Т. М. Железная, Об ограничениях неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n в характеристике 0 на подгруппы типа $A_1 \times A_1$,
Тр. Ин-та матем., 2007, том 15, номер 1, 56–67

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2007. Том 15. № 1. С. 56–67

УДК 512.542

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП ТИПА A_n В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 0 НА ПОДГРУППЫ ТИПА $A_1 \times A_1$

Т. М. Железная

Институт математики НАН Беларуси
Поступила 05.01.2006

Введение. В данной работе изучаются ограничения неприводимых представлений алгебраических групп типа A_n $(n > 2)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 на естественные подгруппы типа $A_1 \times A_1$, найдены их композиционные факторы. При $n = 3$ определены также кратности этих факторов. Назовем подгруппу H полупростой алгебраической группы G естественной, если H порождается корневыми подгруппами группы G, ассоциированными с определенными простыми и противоположными им корнями.

Хорошо известны "правила ветвления" [1] для явного описания ограничений неприводимых представлений простых классических групп ранга n на естественные подгруппы того же типа и ранга $n-1$. При помощи этих правил в принципе возможно описание ограничений таких представлений на произвольные естественные подгруппы (в характеристике 0) [1, 2]. Однако для решения многих задач предпочтительны явные формулы для определения композиционных факторов этих ограничений для заданной подгруппы в терминах старшего веса исходного представления. Так, например, в работе [3] описаны ограничения неприводимых представлений классических алгебраических групп на корневые A_1-подгруппы. Результаты об ограничениях на подгруппы типа $A_1 \times A_1$ в характеристике 0 планируется использовать для решения аналогичной задачи в положительной характеристике. Заметим, что ввиду объективной сложности проблемы в этой ситуации не приходится ожидать в ближайшее время получения явных формул, аналогичных классическим правилам ветвления для подгрупп ранга $n-1$. Поэтому целесообразно искать их асимптотические аналоги, для чего необходимо изучать ограничения представлений на естественные подгруппы относительно малых рангов.

Далее K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0; $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbf{N}$ — множество неотрицательных целых чисел; G — односвязная алгебраическая группа типа A_n над K; $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — фундаментальные веса и база системы корней группы G; $V(\omega)$ — неприводимый рациональный G-модуль со старшим весом $\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega_i$, нумерация соответствует Бурбаки [4], при $n = 3$ положим $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$; $\Pi(\mu)$ — множество всех весов модуля $V(\mu)$; $\mathrm{ch}(\mu)$ и $\mathrm{ch}(V)$ — формальные характеры доминантного веса μ и модуля V. Множество весов группы $A_1(K) \times A_1(K)$ можно отождествить с множеством пар целых чисел при помощи отображения $x_1(\omega_1, 0) + x_2(0, \omega_1) \mapsto (x_1, x_2)$, где ω_1 — фундаментальный вес группы $A_1(K)$; множество доминантных весов — с множеством $\mathbf{N^2}$. Для произвольной алгебраической группы Γ будем обозначать через $\mathrm{Irr}\, V$ множество старших весов композиционных факторов Γ-модуля V; V_Σ — ограничение Γ-модуля V на подгруппу $\Sigma \subseteq \Gamma$; $\mathrm{Irr}_\Sigma \omega = \mathrm{Irr}(V_\Sigma)$.

Далее пусть H — естественная подгруппа группы G типа $A_1(K) \times A_1(K)$. Учитывая сделанное выше отождествление, запишем старший вес $\lambda = x_1(\omega_1, 0) + x_2(0, \omega_1)$ произвольного неприводимого H-модуля $V(\lambda)$ в виде пары неотрицательных целых чисел (x_1, x_2).

Для H-модуля $V(\mu)$ запись $V(\mu) \to \sum_{i,k} n_{ik}(x_{ik}, y_{ik})$ будет означать, что $\mathrm{ch}(\mu) = \sum_{i,k} n_{ik}\,\mathrm{ch}(x_{ik}, y_{ik})$, где $n_{i,k} \in \mathbf{Z}$, $(x_{i,k}, y_{i,k}) \in \mathbf{N^2}$; запись $V \to M_1 \pm M_2 \pm \ldots \pm M_j$ будет означать, что $\mathrm{ch}(V) = \mathrm{ch}(M_1) \pm \mathrm{ch}(M_2) \ldots \pm \mathrm{ch}(M_j)$.

Теорема 1. *Пусть* $n = 3$, $G = A_3(K)$. *Тогда*

$$\mathrm{Irr}_H(\omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{N^2} |\ 0 \le x_1, x_2 \le a + b + c,$$

$$|a - c| \le x_1 + x_2 \le a + 2b + c,\ x_1 + x_2 \equiv a - c (\mathrm{mod}\, 2)\}. \qquad (1)$$

При $a \ge c$ *имеем*

$$V(\omega)_H = \sum_{k=0}^{b-1} (k+1) \sum_{j=0}^{c} \sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j} (a + 2b + c - 2k - i, i) + (b+1) \sum_{k=0}^{c} \sum_{j=0}^{c-k} \sum_{i=j}^{a-k+j} (a + c - 2k - i, i). \quad (2)$$

Для решения аналогичной задачи в положительной характеристике удобнее пользоваться следующим вариантом формулы (2), дающим явные значения кратностей композиционных факторов:

$$V(\omega)_H = \sum_{k=0}^{b+c} \sum_{i=\max(0,b-k)}^{a+b+c-k+\min(0,b-k)} \mathbf{C}_{ik}(a + 2b + c - 2k - i, i), \qquad (3)$$

где для $0 \le k \le b + c$

$$\mathbf{C}_{ik} = \begin{cases} \min(b+1, k+1)(i + 1 - \max(0, b-k)), & \text{при} \quad \max(0, b-k) \le i \le b + c - k, \\ \min(b+1, k+1)(c + 1 + \min(0, b-k)), & \text{при} \quad b + c + 1 - k \le i \le a + b - 1 - k, \\ \min(b+1, k+1)(a + b + c - k + \min(0, b-k) - i + 1), & \\ \qquad\qquad \text{при} \quad a + b - k \le i \le a + b + c - k + \min(0, b-k). & \end{cases} \qquad (4)$$

При $n \ge 4$ множество $\mathrm{Irr}_H(\omega)$ выглядит значительно проще.

Теорема 2. *Пусть* $\mathit{char} K = 0$, $n \ge 4$, $G = A_n(K)$. *Тогда*

$$\mathrm{Irr}_H(\omega) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{N^2} |\ 0 \le x_1,\ x_2 \le m_1 + \ldots + m_n,\ 0 \le x_1 + x_2 \le m_1 + 2m_2 + \ldots + 2m_{n-1} + m_n\}.$$

Введем еще несколько обозначений. Если $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — корни группы G, то $H(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — подгруппа в G, порожденная корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и $-\beta_1, \ldots, -\beta_k$. При рассмотрении подгрупп такого вида корни $\beta_1, \ldots, \beta_k$ выбираются так, что они составляют базу корневой системы подгруппы $H(\beta_1, \ldots, \beta_k)$, и фундаментальные веса этой подгруппы рассматриваются относительно данной базы. Пусть ε_i, $1 \le i \le n+1$, — веса естественных $GL_{n+1}(K)$- и $SL_{n+1}(K)$-модулей. Обозначим $\sum_{i=1}^{n+1} a_i \varepsilon_i$ через $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Если $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ — доминантный вес естественного $GL_{n+1}(K)$-модуля и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — доминантный вес естественного $GL_n(K)$-модуля, то положим $b < a$, если $a_1 \ge b_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge b_n \ge a_{n+1}$. Имеем $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n+1} = 0$, $\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, для группы $SL_{n+1}(K)$.

1. Вспомогательные леммы. В этом пункте $G = A_3(K)$. Пусть S^k — k-я симметрическая степень естественного $SL_4(K)$-модуля при $k \ge 1$ и тривиальный $SL_4(K)$-модуль при $k = 0$. При $k < 0$ положим $\mathrm{ch}(S^k) = 0$. Известно, что $V(a\omega_1) = S^a$.

Лемма 1 [2]. *Пусть* $\omega = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$. *Тогда*

$$V(\omega) \to \begin{vmatrix} S^{a+b+c} & S^{a+b+c+1} & S^{a+b+c+2} \\ S^{b+c-1} & S^{b+c} & S^{b+c+1} \\ S^{c-2} & S^{c-1} & S^{c} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Лемма 2. *Пусть* $\omega = a\omega_1$. *Тогда*

$$V(a\omega_1)_H \to \sum_{i=0}^{a} (a-i, i). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис естественного $SL_4(K)$-модуля, тогда $\{e_1^{a_1} e_2^{a_2} e_3^{a_3} e_4^{a_4} | \ \sum_{i=1}^{4} a_i = a\}$ — базис в $V(a\omega_1)$. Учитывая действие элементов подгруппы H на векторы из S^a, получаем, что ограничение на H G-модуля $V(a\omega_1)$ разлагается в прямую сумму неприводимых $A_1 \times A_1$-модулей:

$$V(a\omega_1)_H = \bigoplus_{i=0}^{a} \langle e_1^{a-i-s} e_2^{s} e_3^{i-t} e_4^{t} | \ s = 0, 1, \ldots, a-i; \ t = 0, 1, \ldots, i \rangle.$$

Отсюда следует равенство (6).

Лемма 3.

$$(V(m\omega_1) \otimes V(k\omega_1))_H \to \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \sum_{s=0}^{\min(m-i,k-j)} \sum_{t=0}^{\min(i,j)} (m+k-i-j-2s, i+j-2t). \tag{7}$$

Доказательство. Используем формулу Клебша–Гордана [5, § 22] для тензорного произведения двух неприводимых SL_2-модулей.

Лемма 4. *Пусть* $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$ *и* $b > 0$. *Тогда*

$$V(\omega)_H \to \sum_{k=0}^{b} (k+1) \sum_{i=b-k}^{a+b-k} (a+2b-2k-i, i). \tag{8}$$

Доказательство. Положим

$$M_1 = V((a+b)\omega_1) \otimes V(b\omega_1), \quad M_2 = V((a+b+1)\omega_1) \otimes V((b-1)\omega_1).$$

В силу (5) $V(\omega) \to M_1 - M_2$. Следовательно, используя (6) и (7), можем записать

$$V(\omega)_H \to \sum_{i=0}^{a+b} \sum_{j=0}^{b} \sum_{s=0}^{\min(a+b-i,b-j)} \sum_{t=0}^{\min(i,j)} (a+2b-i-j-2s, i+j-2t) -$$

$$- \sum_{i=0}^{a+b+1} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{s=0}^{\min(a+b+1-i,b-1-j)} \sum_{t=0}^{\min(i,j)} (a+2b-i-j-2s, i+j-2t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{a+b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{t=0}^{\min(i,j)} \Bigg(\sum_{s=0}^{\min(a+b-i,b-j)} (a+2b-i-j-2s, i+j-2t) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\min(a+b+1-i,b-1-j)} (a+2b-i-j-2s, i+j-2t) \Bigg) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{a+b} \sum_{t=0}^{\min(i,b)} (a+b-i, b+i-2t) - \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{t=0}^{j} (b-1-j, a+b+1+j-2t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{b} \sum_{t=0}^{\min(i,j)} (a+j-i, i+j-2t) +$$

$$+\sum_{i=a+1}^{a+b}\sum_{j=i-a}^{b}\sum_{t=0}^{\min(i,j)}(a+j-i,i+j-2t)-\sum_{i=a+2}^{a+b+1}\sum_{j=0}^{i-a-2}\sum_{t=0}^{j}(i-j-a-2,i+j-2t)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b}\sum_{t=0}^{\min(i,j)}(a+j-i,i+j-2t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=i}^{b}\sum_{t=0}^{\min(i+a,j)}(j-i,i+j+a-2t)-\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=i}^{b}\sum_{t=0}^{i-1}(j-i,i+j+a-2t)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b}\sum_{t=0}^{\min(i,j)}(a+j-i,i+j-2t)+\sum_{i=a+1}^{a+b}\sum_{j=i-a}^{b}\sum_{t=i-a}^{\min(i,j)}(a+j-i,i+j-2t)=$$

$$=\left(\sum_{i=0}^{a}(a-i,i)\right)+\left(\sum_{i=1}^{a+1}(a+2-i,i)+\sum_{i=0}^{a}(a-i,i)\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\sum_{i=b}^{a+b}(a+2b-i,i)+\sum_{i=b-1}^{a+b-1}(a+2(b-1)-i,i)+\ldots+\sum_{i=0}^{a}(a-i,i)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b}(k+1)\sum_{i=b-k}^{a+b-k}(a+2b-2k-i,i).$$

Лемма 5. *Пусть* $\omega=a\omega_1+b\omega_2+\omega_3$ *и* $a>0$. *Тогда*

$$V(\omega)_H\to\sum_{k=0}^{b}(k+1)\left(\sum_{i=b-k}^{a+b-k}(a+2b+1-2k-i,i)+\sum_{i=b+1-k}^{a+b+1-k}(a+2b+1-2k-i,i)\right)+$$

$$+(b+1)\sum_{i=0}^{a-1}(a-1-i,i). \tag{9}$$

Доказательство. Положим

$$M_1=V((a+b+1)\omega_1)\otimes V((b+1)\omega_1)\otimes V(\omega_1),\quad M_2=V((a+b+3)\omega_1)\otimes V(b\omega_1),$$

$$M_3=V((a+b+2)\omega_1)\otimes V(b\omega_1)\otimes V(\omega_1),\quad M_4=V((a+b+1)\omega_1)\otimes V((b+2)\omega_1),$$

$$M_5=V(a\omega_1+(b+1)\omega_2)\otimes V(\omega_1),\quad M_6=V((a+1)\omega_1+(b+1)\omega_2),\quad M_7=V((a-1)\omega_1+(b+2)\omega_2).$$

В силу (5) $V(\omega)\to M_1+M_2-M_3-M_4\to M_5-M_6-M_7$. С учетом лемм 2–4

$$V(\omega)_H\to\sum_{k=0}^{b+1}(k+1)\sum_{i=b+1-k}^{a+b+1-k}(a+2b+3-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{b}(k+1)\sum_{i=b+1-k}^{a+b+1-k}(a+2b+1-2k-i,i)+$$

$$+(b+2)\sum_{i=0}^{a-1}(a-1-i,i)+\sum_{k=0}^{b+1}(k+1)\sum_{i=b+2-k}^{a+b+2-k}(a+2b+3-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{b}(k+1)\sum_{i=b-k}^{a+b-k}(a+2b+1-2k-i,i)+$$

$$+(b+2)\sum_{i=0}^{a-1}(a-1-i,i)-\sum_{k=0}^{b+1}(k+1)\sum_{i=b+1-k}^{a+b+2-k}(a+2b+3-2k-i,i)-$$

$$-\sum_{k=0}^{b+2}(k+1)\sum_{i=b+2-k}^{a+b+1-k}(a+2b+3-2k-i,i)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b}(k+1)\left(\sum_{i=b-k}^{a+b-k}(a+2b+1-2k-i,i)+\sum_{i=b+1-k}^{a+b+1-k}(a+2b+1-2k-i,i)\right)+(b+1)\sum_{i=0}^{a-1}(a-1-i,i).$$

Лемма 6. *Пусть* $\omega=a\omega_1+c\omega_3$ *и* $a\geq c\geq 2$. *Тогда*

$$V(\omega)_H\to\sum_{k=0}^{c}\sum_{j=0}^{c-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i). \tag{10}$$

Доказательство. Положим

$$M_1=V((a+c)\omega_1)\otimes V(c\omega_1)\otimes V(c\omega_1),\quad M_2=V((a+c)\omega_1)\otimes V((c+1)\omega_1)\otimes V((c-1)\omega_1),$$

$$M_3=V((a+c+1)\omega_1)\otimes V(c\omega_1)\otimes V((c-1)\omega_1),\quad M_4=V((a+c+1)\omega_1)\otimes V((c+1)\omega_1)\otimes V((c-2)\omega_1),$$

$$M_5=V((a+c+2)\omega_1+(c-1)\omega_2)\otimes V((c-1)\omega_1),\quad M_6=V((a+c+2)\omega_1)\otimes V(c\omega_1)\otimes V((c-2)\omega_1),$$

$$M_7=V((a+c)\omega_1)\otimes V(c\omega_2),\quad M_8=V((a+c+1)\omega_1)\otimes V(\omega_1+(c-1)\omega_2),$$

$$M_9=V((a+c+2)\omega_1)\otimes V((c-1)\omega_2).$$

В силу (5) $V(\omega)\to M_1-M_2-M_3+M_4+M_5-M_6\to M_7-M_8+M_9$. Ввиду лемм 2–4

$$V(\omega)_H\to\sum_{i=0}^{a+c}\sum_{k=0}^{c}\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)-$$

$$-\sum_{i=0}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-1-k)}(k+1)(a+2c+1-i-k-2s,i+c-1-k-2t)-$$

$$-\sum_{i=0}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{a+c+2}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+2-i,c-1-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-1-k)}(k+1)(a+2c+1-i-k-2s,i+c-1-k-2t)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a+c}\sum_{k=0}^{c}\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)-$$

$$-\sum_{i=0}^{a+c}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}\sum_{t=0}^{\min(i+1,c-1-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)-$$

$$-\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{c-k}(k+1)(a+2c+1-k-2s,c-1-k)-$$

$$-\sum_{i=0}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}\sum_{t=0}^{\min(i+1,c-1-k)}(k+1)(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)+$$

$$+\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{c-1-k}(k+1)(a+2c+1-k-2s,c-1-k)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a+c}(c+1)(a+c-i,i)-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a+k+1,c-1-k)+$$

$$+\sum_{i=0}^{a+c}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}(k+1)\Bigg(\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)-$$

$$-\sum_{t=0}^{\min(i+1,c-1-k)}(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)\Bigg)-$$

$$-\sum_{i=0}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}(k+1)\Bigg(\sum_{t=0}^{\min(i,c-k)}(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)-$$

$$-\sum_{t=0}^{\min(i+1,c-1-k)}(a+2c-i-k-2s,i+c-k-2t)\Bigg)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a+c}(c+1)(a+c-i,i)-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a+k+1,c-1-k)+$$

$$+\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}(k+1)\Bigg(-\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(a+2c-i-k-2s,c-k-i-2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{c-1}\sum_{k=c-i}^{c-1}(a+2c-i-k-2s,i-c+k)+\sum_{i=c}^{a+c}\sum_{k=0}^{c-1}(a+2c-i-k-2s,i-c+k)\Bigg)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}(k+1)\Bigg(-\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(a+2c-i-k-2s,c-k-i-2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{c-1}\sum_{k=c-i}^{c-1}(a+2c-i-k-2s,i-c+k)+\sum_{i=c}^{a+c+1}\sum_{k=0}^{c-1}(a+2c-i-k-2s,i-c+k)\Bigg)=$$

$$=\sum_{i=0}^{a+c}(c+1)(a+c-i,i)-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a+k+1,c-1-k)-\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(k+1)(a+k-i,c-k-i-2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{c-1}\sum_{k=c-i}^{c-1}(k+1)(a+k-i,i-c+k)-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(c-k-1,a+k+1)+$$

$$+\sum_{i=c}^{a+c}\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)\Bigg(\sum_{s=0}^{\min(a+c-i,c-k)}(a+2c-i-k-2s,i-c+k)-$$

$$-\sum_{s=0}^{\min(a+c+1-i,c-1-k)}(a+2c-i-k-2s,i-c-k)\Bigg).$$

Заметим, что при замене индексов суммирования выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{c-1}\sum_{k=c-i}^{c-1}(k+1)(a+k-i,i-c+k)=\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{i}(c-k)(a+c-2-k-i,i-k)$$

и

$$\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(k+1)(a+k-i,c-k-i-2)=\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{i}(c-1-i)(a+c-2-k-i,i-k).$$

Поэтому

$$V(\omega)_H\to\left(\sum_{i=0}^{a+c}(c+1)(a+c-i,i)-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a+k+1,c-1-k)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(c-k-1,a+k+1)\right)+$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{i}(c-k)(a+c-2-k-i,i-k)-\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{i}(c-1-i)(a+c-2-k-i,i-k)\right)+$$
$$+\sum_{i=c}^{a}\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a-i+k,i-c+k)+\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{i=a+1}^{a+k}(k+1)(a-i+k,i-c+k)-$$
$$-\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=a+2+k}^{a+c}(k+1)(i-a-2-k,i-c+k)=$$
$$=\sum_{j=0}^{c}\sum_{i=j}^{a+j}(a+c-i,i)+\sum_{i=0}^{c-2}\sum_{k=0}^{i}(i+1-k)(a+c-2-k-i,i-k)+$$
$$+\sum_{i=c}^{a}\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)(a-i+k,i-c+k)+\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{i=a+1}^{a+k}(a+k+1-i)(a+k-i,i+k-c)=$$
$$=\sum_{j=0}^{c}\sum_{i=j}^{a+j}(a+c-i,i)+\left(\sum_{i=0}^{c-2}(i+1)(a+c-2-i,i)+\sum_{i=0}^{c-3}i(a+c-4-i,i)+\ldots+(a-c+2,0)\right)+$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{a-c}(a-c-i,i)+2\sum_{i=1}^{a-c+1}(a-c+2-i,i)+\ldots+c\sum_{i=c-1}^{a-1}(a+c-2-i,i)\right)+$$
$$+\left((0,a-c+2)+\sum_{i=a-c+3}^{a-c+4}(a-c+5-i)(a-c+4-i,i)+\ldots+\sum_{i=a}^{a+c-2}(a+c-1-i)(a+c-2-i,i)\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{c}\sum_{i=j}^{a+j}(a+c-i,i)+\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=j}^{a-1+j}(a+c-2-i,i)+\ldots+\sum_{i=0}^{a-c}(a-c-i,i)=\sum_{k=0}^{c}\sum_{j=0}^{c-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i).$$

2. Доказательство теоремы 1. Используем индукцию по числу $m=a+b+c$. Из вспомогательных лемм 2 и 4 следует, что при $m=1$ формула (2) выполняется. Предположим, что формула (2) выполняется для всех целых неотрицательных $m\le d$, и покажем, что она верна для $m=d+1$. Так как в случаях, когда $b=0$ либо $c\le 1$, формула (2) доказана в леммах 2, 4–6, можем считать, что $b>0$ и $c>1$.

Положим $\omega' = a\omega_1 + b\omega_2 + (c-1)\omega_3$, тогда $\omega = \omega' + \omega_3$. Из [5, формула (22.5)] следует, что формальный характер тензорного произведения $V(\omega') \otimes V(\omega_3)$ равен произведению их формальных характеров:

$$\operatorname{ch}(V(\omega') \otimes V(\omega_3)) = \operatorname{ch}(\omega') * \operatorname{ch}(\omega_3).$$

С другой стороны, имеем

$$\operatorname{ch}(V(\omega') \otimes V(\omega_3)) = \sum_{\mu_i} n(\mu_i) \operatorname{ch}(\mu_i), \tag{11}$$

где μ_i — доминантные веса.

Из формулы Стейнберга [5, формула (24.4)] следует, что кратности $n(\mu_i)$ могут быть ненулевыми лишь для весов $\mu_i = \mu_i' + \omega'$, $\mu_i' \in \Pi(\omega_3) = \{\omega_3, -\omega_1, \omega_1 - \omega_2, \omega_2 - \omega_3\}$, кроме того, так как все такие μ_i являются доминантными и кратности всех весов в модуле $V(\omega_3)$ равны 1, то и все кратности $n(\mu_i)$ равны 1. Получаем, что

$$\operatorname{ch}(\omega') * \operatorname{ch}(\omega_3) = \operatorname{ch}(\mu_1) + \operatorname{ch}(\mu_2) + \operatorname{ch}(\mu_3) + \operatorname{ch}(\mu_4), \tag{12}$$

где $\mu_1 = a\omega_1 + b\omega_2 + c\omega_3$; $\mu_2 = (a-1)\omega_1 + b\omega_2 + (c-1)\omega_3$; $\mu_3 = (a+1)\omega_1 + (b-1)\omega_2 + (c-1)\omega_3$; $\mu_4 = a\omega_1 + (b+1)\omega_2 + (c-2)\omega_3$.

К $V(\omega')_H$ применима формула (2) по предположению индукции. Таким образом,

$$V(\omega')_H \to \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-1-2k-i,i) + (b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{j=0}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-1-2k-i,i).$$

Используя лемму 3 и учитывая, что $V(\omega_3) \to (1,0) + (0,1)$, получаем, что

$$(V(\omega') \otimes V(\omega_3))_H \to \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2k-i,i) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i) + (b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i) +$$

$$+ (b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2-2k-i,i) + (b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=c-1-k}^{a+c-2k-1}(a+c-2k-i,i) +$$

$$+ (b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=c-1-k}^{a+c-2k-2}(a+c-2-2k-i,i) + \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j+1}^{a+b-k+j+1}(a+2b+c-2k-i,i) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j-1}^{a+b-k+j-1}(a+2b+c-2-2k-i,i) + (b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j+1}^{a-k+j+1}(a+c-2k-i,i) +$$

$$+ (b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j-1}^{a-k+j-1}(a+c-2-2k-i,i) + (b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=1}^{a-k+1}(a+c-2k-i,i) +$$

$$+ (b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=0}^{a-k-1}(a+c-2-2k-i,i). \tag{13}$$

С другой стороны, учитывая предположение индукции, имеем

$$V(\mu_2)_H \to \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-1-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i)+$$

$$+(b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{j=0}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a-1-k+j}(a+c-2-2k-i,i)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-1-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i)+$$

$$+(b+1)\Bigg(\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a-1-k+j}(a+c-2-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=0}^{a-1-k}(a+c-2-2k-i,i)\Bigg),$$

$$V(\mu_3)_H \to \sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-1-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i)+b\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a+1-k+j}(a+c-2k-i,i)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-1-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i)+$$

$$+b\Bigg(\sum_{k=1}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j+1}^{a+1-k+j}(a+c-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(a+c-2-2k-i,i)+\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{i=1}^{a+1-k}(a+c-2k-i,i)\Bigg),$$

$$V(\mu_4)_H \to \sum_{k=0}^{b}(k+1)\sum_{j=0}^{c-2}\sum_{i=b+1-k+j}^{a+b+1-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+(b+2)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2-2k-i,i)=$$

$$=\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-2}\sum_{i=b+1-k+j}^{a+b+1-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{j=0}^{c-2}\sum_{i=j+1}^{a+1+j}(a+c-i,i)+$$

$$+(b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2-2k-i,i)+\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{j=0}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a+1-k+j}(a+c-2k-i,i).$$

Сумму (13) можно представить следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+$$

$$+\Bigg(\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j-1}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}(a+b+c-2-k-j,b-k+j)\Bigg)+$$

$$+(b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2-2k-i,i)+$$

$$+(b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=c-1-k}^{a+c-1-2k}(a+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=c-k}^{a+c-2k}(a+c-2k-i,i)+$$

$$+\left(\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-2}\sum_{i=b-k+j+1}^{a+1+b-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{i=b-k+c}^{a+b+c-k}(a+2b+c-2k-i,i)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j-1}^{a+b-k+j-1}(a+2b+c-2-2k-i,i)+$$

$$+(b+1)\left(\sum_{k=1}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j+1}^{a+1-k+j}(a+c-2k-i,i)+\sum_{j=1}^{c-2}\sum_{i=j+1}^{a+1+j}(a+c-i,i)+\sum_{i=c}^{a+c}(a+c-i,i)\right)+$$

$$+(b+1)\left(\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=1}^{c-1-k}\sum_{i=j}^{a-1-k+j}(a+c-2-2k-i,i)+\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{i=0}^{c-2-k}(a+c-2-2k-i,i)\right)+$$

$$+(b+1)\left(\sum_{k=1}^{c-1}\sum_{i=1}^{a+1-k}(a+c-2k-i,i)+\sum_{i=1}^{a+1}(a+c-i,i)\right)+(b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=0}^{a-k-1}(a+c-2-2k-i,i).$$

Отсюда следует, что

$$(V(\omega')\otimes V(\omega_3))_H\to V(\mu_2)_H+V(\mu_3)_H+V(\mu_4)_H+\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c-1}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+$$

$$+\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{i=b-k+c}^{a+b-k+c}(a+2b+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{k=0}^{c-2}\sum_{j=0}^{c-2-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i)+$$

$$+(b+1)\sum_{k=0}^{c-1}\sum_{i=c-1-k}^{a+c-1-2k}(a+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{k=1}^{c}\sum_{i=c-k}^{a+c-2k}(a+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{i=c}^{a+c}(a+c-i,i).$$

Теперь из (12) и из последнего равенства получаем

$$V(\mu_1)_H\to\sum_{k=0}^{b-1}(k+1)\sum_{j=0}^{c}\sum_{i=b-k+j}^{a+b-k+j}(a+2b+c-2k-i,i)+(b+1)\sum_{k=0}^{c}\sum_{j=0}^{c-k}\sum_{i=j}^{a-k+j}(a+c-2k-i,i).$$

Значит, формула (2) верна. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Пусть $n=4$, $G=SL_5(K)$. Положим $H=H(\alpha_1,\alpha_3)$, $S=H(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Тогда $H\cong A_1(K)\times A_1(K)$, $S\cong A_3(K)$, $H\le S\le G$. Пусть $V(\omega)$ — $GL_5(K)$-модуль со старшим весом $a=(m_1+m_2+m_3+m_4,m_2+m_3+m_4,m_3+m_4,0)$, положим $m=m_1+m_2+m_3+m_4$. Пусть подгруппа S лежит в подгруппе $S_1\cong GL_4(K)\le GL_5(K)$. Учитывая правила ветвления

$$V_a|_{S_1}\cong\bigoplus_b V_b,$$

где суммирование ведется по всем наборам $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ таким, что

$$m\ge b_1\ge m_2+m_3+m_4\ge b_2\ge m_3+m_4\ge b_3\ge m_4\ge b_4\ge 0. \tag{14}$$

Заметим, что $V_b|_S\cong V_\mu$, где

$$\mu=(b_1-b_4)\varepsilon_1+(b_2-b_4)\varepsilon_2+(b_3-b_4)\varepsilon_3=(b_1-b_2)\omega_1+(b_2-b_3)\omega_2+(b_3-b_4)\omega_3.$$

Положим $b_1-b_2=i$, $b_2-b_3=j$, $b_3-b_4=k$. Используя (14), можно проверить, что $0\le i\le m_1+m_2$, $0\le j\le m_2+m_3$, $0\le k\le m_3+m_4$, $m_2\le i+j\le m_1+m_2+m_3$,

$m_2+m_3 \leq i+j+k \leq m,\ m_3 \leq j+k \leq m_2+m_3+m_4$ и любая тройка $(i,j,k),$ удовлетворяющая этим условиям, задает старший вес некоторого модуля из $\mathrm{Irr}_S(\omega)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Irr}_S(\omega) = \{(i,j,k) \in \mathbf{N}^3 |\ 0 \leq i \leq m_1+m_2,\ 0 \leq j \leq m_2+m_3,\ 0 \leq k \leq m_3+m_4,$$

$$m_2 \leq i+j \leq m_1+m_2+m_3,\ m_3 \leq j+k \leq m_2+m_3+m_4,\ m_2+m_3 \leq i+j+k \leq m\}. \quad (15)$$

Исходя из (1) и (15), находим множество $\mathrm{Irr}_H(\omega)$:

$$\mathrm{Irr}_H(\omega) = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{N}^2 |\ 0 \leq x_1,\ x_2 \leq m_1+m_2+m_3+m_4,$$

$$0 \leq x_1+x_2 \leq m_1+2m_2+2m_3+m_4\}. \quad (16)$$

Пусть $n \geq 5$. Положим $H = H(\alpha_1, \alpha_{n-1}),\ S = H(\alpha_1, \alpha_2+\ldots+\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$. Тогда $H \cong A_1(K) \times A_1(K),\ S \cong A_4(K),\ H \leq S \leq G$. Легко видеть, что KSv^+ — неразложимый S-модуль со старшим весом $\omega_S = m_1\omega_1 + (m_2\omega_2+\ldots+m_{n-2})\omega_2 + m_{n-1}\omega_3 + m_n\omega_4$. Поэтому $V(\omega)_H$ имеет композиционный фактор с таким же старшим весом. В силу (16)

$$\mathrm{Irr}_H(\omega_S) = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{N}^2 |\ 0 \leq x_1,\ x_2 \leq m_1+\ldots+m_n,$$

$$0 \leq x_1+x_2 \leq m_1+2(m_2+\ldots+m_{n-2})+2m_{n-1}+m_n\}, \quad (17)$$

поэтому

$$\mathrm{Irr}_H(\omega) \supseteq \{(x_1,x_2) \in \mathbf{N}^2 |\ 0 \leq x_1, x_2 \leq m_1+\ldots+m_n,\ 0 \leq x_1+x_2 \leq m_1+2m_2+\ldots+2m_{n-1}+m_n\}.$$

Обратное включение докажем от противного. Заметим, что $0 \leq x_1, x_2 \leq m_1+\ldots+m_n$ для любого фактора (x_1,x_2) из $\mathrm{Irr}_H(\omega)$, что отмечено в [3, теорема 1.1]. Допустим, что в $\mathrm{Irr}_H(\omega)$ найдется фактор (x_1,x_2) такой, что $x_1+x_2 > m_1+2m_2+\ldots+2m_{n-1}+m_n$. Положим

$$K = H(\alpha_1+\ldots+\alpha_n, \alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}).$$

Так как H и K сопряжены, то $\mathrm{Irr}_H(\omega) = \mathrm{Irr}_K(\omega)$. Каждый фактор ограничения G-модуля $V(\omega)$ на подгруппу K определяется ограничением на K некоторого веса $\mu = \omega - \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i$, $(k_i \in \mathbf{Z},\ k_i \geq 0)$, а значит

$$x_1 = \langle \mu, \alpha_1+\ldots+\alpha_n \rangle = \sum_{i=1}^n m_i - k_1 - k_n,$$

$$x_2 = \langle \mu, \alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1} \rangle = \sum_{i=2}^{n-1} m_i - k_2 - k_{n-1} + k_1 + k_n.$$

Отсюда получаем, что $x_1+x_2 = \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=2}^{n-1} m_i - k_2 - k_{n-1} \leq m_1+2m_2+\ldots+2m_{n-1}+m_n$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И.Д. Супруненко за полезные обсуждения и постоянное внимание к данной работе.

Литература

1. *Желобенко Д.П.* Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. № 1. С. 27–120.
2. *Fulton W., Harris J.* Representation Theory. New York, 1991.
3. *Osinovskaya A.A.* Restrictions of Irreducible Representations of Classical Algebraic Groups to Root A_1-Subgroups // Communications in Algebra. 2003. V. 31. № 5. P. 2357–2379.

4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 4–6. М., 1972.

5. *Humphreys J.E.* Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York, 1972.

T. M. Zheleznaya

Restrictions of irreducible representations of algebraic groups of type A_n in characteristic 0 to subgroups of type $A_1 \times A_1$

Summary

Restrictions of irreducible representations of algebraic groups of type A_n in characteristic 0 to naturally embedded subgroups of type $A_1 \times A_1$ are studied. The composition factors of such restrictions are determined. For $n = 3$ the multiplicities of these factors are found.