К. Лезан, Что такое вектор?, *Матем. обр.*, 2015, выпуск 1, 56–59

Что такое вектор?

К. Лезан

Вопрос о содержании курса геометрии, о наполнении его теми или иными геометрическими понятиями, о методике изложения этих понятий для школьников остается актуальным для отечественного школьного математического образования. В этом вопросе при формировании и утверждении школьных программ допускались различные крайности.

Одну из них мы наблюдаем сейчас — это практически полное вымывание доказательности из базового школьного курса, как можно видеть по заданиям базового варианта ЕГЭ по математике.

К противоположной крайности можно отнести слишком абстрактный курс геометрии в колмогоровской программе 1970-х годов; по этой теме имеются многочисленные материалы, в частности, на страницах некоторых выпусков нашего журнала.

Много критики в этом курсе вызывало предельно абстрактное понятие вектора как параллельного переноса плоскости. Ряд методистов считают, что в таком виде оно совершенно не воспринималось учащимися (не имея в их мышлении никаких наглядных и интуитивных опор) и, соответственно, не могло быть успешно освоено.

Настоящая заметка, опубликованная еще в 1913 году (журнал “Вестник опытной физики и элементарной математики”, № 588, стр. 334-338)[1], показывает, что уже в то время создавались научные и методические предпосылки такой эволюции понятия вектора, которая привела к форме понятия, зафиксированной в колмогоровском курсе.

Эта заметка публикуется с целью вызвать дискуссию и еще раз обсудить вопрос о понятийном наполнении школьного курса геометрии и методике изложения необходимых понятий.

Для мнений всех участников дискуссии будут предоставлены страницы нашего журнала.

Материал представлен научным сотрудником Отдела истории математики и математического образования Научно-Практического Центра Математического Просвещения Ревеккой Залмановной Гушель.

Исчисление векторов является в науке весьма важным вспомогательным средством. В частности, применение этого исчисления к геометрии и механике дает возможность достичь важных упрощений и значительно большей ясности. Оно не только весьма заметным образом сокращает письмо, но представляет из себя аналитический метод, который дает наглядное представление о предметах, подлежащих исследованию, между тем как при употреблении координат объекты исследования слишком часто теряются из виду.

Долголетнее применение исчисления векторов — в особенности, в Великобритании — позволило раскрыть все выгодные стороны его, и большие, усилия прилагались к тому, чтобы обратить на них всеобщее внимание. Во Франции термин “вектор” не без труда получил признание в преподавании. Он фигурирует в очень большом числе программ, а также в большей части современных классических сочинений.

[1] Журнал имеется в свободном доступе на сайте vofem.ru — *прим. ред.*

Что такое векторъ?

К. Лезана.

Исчисленіе векторовъ является въ наукѣ весьма важнымъ вспомогательнымъ средствомъ. Въ частности, примѣненіе этого исчисленія къ геометріи и механикѣ даетъ возможность достичь важныхъ упрощеній и значительно большей ясности. Оно не только весьма замѣтнымъ образомъ сокращаетъ письмо, но представляетъ изъ себя аналитическій методъ, который даетъ наглядное представленіе о предметахъ, подлежащихъ изслѣдованію, между тѣмъ какъ при употребленіи координатъ объекты изслѣдованія слишкомъ часто теряются изъ виду.

Я делаю ударение на слове **термин**, ибо совсем иначе обстоит дело с самим понятием. Термином пользуются, я мог бы даже сказать — им злоупотребляют. Понятие же пребывает, так сказать, в таинственном полумраке. Невероятным кажется тот факт, что почти нигде — даже в превосходнейших сочинениях или в лекциях самых выдающихся профессоров — нельзя найти точного определения вектора. Я ни разу не встречал, ни одного учащегося, который сумел бы ответить на вопрос "что такое вектор?"; а между тем уже в течение четверти часа, по крайней мере, он излагал мне очень много соображений относительно векторов и удачно справлялся с весьма обширными выкладками, относящимися к их теории. Я всегда снисходительно относился к этому недостатку в ответе учащихся, ибо вина за это падает не на них, а всецело на дурное изложение, против которого необходимо было бы бороться. Недостаточная точность всегда влечет за собою весьма вредные последствия в деле преподавания.

Яснее всего обнаружилось это смешение понятий, на которое я здесь указываю и против которого восстаю, в элементарной статике, ибо в этой именно области, пожалуй, сильнее всего сказались вредные последствия такого рода смешения. Раньше **силу**, приложенную в точке A, изображали **отрезком** AB, при чем длина AB этого отрезка измеряла напряжение силы, а неопределенная полупрямая AB, указывавшая положение в пространстве и направление силы, называлась **линией действия** её; кроме того, принимали в качестве постулата, что силу можно перемещать, куда угодно, вдоль её линии действия.

Но против этой терминологии было выдвинуто то возражение, что a priori нельзя установить тождественности между таким образом трактуемыми силами и силами динамики. Правда, вполне основательно указывали на то, что элементарная статика представляет из себя, в сущности, лишь особую ветвь геометрии, служащую подготовительной ступенью к механике; но вместе с тем совершенно напрасно полагали, что для того, чтобы выйти из затруднения, стоит только заменить термин **сила** термином **вектор**; и зло тем более велико, что эту замену произвели, не оговаривая её. Замечательно, что **вектором** называли то, что не было вектором ни на языке их изобретателей, ни на языке геометров, которые пользовались этим новым способом геометрических вычислений.

Символ AB допускает три толкования. Во-первых, это геометрический отрезок; начало A и конец B его фиксированы; при этом некоторый отрезок CB только тогда равен отрезку AB, когда C совпадает с A, а D — с B. Во-вторых, можно рассматривать отрезок AB, подчиняющийся такому условию: для существования равенства $AB = CB$ необходимо, чтобы оба отрезка AB и CD имели одинаковую длину и одинаковое направление, и чтобы оба они лежали на одной и той же прямой AB; объекту, получив ему такое определение, можно было бы, как мне кажется, без особых затруднений и даже с некоторым удобством, дать название "**геометрическая сила**", которое устраняет какие бы то ни было недоразумения; во всяком случае, повторяю, и этот объект не есть вектор. Наконец, **вектор** AB определяется своей длиной, своим положением в пространстве и своим направлением, — иначе говоря, $AB = CD$, если два отрезка AB

и CD параллельны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину; при этом совершенно безразлично, где расположена точка C.

Гамильтон (Hamilton), сказал, что вектор есть символ **переносного движения**; **Грассманн** (Grassmann) смотрел на вектор, как на разность между двумя точками[2]. Оба эти способа выражения одинаково правильны и удачно передают сущность понятия. При переносном движении все точки тела описывают тождественные векторы. Но если $AB = CB$, то геометрическая разность точек B и A, действительно, равна геометрической разности точек D и C, — подобно тому, как

$$3 = 7 - 4 = 20 - 17 = (12 + 2i) - (9 + 2i).$$

Неправильное употребление термина "вектор" и применение его к геометрическим силам привели к следующему чудовищному выражению, получившему, так сказать, классическую известность: "равнодействующий момент системы векторов". Говорят также об "эквивалентных системах векторов", что имеет не больше смысла. Как бы нарочно допустили такое смешение терминов и, преследуя единственную цель — освободиться от слова "сила", достигли как раз противоположных результатов. Это тем более печально, что именно в статике вектор дает вполне точное представление о **паре**.

Истинное различие между отрезком, геометрической силой и вектором состоит в том, что отрезок определяется шестью условиями или, лучше сказать, двумя группами условий (координаты начальной и конечной точки), по три в каждой, геометрическая сила — пятью условиями (четырьмя элементами определяется положение прямой в пространстве; к этому присоединяется длина отрезка), а вектор — лишь тремя условиями (тремя проекциями или слагающими).

Исчисление векторов служит источником ежедневно появляющихся интересных работ и имеет полезные применения.

Будем ли мы пользоваться методом кватернионов **Гамильтона** или следовать **Грассману**, мы можем встретить затруднения, лежащие в самой природе вещей; так, например, многих привела в уныние некоммутативность произведения, хотя это свойство лишь служит выражением почти очевидной геометрической истины. Быть может, можно будет внести в теорию векторов какие-либо упрощения или усовершенствования, и это даже весьма вероятно. Уже в течение нескольких лет прилагаются усилия к тому, чтобы по мере возможности согласовать обозначения. Но я твердо убежден в том, что никто не предлагал сознательно привести в полный беспорядок терминологию, и при том столь произвольным образом; а между тем именно это произошло во Франции вследствие какого-то рокового произвола[3]. Я полагаю, что еще не поздно попытаться вступить в борьбу с этим, и это именно побудило меня забить тревогу.

Я надеюсь, мне позволено будет воспользоваться настоящим случаем, чтобы, оставляя в стороне применения векторов к геометрии, механике или физике, указать на возможность расширения понятия о числе, которое вполне естественно вытекает из только-что указанных методов и которого, однако, я до сих пор нигде не встречал; впрочем, последнее не может служить ручательством его новизны. Но мне кажется, что оно заключает в себе некоторый интерес с точки зрения философии.

Это понятие лучше всего можно было бы охарактеризовать, назвав его **положением** числа. Оно мне было, подсказано упомянутым выше определением **Грассмана**. Первоначально изучали числа, сперва целые, затем рациональные и, наконец, иррациональные; затем оказалось необходимым ввести отрицательные числа; теория мнимых чисел привела к рассмотрению направленных чисел в плоскости. Открытия **Грассмана** и **Гамильтона** позволили выйти из плоскости и придти к направленным числам в пространстве.

[2]Очень изящное современное изложение векториального анализа с этой точки зрения можно найти в прекрасной книге, которую цитируем во французском переводе — C. Bourali-Forti et R. Marcolongo, "Éléments de calcul vectoriel". *Ред.*

[3]И далеко не только во Франции. *Ред.*

Во всех этих последовательных обобщениях число все время сохраняет — по крайней мере, неявно — постоянное начало, а именно нуль. Быть может, имело бы смысл различать числа также и в зависимости от того начала, от которого их отсчитывают. Даже в чистой арифметике можно не отождествлять числа 3, отсчитываемого от 0 до 3, с тем же числом, отсчитываемым от 1000 до 1003. При таком порядке идей число, фиксированное по величине, направлению и положению, оказалось бы охарактеризованным системою двух векторов a и α и могло бы быть обозначено, например, символом a_α, при чем за общее начало этих векторов можно было бы условиться принять нуль.

По-видимому, вполне возможно установить систему определений элементарных операций над этими числами, которые, очевидно, представляются отрезками. Например, для чисел **компланарных**, т.е. для всех чисел, расположенных в одной плоскости, можно полагать, что, прибегая к посредству операций над мнимыми числами в алгебре, это было бы сравнительно легко выполнить. Что же касается чисел самого общего вида, то, вероятно, пришлось бы прибегнуть к исчислению кватернионов, при чем здесь следовало бы ожидать выводов, аналогичных тем, с которыми мы уже знакомы.

Вместе с тем подобного рода исчисление, в виду вышеуказанного способа изображения его элементов, было бы исчислением геометрических отрезков. У меня нет (и, вероятно, не будет) возможности продолжать ни изучение этого вопроса ни более глубокое исследование его. Я желал бы только, чтобы оно привлекло внимание кого-нибудь из наших молодых собратьев; лишь на это я надеялся, когда решился выступить с предлагаемой беглой заметкой.