В. Г. Яхно, Одномерная обратная задача для волнового уравнения, *Докл. АН СССР*, 1980, том 255, номер 4, 807–810

Теорема 5. *Пусть алгебраическое множество* $X \subseteq \mathbf{R}^n$ *определено системой из* m *полиномиальных уравнений. Пусть* k – *число различных мономов, входящих с ненулевым коэффициентом хотя бы в один из полиномов системы.*

Тогда число компонент связности множества X, *а в невырожденном случае – сумма чисел Бетти гладкого* $(n-m)$*-мерного многообразия* X *оцениваются сверху некоторыми явно выписываемыми функциями от* n *и* k.

Класс П-систем можно расширить. Определим класс П-функций как минимальный класс функций, содержащий полиномы от любого числа переменных и замкнутый относительно суперпозиций и решений уравнений Пфаффа (т.е. если аналитическая функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению $df = \Sigma F_i(x, f)\,dx_i$, в котором F_i – П-функции, то f – П-функция). Для систем уравнений $f_1 = f_2 = \ldots = f_m = 0$ с П-функциями f_j можно определить понятие сложности. Теоремы 1 и 4 распространяются и на такие системы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований, Москва

Поступило
4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И.Р. Шафаревич*, Основы алгебраической геометрии, М., "Наука", 1972. [2] *В.И. Арнольд, О.А. Олейник*, Вестн. МГУ, сер. 1, матем., мех., № 6, 7 (1979).

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В.Г. ЯХНО

ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Г.И. Марчуком 9 VI 1980)

В данной работе приведены результаты исследований, относящиеся к одномерной обратной задаче для волнового уравнения. Подобные задачи актуальны в геофизике (см. ([1], [2]) и литературу, приведенную в обзоре, с которого начинается работа ([1])). Основное содержание настоящей работы составляют теоремы устойчивости "в целом" и существования "в малом" решения обратной задачи, а также метод построения "в целом" этого решения в предположении его существования.

Пусть R, R^n – одномерное и n-мерное вещественные пространства; $R_+ = \{t \in R \mid t > 0\}$; L_c – дифференциальный оператор в R^{n+2},

$$L_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2} - c^2(z)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2};$$

μ, c_0, N, T – фиксированные числа из R_+, причем $c_0 > \mu$, $M = N + c_0$;

$$Q(T) = \left\{ c(z) \in W_2^3\left(0, \frac{MT}{2}\right) \middle| \ c(0) = c_0,\ z \geqslant \mu,\ |c(z) - c_0| \leqslant N, \right.$$
$$\left. \lim_{z \to +0} c'(z) = 0 \right\},$$
$$Q_1(T) = \{ c(z) \in Q(T) \mid \|c\|_{W_2^3(0, MT/2)} \leqslant M \}.$$

Для любой функции $c(z) \in Q(T)$ обозначим через z_c число, удовлетворяющее равенству $\int\limits_0^{z_c} \frac{d\xi}{c(\xi)} = \frac{T}{2}$, а через $O_c(T)$ – множество

$$O_c(T) = \left\{ (z, y, t) \middle| z \in R_+, \ y \in R^n, \ \frac{z}{M} < t < T - \int\limits_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)} \right\}.$$

$\mathcal{D}^*(O_c(T))$ – совокупность всех линейных непрерывных функционалов над $C_0^\infty(O_c(T))$, т.е. пространство обобщенных функций. В дальнейшем будем считать $f(y)$ фиксированной и принадлежащей классу $C_0^l(R^n)$, $l \geqslant n + 9$.

Определение 1. Обобщенную функцию $u(z, y, t) \in \mathcal{D}^*(O_c(T))$, для которой имеют место равенства

$$(1) \qquad L_c u = 0, \quad u\big|_{t=+0} = 0, \quad u_t\big|_{t=+0} = \delta(z) f(y), \quad u_z\big|_{z=+0} = 0,$$

будем называть обобщенным решением граничной задачи (1). При этом под $\delta(z)$ понимается $\lim\limits_{z_0 \to +0} \delta(z - z_0)$, где $\delta(z - z_0)$ – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке z_0.

Лемма 1. *Для фиксированной функции $c(z) \in Q(T)$ существует единственное обобщенное решение граничной задачи* (1) $u(z, y, t) \in \mathcal{D}^*(O_c(T))$,*причем такое, что след $u(z, y, t)\big|_{z=0, y=0}$ принадлежит $W_2^3(0, T)$, и имеют место равенства*

$$\lim_{t \to +0} u(z, y, t)\big|_{z=0, y=0} = \frac{f(0)}{2c_0}, \quad \lim_{t \to +0} u_t(z, y, t)\big|_{z=0, y=0} = 0.$$

Определение 2. Пусть $c(z)$ – функция из $Q(T)$, а $u(z, y, t) \in \mathcal{D}^*(O_c(T))$ – обобщенное решение граничной задачи (1), соответствующее $c(z)$. Тогда сужение функции $c(z)$ на множество $[0, z_c]$ назовем решением обратной задачи, отвечающим заданной информации $H(t)$, если при $t \in [0, T]$ имеет место равенство

$$u(0, 0, t) = H(t).$$

Пусть сужение функции $c_1 \in Q_1(T)$ на множество $[0, z_{c_1}]$ есть решение обратной задачи, отвечающее информации $H_1(t)$, а сужение $c_2 \in Q_1(T)$ на множество $[0, z_{c_2}]$ – решение, отвечающее информации $H_2(t)$.

Теорема 1. *Пусть $f(0) \neq 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\|c_1 - c_2\|_{L_2\left(0, \frac{\mu}{1 + M/\mu}\right)} \leqslant \frac{K}{f(0)} \|H_1 - H_2\|_{L_2(0, T)}.$$

Здесь, как и в дальнейшем, K – константа, зависящая от μ, M, $\operatorname{supp} f$, n, $\|f\|_{C^9(R^n)}$.

Теорема 2. *Для существования функции $c(z) \in Q(T)$, сужение которой на множество $[0, z_c]$ является решением обратной задачи, отвечающей информации $H(t)$, необходимо, чтобы $H(t) \in W_2^3(0, T)$ и выполнялись условия*

$$(2) \qquad \lim_{t \to +0} H(t) = \frac{f(0)}{2c_0}, \qquad \lim_{t \to +0} H'(t) = 0.$$

Теорема 3. *Пусть $f(0) \neq 0$. Тогда найдется число $T^* > 0$ такое, что если $0 < T < T^*$, то для любой фиксированной функции $H(t) \in W_2^3(0, T)$, удовлетворяющей условиям* (2), *существует функция $c(z) \in Q(T)$, сужение которой на множество $[0, z_c]$ является единственным решением обратной задачи, отвечающим $H(t)$.*

В связи с тем, что в дальнейших наших рассмотрениях используется предложение, на котором основано доказательство теоремы 3, мы приведем его ниже.

Предложение 1. *В условиях теоремы* 3 *существование функции* $c(z) \in Q(T)$, *сужение которой на множество* $[0, z_c]$ *является решением обратной задачи, отвечающим информации* $H(t)$, *эквивалентно существованию решения* $\mathbf{w}(x) \in \mathfrak{N}(T, N_1)$ *некоторой системы из шести нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, которую запишем в операторном виде*:

$$\mathbf{w} = C\mathbf{w}. \tag{3}$$

Вследствие громоздкости точный вид системы опущен. Здесь

$$\mathfrak{N}(T, N_1) = \{\, \mathbf{w} = (w_i,\ i = 1, 2, \ldots, 6) \mid w_i(x) \in C[0, T/2],\ i = 1, 2, 3, 4,$$
$$w_5,\ w_6 \in W_2^1(0, T/2);\quad \|w_1 - c_0\|_{C[0,T/2]} \leqslant N,\ \ w_1(x) \geqslant \mu,$$
$$\|w_2 - 1\|_{C[0,T/2]} \leqslant \sqrt{M/\mu},\ \ w_2(x) \geqslant \sqrt{\mu/M},\ \ \|w_k\|_{C[0,T/2]} \leqslant N_1,$$
$$k = 3, 4, 5, 6\,,$$

N_1 – некоторое число из R_+. При этом, если $\mathbf{w}(x) \in \mathfrak{N}(T, N_1)$ есть решение уравнения (3), то функция $c(z) = w_1(\varphi(z))$ является решением обратной задачи. Функция $\varphi(z)$ – обратная к функции φ^{-1}: $x \mapsto \varphi^{-1}(x) \equiv \int_0^x w_1(\xi)d\xi$, $x \in [0, T/2]$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{w}(x) \in \mathfrak{N}(T, N_1)$ *есть решение операторного уравнения* (3), *и выполнены условия теоремы* 3.

Тогда можно указать итерационный процесс построения последовательности вектор-функций $\{\mathbf{w}_m\}_{m \in \mathcal{N}}$ ($\mathcal{N}$ – *множество натуральных чисел*) *такой, что* $\mathbf{w}_m = (w_{mi},\ i = 1, 2, \ldots, 6)$,

$$w_{mi} \in W_2^1(0, T/2), \qquad \lim_{m \to +\infty} \|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}\|(T) = 0,$$

причем имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}\|(T) \leqslant \left(\frac{K}{f(0)}\right)^m \frac{1}{m!},$$

где

$$\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}\|(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant 6} \|w_{mi} - w_i\|_{C[0,T/2]}. \tag{4}$$

Замечание. Пусть утверждение теоремы 4 имеет место. Тогда, учитывая предположение 1, видим, что указан метод построения "в целом" решения обратной задачи в предположении его существования. Это составляет основную значимость теоремы 4.

Доказательство теоремы 4 будет следовать из следующих предложений.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.

Тогда можно, начиная с любого фиксированного элемента $\mathbf{w}_1(x) \in \mathfrak{N}(T, N_1)$, *построить последовательность итераций* $\{\mathbf{w}_m\}_{m \in \mathcal{N}}$ *такую, что для каждого* $m \in \mathcal{N}$ *имеет место*

$$\mathbf{w}_m = (w_{mi},\ i = 1, 2, \ldots, 6), \qquad w_{mi} \in W_2^1(0, T/2),\ i = 1, 2, \ldots, 6,$$

$$\mathbf{w}_{m+1}(x) = (C\overline{\mathbf{w}}_m)(x) + (C'[\overline{\mathbf{w}}_m](\mathbf{w}_{m+1} - \overline{\mathbf{w}}_m))(x), \tag{5}$$

где $C'[\overline{\mathbf{w}}_m]$ – *производная Фреше от оператора* C *в "точке"* $\overline{\mathbf{w}}_m(x)$, *а* $\overline{\mathbf{w}}_m(x)$ *определяется посредством формул*

$$\overline{\mathbf{w}}_m(x) = (\overline{w}_{mi}(x),\ i = 1, 2, \ldots, 6),$$

$$\overline{w}_{mi}(x) = \begin{cases} w_{mi}(x), & \alpha_i \leqslant w_{mi}(x) \leqslant \beta_i, \\ \alpha_i, & \alpha_i > w_{mi}(x), \\ \beta_i, & \beta_i < w_{mi}(x), \end{cases}$$

где $\alpha_1 = \mu$, $\alpha_2 = \sqrt{\mu/M}$, $\beta_1 = M$, $\beta_2 = 1 + \sqrt{M/\mu}$, $-\alpha_j = \beta_j = N_1$, $j = 3, 4, 5, 6$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $\mathbf{w}(x) \in \mathfrak{R}(T, N_1)$ *есть решение операторного уравнения* (3) *и выполнены условия теоремы* 3.

Тогда для любой последовательности вектор-функций, удовлетворяющей (5), *имеет место оценка*

$$\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}\|(T) \leqslant \left(\frac{K}{f(0)}\right)^m \frac{1}{m!} \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}\|(T).$$

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
14 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] ***В.Г. Романов,*** **В сб.: Математические проблемы геофизики, в. 2, Новосибирск, 1971, стр. 100.** [2] ***В.Г. Романов,*** **Там же, 1972, стр. 164.**