когда группа $G_n(1,2)$ абелева. Напомним, что если n нечетно, группа Фибоначчи $F(2,n) = G_n(1,2)$: конечна при $n = 1, 3, 5, 7$, а значит, имеет кручение; бесконечна при $n \geqslant 9$ (см., напр., [35]). Так как ее абелизатор конечен [6], она не может быть абелевой. Таким образом, элемент u нетривиален, а следовательно, его порядок равен двум. Утверждение доказано.

Поскольку в приведенных выше рассуждениях важную роль играло свойство коммутативности группы, напомним, что в силу результата Райдемайстера (см., напр., [3, гл. 5]) полный список абелевых групп, которые могут выступать в роли групп 3-многообразий, состоит из $\mathbf{Z}_n$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2$.

§ 4. О конечности групп $G_n(m,k)$

Изучение групп Фибоначчи $F(2,n) \cong G_n(1,2)$ началось в 1965 г. с вопроса Конвея [5] о конечности группы $F(2,5)$. Обзор результатов о группах Фибоначчи $F(2,n)$ дан в [9]: эти группы конечны тогда и только тогда, когда $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7$. При этом, $F(2,1) \cong F(2,2) \cong \langle \mathbf{1} \rangle$, $F(2,3) \cong Q_8$ (группе кватернионов порядка 8), $F(2,4) \cong \mathbf{Z}_5$, $F(2,5) \cong \mathbf{Z}_{11}$, $F(2,7) \cong \mathbf{Z}_{29}$.

Доказательство бесконечности групп $F(2,n)$ для четных $n \geqslant 6$ содержится в [8, 21], а единое доказательство для нечетных $n \geqslant 9$ приводится, напр., в [35].

При изучении групп Кавикиоли—Хагенбарта—Реповша естественно возникает следующий

ВОПРОС 1. При каких значениях параметров n, m, k с естественными ограничениями $0 < m < k < n$ и $(n, m, k) = 1$ группы $G_n(m,k)$ конечны?

Программа GAP [32] позволяет найти порядки групп $G_n(m,k)$ для малых значений n.

При $n = 3$ имеем единственную возможность $G_3(1,2) \cong F(2,3) \cong Q_8$. При $n = 4$ имеем $G_4(1,3) \cong G_4(1,2) \cong F(2,4) \cong \mathbf{Z}_5$ (см. пример 1.1), $|G_4(2,3)| = 24$, $|G_4^{\mathrm{ab}}(2,3)| = 3$, $G_4(2,3)$ трехступенно разрешима. Другие результаты отражены в таблицах.

В этих таблицах на пересечении m-ой строки и k-ого столбца указан порядок группы $G_n(m,k)$. Символ "—" означает, что параметры m и k не удовлетворяют неравенству $m < k$, символ "?" — что порядок не известен.

$n = 5$	$m \setminus k$	2	3	4
	1	11	120	11
	2	—	11	11
	3	—	—	120

$n = 6$	$m \setminus k$	2	3	4	5
	1	∞	7	7	∞
	2	—	9	∞	9
	3	—	—	56	56
	4	—	—	—	∞

$n = 7$	$m \setminus k$	2	3	4	5	6
	1	29	?	?	?	29
	2	—	?	29	29	?
	3	—	—	29	?	29
	4	—	—	—	?	?
	5	—	—	—	—	?

$n=8$	$m \setminus k$	2	3	4	5	6	7
	1	∞	295245	17	17	295245	?
	2	—	?	∞	?	∞	?
	3	—	—	17	?	∞	17
	4	—	—	—	8	∞	?
	5	—	—	—	—	295245	295245
	6	—	—	—	—	—	?

Группа $G_6(1,2)$ есть группа Фибоначчи $F(2,6)$, которая бесконечна [21], группа $G_6(2,4)$ изоморфна $G_3(1,2) * G_3(1,2)$ и также бесконечна. Далее, $G_8(1,2) \cong F(2,8) \cong G_8(3,6)$, и потому $G_8(1,2)$ бесконечна, $G_8(2,4) \cong \cong G_4(1,2) * G_4(1,2)$, $G_8(2,6) \cong G_4(1,3) * G_4(1,3)$, $G_8(4,6) \cong G_4(2,3) * *G_4(2,3)$. Группа $G = G_6(3,4)$, имеющая порядок 56, является метабелевой, т. е. ее второй коммутант G'' тривиален, $|G'| = 8$, $G/G' \cong \mathbf{Z}_7$. Группа $G_5(1,3)$ совпадает со своим коммутантом. Кроме того, группа $G_6(4,5)$ изоморфна $G_6(2,1)$ и имеет бесконечный абелизатор [30], а потому бесконечна.

Рассмотрим далее вопрос об изоморфизме групп.

ВОПРОС 2. Вычислить функцию $f(n)$, сопоставляющую всякому натуральному $n \geqslant 3$ число неизоморфных групп $G_n(m,k)$, где $0 < m < k < n$.

Из рассмотренных выше случаев следует, что $f(3) = 1$, $f(4) = 2$ и $f(5) = 2$.

При $n = 6$ из теоремы 1.1 и приведенной ниже таблицы абелизаторов получаем, что имеется шесть попарно неизоморфных типов групп: $G_6(1,2) \cong G_6(1,5)$, $G_6(1,3) \cong G_6(1,4)$, $G_6(2,3) \cong G_6(2,5)$, $G_6(2,4)$, $G_6(3,4) \cong G_6(3,5)$, $G_6(4,5)$. Таким образом, $f(6) = 6$.

При $n = 7$ из теоремы 1.1 и приведенной ниже таблицы абелизаторов получаем, что имеется три класса попарно изоморфных групп:

1) $\{G_7(1,2), G_7(1,6), G_7(2,4), G_7(2,5), G_7(3,4), G_7(3,6)\}$,

2) $\{G_7(1,3), G_7(1,5), G_7(2,3), G_7(2,6), G_7(4,5), G_7(4,6)\}$,

3) $\{G_7(1,4), G_7(3,5), G_7(5,6)\}$.

Таким образом, $f(7) = 3$.

$n=6$	$m \setminus k$	2	3	4	5
	1	$\mathbf{Z}_4^2$	$\mathbf{Z}_7$	$\mathbf{Z}_7$	$\mathbf{Z}_4^2$
	2	—	$\mathbf{Z}_9$	$\mathbf{Z}_2^4$	$\mathbf{Z}_9$
	3	—	—	$\mathbf{Z}_7$	$\mathbf{Z}_7$
	4	—	—	—	$\mathbf{Z}^2$

$n=7$	$m \setminus k$	2	3	4	5	6
	1	$\mathbf{Z}_{29}$	$\mathbf{Z}_2^3$	1	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_{29}$
	2	—	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_{29}$	$\mathbf{Z}_{29}$	$\mathbf{Z}_2^3$
	3	—	—	$\mathbf{Z}_{29}$	1	$\mathbf{Z}_{29}$
	4	—	—	—	$\mathbf{Z}_2^3$	$\mathbf{Z}_2^3$
	5	—	—	—	—	1

§ 5. Некоторые открытые вопросы

В заключение сформулируем еще ряд вопросов, связанных с группами Кавикиоли—Хагенбарта—Реповша.

ВОПРОС 3. Чему равен ранг группы $G_n(m,k)$, $0 \leqslant m < k < n$?

ВОПРОС 4. При каких значениях n, m, k группы $G_n(m,k)$ являются линейными?

ВОПРОС 5. Могут ли группы $G_n(m,k)$ и $G_{n'}(m',k')$ быть изоморфными при $n \neq n'$?

Известно [6], что абелизатор группы Фибоначчи $F(2,n)$ конечен и его порядок определяется равенством $f_n - 1 - (-1)^n$, где f_n — член последовательности чисел Фибоначчи.

ВОПРОС 6. Существует ли аналогичная формула, выражающая порядок абелизатора группы $G_n(m,k)$ в случае, если он конечен? Может ли такая формула быть получена в терминах числовой последовательности, обобщающей числа Фибоначчи?

В заключение авторы выражают признательность участникам семинара ”Эварист Галуа“ за внимание к работе, О. В. Богопольскому и М. В. Нещадиму за полезные обсуждения, а также А. В. Тимофеенко, благодаря которому были проведены компьютерные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Cavicchioli, F. Hegenbarth, D. Repovš*, On manifold spines and cyclic presentations of groups, in: Knot Theory (Banach Cent. Publ., **42**), Warsaw, PWN, 1998, 49—56.
2. *У. Масси, Дж. Столлингс*, Алгебраическая топология, М., Мир, 1977.
3. *Д. Коллинз, Х. Цишанг*, Комбинаторная теория групп и фундаментальные группы, в кн. "Алгебра-7" (Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **58**), М., ВИНИТИ, 1990, 5—190.
4. *J. Stallings*, On the recursiveness of sets of presentations of 3-manifold groups, Fundam. Math., **51** (1962/63), 191—194.
5. *J. Conway*, Advanced problem 5327, Am. Math. Mon., **72** (1965), 915.
6. *D. L. Johnson*, Topics in the theory of group presentations (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., **42**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1980.
7. *D. L. Johnson, J. W. Wamsley, D. Wright*, The Fibonacci Groups, Proc. London Math. Soc., III. Ser., **29**, N 4 (1974), 577—592.
8. *R. Thomas*, The Fibonacci groups $F(2, 2m)$, Bull. London Math. Soc., **21**, N 5 (92) (1989), 463—465.
9. *R. Thomas*, The Fibonacci groups revised, in: Geometry of Banach spaces. Proc. conf. held in Strobol, Austria (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., **160**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1989, 445—456.
10. *A. Cavicchioli, F. Spaggiari*, The classification of 3-manifolds with spines related to Fibonacci groups, in: Algebraic topology. Homotopy and group homology (Lect. Notes Math., **1509**), Berlin a. o., Springer-Verlag, 1992, 50—78.
11. *M. J. Dunwoody*, Cyclic presentations and 3-manifolds, in: Proc. inter. conf. "Groups-Korea′94", Walter de Gruyter, Berlin—New York, 1995, 47—55.
12. *A. C. Kim*, On the Fibonacci group and related topics, in: Proc. conf. algebra, 1991, Barnaul, Russia (Contemp. Math., **184**), Providence, RI, Am. Math. Soc, 1995, 231—235.
13. *A. C. Kim, Y. Kim, A. Vesnin*, On a class of cyclically presented groups, Proc. inter. conf. "Groups-Korea 98", Walter de Gruyter, Berlin—New York, 2000, 211—220.
14. *G. Kim, Y. Kim, A. Vesnin*, The knot 5_2 and cyclically presented groups, J. Korean Math. Soc., **35** (1998), 961—980.

15. *А. Ю. Веснин, А. Ч. Ким*, Дробные группы Фибоначчи и многообразия, Сиб. матем. журнал, **39**, N 4 (1998), 765—775.

16. *C. Maclachlan, A. W. Reid*, Generalised Fibonacci manifolds, Transform. Groups, **2**, N 2 (1997), 165—182.

17. *M. Takahashi*, On the presentations of the fundamental groups of 3-manifolds, Tsukuba J. Math., **13** (1989), 175—189.

18. *P. Bandieri, A. C. Kim, M. Mulazzani*, On the cyclic coverings of the knot 5_2, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser., **42**, N 3 (1999), 575—587.

19. *M. R. Casali*, Fundamental groups of branched covering spaces of S^3, Ann. Univ. Ferrara, Nuova Ser., Sez. VII, **33** (1987), 247—258.

20. *A. Cavicchioli, R. Ruini, F. Spaggiari*, Cyclic branched coverings of 2-bridge knots, Revista Mat. Complut., **12** (1999), 383—416.

21. *H. Helling, A. C. Kim, J. L. Mennicke*, A geometric study of Fibonacci groups, J. Lie Theory, **8** (1998), 1—23.

22. *H. Helling, A. C. Kim, J. L. Mennicke*, Some honey-combs in hyperbolic 3-space, Commun. Algebra, **23**, N 14 (1995), 5169—5206.

23. *J. Minkus*, The branched cyclic coverings of 2 bridge knots and links, Mem. Am. Math. Soc., **35**, N 255 (1982), 1—68.

24. *C. Maclachlan*, Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds, in: Combinatorial and geometric group theory. Edinburg, 1993 (Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser., **204**), 1995, 233—238.

25. *M. I. Prischepov*, Asphericity, atoricity, and symmetrically presented groups, Commun. Algebra, **23**, N 13 (1995), 5095—5117.

26. *A. Sieradski*, Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups, Invent. Math., **84**, N 1 (1986), 121—139.

27. *A. Cavicchioli, F. Hegenbarth, A. C. Kim*, A geometric study of Sieradski groups, Algebra Colloq., **5**, N 2 (1998), 203—217.

28. *R. Thomas*, On a question of Kim concerning certain group presentations, Bull. Korean Math. Soc., **28** (1991), 219—244.

29. *N. Gilbert, J. Howie*, LOG groups and cyclically presented groups, J. Algebra, **174**, N 1 (1995), 118—131.

30. *R. W. K. Odoni*, Some Diophantine problems arising in the theory of cyclically presented groups, Glasg. Math. J., **41**, N 2 (1999), 157—166.

31. *M. Edjvet*, On the asphericity of one-relator relative presentations, Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math., **124** (1994), 713—728.

32. GAP: Groups, algorithms and programming. A computer program available from http://www.dcs.st-and.ac.uk/gap.

33. *W. A. Bogley, S. J. Pride*, Aspherical relative presentations, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser., **35**, N 1 (1992), 1—39.

34. *А. Ю. Ольшанский*, Геометрия определяющих соотношений в группах, М., Наука, 1989.

35. *C. P. Chalk*, Fibonacci groups with aspherical presentations, Commun. Algebra, **26**, N 5 (1998), 1511—1546.

36. *A. Szczepański, A. Vesnin*, On generalized Fibonacci groups with odd number of generators, Commun. Algebra, **28**, N 2 (2000), 959—965.

37. *П. Скотт*, Геометрии на трехмерных многообразиях, М., Мир, 1986.

38. *А. Бердон*, Геометрия дискретных групп, М., Наука, 1986.

39. *Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман*, Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны, в кн. "Геометрия-2" (Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, **29**), М., ВИНИТИ, 1988, 147—259.

40. *J. L. Mennicke*, On Fibonacci groups and some other groups, in: Groups-Korea 1988 (Lect. Note Math., **1398**), 1988, 117—123.

Адреса авторов:

Поступило 12 февраля 2001 г.

БАРДАКОВ Валерий Георгиевич,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН,
e-mail: bardakov@math.nsc.ru,

ВЕСНИН Андрей Юрьевич,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: vesnin@math.nsc.ru