Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

N. M. Suchkov, Subgroups of a product of locally finite groups,
*Algebra Logika*, 1985, Volume 24, Number 4, 408–413

https://www.mathnet.ru/eng/al1913

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 12, 2025, 14:56:08

Алгебра и логика, 24, № 4 (1985), 408-413

УДК 519.45

# О ПОДГРУППАХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Н.М.СУЧКОВ

В работе [1] автором построена смешанная группа $G=AB$, где $A$, $B$ - локально-конечные подгруппы. Обобщением этого результата является

Теорема 1. *В группу $G$ вложима любая счетная свободная группа.*

Получен также отрицательный ответ на следующий вопрос: является ли локально-конечной периодическая подгруппа группы, факторизуемой двумя локально-конечными подгруппами?

Теорема 2. *В группу $G$ вложима 2-группа Алёшина.*

Определения групп Алёшина и Григорчука можно найти в [2,§23].

Настоящая работа по существу является продолжением работы [1], все обозначения из которой мы сохраняем.

Определение 1. Элемент $g\in S(Z)$ назовем ограниченным, если

$$\ell(g)=\sup_{\alpha\in Z}|\alpha-\alpha g|<\infty.$$

Лемма 1. *Если $g_1$, $g_2$ - ограниченные элементы, то $g_1g_2$, $g_1^{-1}$ - также ограниченные элементы.*

Доказательство. Действительно, $|\alpha-\alpha g_1g_2|\leq|\alpha-\alpha g_1|+|\alpha g_1-\alpha g_1g_2|\leq\ell(g_1)+\ell(g_2)$, т.е., $\ell(g_1g_2)\leq\ell(g_1)+\ell(g_2)$. Далее, если $\alpha g=\beta$, то $|\beta-\beta g^{-1}|=|\alpha g-\alpha|$, откуда $\ell(g^{-1})=\ell(g)$. Лемма доказана.

© Институт математики СО АН СССР, 1985

Из леммы 1 следует, что совокупность всех ограниченных элементов из $S(Z)$ образует группу. Будем ее обозначать $\overline{G}$. Заметим, что $G<\overline{G}$, так как, по построению, $A, B<\overline{G}$.

Определение 2. Произвольную группу назовем ограниченной, если она изоморфна подгруппе из $\overline{G}$.

Пусть $g\in S(Z)$, $\alpha\in Z$. Обозначим

$$M_g^{\alpha}=\{\beta \mid \beta\in Z,\ \beta\leq\alpha, \beta g>\alpha\},\ \overline{M}_g^{\alpha}=\{\beta \mid \beta\in Z, \beta>\alpha, \beta g\leq\alpha\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $g\in\overline{G}$ *и* $|M_g^{\alpha}|=|\overline{M}_g^{\alpha}|$ *для всех* $\alpha\in Z$. *Тогда* $g\in G$.

Доказательство. Выберем такое натуральное $n$, что $\ell(g)<3^n$. Покажем, что $g\in B_nA_n\subset G$. Орбиты подгрупп $A_n$, $B_n$ расположены следующим образом

$$\underbrace{\overbrace{\bullet\ldots\bullet\ldots\bullet}^{U_n^{(k)}}}_{V_n^{(k-1)}}\ \underbrace{\bullet\ldots\bullet\ldots\bullet}_{V_n^{(k)}}$$

$|U_n^{(k)}|=|V_n^{(k)}|=|V_n^{(k-1)}|=2\cdot 3^n$, $|U_n^{(k)}\cap V_n^{(k)}|=|U_n^{(k)}\cap V_n^{(k-1)}|=3^n$. В силу выбора $n$, из $\alpha g\in U_n^{(k)}$ следует, что $\alpha\in V_n^{(k)}\cup V_n^{(k-1)}$. Определим перестановку $a$ действием на $\alpha g\in U_n^{(k)}$. Если $\alpha g\in U_n^{(k)}\cap V_n^{(k-1)}$, $\alpha\in V_n^{(k-1)}$ или $\alpha g\in U_n^{(k)}\cap V_n^{(k)}$, $\alpha\in V_n^{(k)}$, то полагаем $(\alpha g)a=\alpha g$. Пусть $\alpha_1 g,\ldots,\alpha_m g$ - все числа из $U_n^{(k)}\cap V_n^{(k-1)}$, для которых $\alpha_1,\ldots,\alpha_m\in V_n^{(k)}$. Так как $\ell(g)<3^n$, то, применяя условие леммы для крайней справа точки орбиты $V_n^{(k-1)}$, получаем, что найдутся точно $m$ чисел $\beta_1 g,\ldots,\beta_m g\in U_n^{(k)}\cap V_n^{(k)}$, для которых $\beta_1,\ldots,\beta_m\in V_n^{(k-1)}$. Полагаем $(\alpha_i g)a=\beta_i g$, $(\beta_i g)a=\alpha_i g$, $i=1,\ldots,m$. Тогда $a\in A_n$, $ga=b\in B_n$, т.е. $g=ba^{-1}\in B_nA_n$ $G$. Лемма доказана

Теперь легко получается следующая характеризация группы $G$.

Лемма 3. $G=$ гр$(g \mid g\in\overline{G}, |g|<\infty)$.

Доказательство. Так как $G$ порождается периодическими элементами $A\cup B$ и $G<\overline{G}$, то $G<$ гр$(g \mid g\in\overline{G}, |g|<\infty)$. Докажем обратное включение. Достаточно показать, что ограниченный элемент $g$ конечного порядка лежит в $G$. Если $T$ - произвольная орбита $(g)$, то $|T|<\infty$ и $|T\cap M_g^{\alpha}|=|T\cap\overline{M}_g^{\alpha}|$ для

всех $\alpha \in Z$. Поэтому $|M_g^\alpha| = |\overline{M}_g^\alpha|$. Применение леммы 2 завершает доказательство.

Лемма 4. *Класс ограниченных групп замкнут относительно взятия счетных прямых произведений.*

Доказательство. Пусть $H = \prod_{n=0}^{\infty} H_n$, где все группы $H_n$ ограниченные, т.е. $H_n \simeq \overline{H}_n < \overline{G}$. Для $n = 0, 1, \ldots$, рассмотрим множества $I_n = \{2^n + 2^{n+1}\alpha \mid \alpha \in Z\}$. Предположим, что $I_n \cap I_m \ni \alpha, m < n$. Тогда $2^m + 2^{m+1}\alpha_1 = 2^n + 2^{n+1}\alpha_2$, правая часть этого равенства делится на $2^{m+1}$, а левая нет. Поэтому $I_n \cap I_m = \emptyset$ при $m \neq n$. Каждой перестановке $h_n \in \overline{H}_n$ поставим в соответствие перестановку $t_n = h_n \varphi_n$, которая тождественно действует на $Z \setminus I_n$, а $(2^n + 2^{n+1}\alpha)t_n = 2^n + 2^{n+1}(\alpha h_n)$, $\alpha \in Z$. Очевидно, $\ell(t_n) = 2^{n+1}\ell(h_n)$, $H_n \simeq T_n = \overline{H}_n \varphi_n < G$. Таким образом, $H \simeq T = \prod_{n=0}^{\infty} T_n < \overline{G}$, и лемма доказана.

Лемма 5. *Класс ограниченных групп замкнут относительно конечных расширений.*

Доказательство. Достаточно показать, что $C \wr H$ - ограниченная группа, если $C$ - ограниченная группа, а $|H| < \infty$. Пусть $C$ вложена в $\overline{G}$, $|H| = n$. Каждому элементу $c \in C$ поставим в соответствие постановку $\overline{c} = c\varphi$, которая тождественно действует на $Z \setminus \{n\alpha, \alpha \in Z\}$, а $(n\alpha)\overline{c} = n(\alpha c)$. Тогда $\ell(\overline{c}) = n\ell(c)$, $C \simeq C\varphi = \overline{C} < \overline{G}$. Пусть $H$ регулярно представлена перестановками множества $K = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $h \in H$, $\beta$ - произвольное целое число. Тогда $\beta = i + n\alpha$, $i \in K$. По определению, $\beta\overline{h} = ih + n\alpha$. Очевидно, $H \simeq \overline{H} < \overline{G}$. Таким образом, $C \wr H \simeq \overline{C} \wr \overline{H} = \text{гр}(\overline{C}, \overline{H}) < \overline{G}$, лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для $g \in S_n$ полагаем $\ell(g) = \max_{i=1,\ldots,n} |i - ig|$. Пусть существует точно $\omega_n$ таких отображений $\varphi_{ni} : \{a, b\} \to S_n$, $i = 1, \ldots, \omega_n$, что $\ell(a\varphi_{ni}), \ell(b\varphi_{ni}) \leq 2$ для всех $i$. Разобьем неотрицательные целые числа на непересекающиеся отрезки $T_{21}, \ldots, T_{2\omega_2}, \ldots, T_{n1}, \ldots, T_{n\omega_n}, \ldots$ (первый индекс соответствует длине отрезка). Пусть $T_{ni} = \{\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+n\}$. По определению,

$$(\alpha+j)a = \alpha + j(a\varphi_{ni}), \quad (\alpha+j)b = \alpha + j(b\varphi_{ni}), \; j = 1, \ldots, n,$$

$$\beta a = \beta b = \beta \quad \text{для} \quad 0 > \beta \in Z.$$

Заметим, что $\ell(a) = \ell(b) = 2$ и $a, b \in G$ по лемме 2. Покажем, что

гр $(a,b)$ порождается свободно элементами $a$ и $b$. Тогда любая счетная свободная группа вложима в гр $(a,b)<G$ ([2, с.128]). Для $m=1,2,\ldots$ введем цикл

$$d_m=(0\ \ 2\ \ 4\ldots 2m\ \ 2m-1\ \ 2m-3\ldots 3\ \ 1).$$

Очевидно, $m$-я степень $d_m$ переводит $0$ в $2m$ и $\ell(d_m)=2$. Пусть теперь $g$ - чередующееся произведение ненулевых степеней $a$ и $b$ в группе $G$. Докажем, что $g\neq 1$. Можно считать, что $g$ начинается со степени $a$ ( в противном случае мы бы рассмотрели вместо $g$ соответствующее сопряжение). Итак, $g=a^{m_1}b^{m_2}\cdot\ldots\cdot c^{m_r}$, где $c=a$ или $b$, все $m_i\neq 0$.

По построению, найдется такой отрезок $\{\alpha,\alpha+1,\ldots,\alpha+n\}$, где $n=2(|m_1|+\ldots+|m_r|)$, на котором $a$ и $b$ действуют следующим образом:

$$(\alpha+j)a^{sgn(m_1)}=\alpha+jd_{|m_1|},\ 0\leq j\leq 2|m_1|,$$

$$(\alpha+j)b=\alpha+j,\ \ 0\leq j<2|m_1|,$$

$$(\alpha+2|m_1|+j)\,b^{sgn(m_2)}=\alpha+2|m_1|+jd_{|m_2|},\ 0\leq j\leq 2|m_2|,$$

$$(\alpha+2|m_1|+j)a=\alpha+2|m_1|+j,\ 0<j<2|m_2|,$$

. . . . . .

$$(\alpha+2(|m_1|+\ldots+|m_{r-1}|)+j)c^{sgn(m_r)}=\alpha+2(|m_1|+\ldots+|m_{r-1}|)+jd_{|m_r|},\ 0\leq j\leq 2|m_r|,$$

$$(\alpha+2(|m_1|+\ldots+|m_{r-1}|)+j)\bar{c}=\alpha+2(|m_1|+\ldots+|m_{r-1}|)+j,\ 0<j\leq 2|m_r|,$$

где $\bar{c}=b$, если $c=a$, и $\bar{c}=a$, если $c=b$. Тогда $\alpha g=$ $=\alpha a^{m_1}b^{m_2}\cdot\ldots\cdot c^{m_r}=(\alpha+2|m_1|)b^{m_2}\cdot\ldots\cdot c^{m_r}=\ldots=(\alpha+2(|m_1|+\ldots$ $\ldots+|m_{r-1}|)c^{m_r}=\alpha+n$. Таким образом, $g\neq 1$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Как показал Ю.И.Мерзляков [3], 2-группа Алёшина является расширением подпрямого произведения четырех экземпляров группы Григорчука $H$ с помощью циклической группы порядка 4. Мы докажем, что группа $H$ является ограниченной. Тогда, по леммам 4,5, ограниченной будет и 2-группа Алёшина, а, по лемме 3, она вложима в $G$.

Напомним, что группа $H$ строится следующим образом. Пусть

$\Delta$ - отрезок прямой линии; $\Delta_1$, $\Delta_2$ - его половины; $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}$, $\Delta_{22}$ - их половины и т.д., $\Pi$ обозначает перестановку половинок (левая сдвигается вправо, правая - влево); $T$ - тождественное преобразование отрезка. Пусть, далее, $t$ действует, как $\Pi$, на $\Delta$, $u$, $v$ действуют на отрезках $\Delta_1, \Delta_{21}, \Delta_{221}, \ldots$, соответственно, как $T, \Pi, \Pi, \ldots; \Pi, T, \Pi, \ldots$. Тогда $H = \text{гр}(t, u, v)$.

Вместо отрезков $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ мы рассмотрим множества $Z, Z_1 = 2Z+1$, $Z_2 = 2Z$. Полагаем

$$(2k+1)t = 2k, \quad (2k)t = 2k+1, \quad k \in Z.$$

Тогда $\ell(t) = 1$. Пусть

$$Z_{11} = \{1+8k,\ 3+8k,\ k \in Z\},$$
$$Z_{12} = \{5+8k,\ 7+8k,\ k \in Z\},$$
$$Z_{21} = Z_{11}t = \{8k,\ 2+8k,\ k \in Z\},$$
$$Z_{22} = Z_{12}t = \{4+8k,\ 6+8k,\ k \in Z\}.$$

Определим $\Pi$ на $Z_1$ и $Z_{21}$:

$$1+8k \xleftrightarrow{\Pi} 7+8(k-1), \quad 3+8k \xleftrightarrow{\Pi} 5+8k, \quad k \in Z,$$
$$8k \xleftrightarrow{\Pi} 2+8k, \quad k \in Z.$$

Далее, полагаем

$$Z_{221} = \{4+8k,\ 6+8k,\ k \in Z_1\},$$
$$Z_{222} = \{4+8k,\ 6+8k,\ k \in Z_2\},$$
$$Z_{2221} = \{4+8k,\ 6+8k,\ k \in Z_{21}\},$$
$$Z_{2222} = \{4+8k,\ 6+8k,\ k \in Z_{22}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отображение $\Pi$ на $Z_{221}$, $Z_{2221}, \ldots$:

$$4+8k \xleftrightarrow{\Pi} 6+8k, \quad k \in Z_1, \quad 4+8k \xleftrightarrow{\Pi} 6+8k, \quad k \in Z_{21}, \ldots$$

Рассматривая преобразования, соответствующие $u$ и $v$, заключаем, что $\ell(u) = \ell(v) = 2$. Таким образом, $\text{гр}(t, u, v) < \bar{G}$. Теорема доказана.

Литература

1. Н.М.СУЧКОВ, Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами, Алгебра и логика, 23, № 5 (1984), 573-577.

2. М.И.КАРГАПОЛОВ, Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, Основы теории групп, изд. 3-е, М., Наука, 1982.

3. Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, О бесконечных конечно-порожденных периодических группах, ДАН СССР, 268, № 4 (1983), 803-805.

Поступило 20 января 1985 г.