Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. А. Бокуть, Об одном свойстве групп Буна,
Алгебра и логика. Семинар, 1966, том 5, номер 5, 5–23

https://www.mathnet.ru/al1065

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
16 января 2026 г., 22:30:07

А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
Семинар

Том 5
Выпуск 5 Руководитель А.И.Мальцев 1966 г.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРУПП БУНА.

Л.А.Бокуть

Введение

В настоящее время имеется несколько доказательств результата, установленного впервые П.С.Новиковым, о неразрешимости проблемы тождества слов для конечно-определённых групп [1] - [5] . В этой заметке, не претендующей на новизну результатов, мы предлагаем некоторое новое доказательство указанного факта, основывающееся на одной конструкции, принадлежащей Буну [2] . Особенность его состоит в том, что одновременно (почти без дополнительных усилий) устанавливается следующее свойство групп Буна:

Степень неразрешимости проблемы тождества слов группы Буна $G(T, q)$ совпадает со степенью неразрешимости проблемы равенства специальных слов $\sum$ слову q в полугруппе T .

Этот результат, впервые доказанный А.А.Фридманом [6] ,[7], затем Буном [9] , является одним из центральных мест в доказательстве теоремы о существовании конечно-определенных групп с произвольной степенью неразрешимости проблемы тождества слов (теорема А.А.Фридмана [6] , [7] ; см. также Бун [10] и Клефем[8]).

Отметим, что в работе используется понятие проходных букв П.С.Новикова, лемма Бриттона о группах с проходными буквами, и,

кроме того, используются некоторые соображения, относящиеся к возможности построения в группах с проходными буквами канонического вида слов.

§ 1. Основные определения и леммы

1. Пусть $S=\{s_b, b\in B\}$ – некоторое множество букв (алфавит). Под S -словом мы будем понимать выражение вида:

$$s_{b_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{b_k}^{\varepsilon_k}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_i=\pm 1$. Два слова A и B вида (1) называются графически равными $(A\equiv B)$, если все их буквы последовательно совпадают. Слово (1) называется несократимым, если оно не содержит подслов вида $s_b s_b^{-1}, s_b^{-1} s_b$. Пустое слово обозначим знаком 1.

Пару $G=(S;\mathcal{D})$, где S – алфавит, $\mathcal{D}$ – система равенств вида:

$$A_i=B_i, \tag{2}$$

где A_i, B_i – S -слова, будем называть групповым исчислением над S с определяющими соотношениями $\mathcal{D}$.

Следующие равенства называются тривиальными соотношениями группового исчисления:

$$s_b s_b^{-1}=1, \quad s_b^{-1} s_b=1. \tag{3}$$

Определим понятие выводимости в групповом исчислении. Говорят, что слово $\mathcal{U}$ выводимо в G из слова V, если V можно перевести в $\mathcal{U}$ с помощью некоторой цепочки преобразований

$$V\to V_1\to\dots\to V_n\equiv\mathcal{U},$$

каждое из которых представляет собой либо тождественное преобразование, либо замену в соответствующих словах одной части равенств (2), (3) на другую.

В дальнейшем мы вместо слов "групповое исчисление", будем говорить "группа", а вместо " выводится в G " – " равно в G". Алфавит S будем называть системой образующих для G.

2. Пусть $\bar{G}=(S;\mathcal{D})$ – группа с множеством образующих S и соотношений $\mathcal{D}$. Говорят, что некоторая группа обладает множеством проходных букв

$$\mathcal{P}=\{p_m, m\in M\}$$

с основанием $\bar{G}$, если

$$G=(S,\mathcal{P};\mathcal{D}, E_{m_i} p_m=p_m F_{m_i}),$$

где E_{m_i}, F_{m_i} - S- слова (считаем, что $S \cap \mathcal{P} = \Phi$).

Введем обозначения:

$$\mathcal{A}_{\rho_m \rho_m} = V(E_{m_i}),\ \mathcal{B}_{\rho_m \rho_m} = V(F_{m_i}),$$

где $V(E_{m_i})$ - некоторое слово от слов E_{m_i}, $V(F_{m_i})$ то же слово, но от слов F_{m_i} .

ЛЕММА I. Предположим, что в некоторой цепочке преобразований группы G :

$$W_{\rho_m} \mathcal{U}_{\rho_m}^{-1} V \to W_{1\rho_m} \mathcal{U}_{1\rho_m}^{-1} V_1 \to \ldots \to W_{n\rho_m \rho_m^{-1}} V_n \to W_n V_n, \quad (4)$$

выделенные буквы ρ_m и ρ_m^{-1} сокращаются между собой. Тогда

$$W = W_n \mathcal{A}_{\rho_m \rho_m},\ \mathcal{U} = \mathcal{B}_{\rho_m \rho_m}^{-1},\ V = V_n,$$

и если цепочка (4) не содержит вставок проходных букв, то слова $W, \mathcal{U}, V$ можно перевести, соответственно, в слова $W_n \mathcal{A}_{\rho_m \rho_m}$, $\mathcal{B}_{\rho_m^{-1} \rho_m}$, V_n так же без вставок проходных букв.

Лемма доказывается с помощью очевидной индукции по длине цепочки (4).

Дадим теперь следующее основное для дальнейшего

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (П.С.Новиков). Буквы $\rho_m\ (m \in M)$ называются правильными проходными буквами группы G с основанием $\bar{G}$, если для каждого m и всех элементов $\mathcal{A}_{\rho_m \rho_m}$ имеет место утверждение $\mathcal{A}_{\rho_m \rho_m} = 1$ в $\bar{G}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_{\rho_m \rho_m} = 1$ в $\bar{G}$.

ЛЕММА 2. (П.С.Новиков). Пусть $\mathcal{P}$- правильная система проходных букв группы G с основанием $\bar{G}$. Пусть W - некоторое $S \cup P$ - слово и $W = 1$ в G . Тогда W можно перевести в I с помощью некоторой цепочки преобразований группы G , не содержащей вставок проходных букв.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторую цепочку преобразований слова W в 1 :

$$W \to W_1 \to \cdots \to W_n \equiv 1 \quad (5)$$

и выделим в ней последнюю вставку букв ρ_m. Пусть это будет вставка вида:

$$W_k \equiv W_{1k} W_{2k} \to W_{k+1} \equiv W_{1k} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2k}. \qquad (6)$$

Вставленные буквы ρ_m, ρ_m^{-1} должны в преобразованиях (5) сокращаться. Пусть при этом буква ρ_m сокращается не позднее буквы ρ_m^{-1}. Тогда ρ_m сокращается либо одновременно со вставленной с нею буквой ρ_m^{-1}, либо с некоторой буквой ρ_m^{-1} из слова W_{1k}.

В первом случае цепочка (5) содержит подцепочку вида:

$$W_{k+1} \equiv W_{1k} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2k} \to \ldots \to W_{1s} \rho_m \rho_m^{-1} W_{2s} \to W_s \equiv W_{1s} W_{2s} \to \ldots \to 1.$$

Ввиду леммы I получаем, что существуют такие элементы $\mathfrak{A}_{\rho_m \rho_m}$ и $\mathfrak{B}_{\rho_m \rho_m}$, что слова $W_{1k}, 1, W_{2k}$ переводятся (без вставок проходных букв) в слова $W_{1s} \mathfrak{A}_{\rho_m \rho_m}, \mathfrak{B}_{\rho_m^{-1} \rho_m}, W_{2s}$. Поэтому $\mathfrak{B}_{\rho_m \rho_m} = 1$. Ввиду правильности букв ρ_m, это означает, что $\mathfrak{A}_{\rho_m \rho_m} = 1$ в $\bar{G}$, и поэтому слово W_k можно перевести в слово W_s без ставок проходных букв.

Совершенно аналогично рассматривается и второй из высказанных выше случаев.

Доказательство леммы завершается с помощью индукции по числу вставок проходных букв в цепочке (5).

Из леммы Новикова получаем, что если $\mathcal{P}$ - правильная система проходных букв, то $\bar{G}$ является подгруппой группы G.

ЛЕММА 3. (Бриттон [3]). Пусть $\mathcal{P}$ - правильная система проходных букв группы G с основанием $\bar{G}$ и пусть W - некоторое $S \cup P$ - слово и $W=1$ в G. Тогда либо W является S - словом и поэтому $W=1$ в $\bar{G}$, либо W содержит одно из следующих подслов

$$\rho_m^{-1} A \rho_m, \rho_m B \rho_m^{-1},$$

где A, B - S - слова и $A = \mathfrak{A}_{\rho_m \rho_m}$, $B = \mathfrak{B}_{\rho_m \rho_m}$ (в $\bar{G}$).

4. В этом пункте мы дадим некоторое расширение понятия проходных букв Новикова (см. Бриттон [3], А.А.Фридман [7]). При этом термин "проходные буквы" менять не будем.

Приведем соответствующие определения. Пусть $\bar{G} = (S; \mathcal{D})$ - группа с образующими S и соотношениями $\mathcal{D}$. Будем говорить теперь, что некоторая группа G обладает множеством проходных букв

$$\mathcal{P} = \{\rho_m ; m \in M\}$$

с основанием $\bar{G}$, если

$$G=(S,\mathcal{P};\mathcal{D},\ A_i\rho_{m_i}=\rho_{n_i}B_i), \tag{7}$$

где A_i , B_i - S -слова.

Буквы ρ_m и ρ_n , входящие в одно и то же соотношение группы G , назовем родственными. Будем считать, далее, каждую букву ρ_m родственной самой себе и распространим это отношение по транзитивности на всё множество $\mathcal{P}$. В результате $\mathcal{P}$ разобъётся на классы родственных букв

$$\mathcal{P}=\cup\mathcal{P}_n \quad (n\in N).$$

В каждом классе $\mathcal{P}_n$ зафиксируем по представителю ρ_n $(n\in N)$ и все остальные буквы ρ_{n_i} этого класса выразим некоторым образом через ρ_n с помощью соотношений группы G :

$$\rho_{n_i}=A'^{-1}_{n_i}\rho_n B'_{n_i}. \tag{8}$$

Исключая буквы ρ_{n_i} , не равные буквам ρ_n , из соотношений для G с помощью равенств (8), получим группу вида

$$G'=(S,\rho_n\ (n\in N);\ \mathcal{D},E_{n_i}\rho_n=\rho_n F_{n_i}).$$

Назовем систему букв $\rho_m\ (m\in M)$ правильной системой проходных букв группы G с основанием $\bar{G}$, если буквы $\rho_n\ (n\in N)$ являются правильными проходными буквами (в предыдущем смысле) для G' с основанием $\bar{G}$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{A}_{\rho_{n_i}\rho_{n_j}}&=A'^{-1}_{n_j}\mathcal{A}_{\rho_n\rho_n}A'_{n_i}\\ \mathcal{B}_{\rho_{n_j}\rho_{n_i}}&=B'^{-1}_{n_j}\mathcal{B}_{\rho_n\rho_n}B'_{n_i}\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

где $\rho_{n_i},\rho_{n_j}\in\mathcal{P}_n$, слова $A'_{n_i},A'_{n_j},B'_{n_i},B'_{n_j}$ взяты из равенств (8).

Введенные элементы $\mathcal{A}_{\rho_{n_i}\rho_{n_j}},\mathcal{B}_{\rho_{n_j}\rho_{n_i}}$ удовлетворяют соотношению:

$$\mathcal{A}_{\rho_{n_i}\rho_{n_j}}\cdot\rho_{n_i}=\rho_{n_j}\mathcal{B}_{\rho_{n_j}\rho_{n_i}}.$$

Из леммы 3 непосредственно следует

ЛЕММА 3′ . (Бриттон). Пусть $\mathcal{P}$ - правильная система проходных букв группы G с основанием $\bar{G}$ и пусть W - некоторое $S\cup\mathcal{P}$ -слово, $W=1$ в G . Тогда либо

W является S-словом и $W=1$ в $\bar{G}$, либо W содержит одно из подслов:

$$\rho_{n_i}^{-1} A \rho_{n_i}, \quad \rho_{n_j} B \rho_{n_i}^{-1},$$

где A, B – S-слова и $A = \mathfrak{A}_{\rho_{n_i}\rho_{n_j}}$, $B = \mathfrak{B}_{\rho_{n_j}\rho_{n_i}}$ в $\bar{G}$.

5. Пусть G – группа вида (7).

Под расширенной системой соотношений группы G мы, следуя [I], будем понимать систему соотношений G, пополненную равенствами

$$B_i^{-1} \rho_{n_i}^{-1} = \rho_{m_i}^{-1} A_i^{-1}. \tag{10}$$

Как обычно, в преобразованиях

$$X A_i \rho_{m_i} Y \rightleftharpoons X \rho_{n_i} B_i Y, \quad X B_i^{-1} \rho_{n_i}^{-1} Y \rightleftharpoons X \rho_{m_i}^{-1} A_i^{-1} Y$$

относительно букв $\rho_{m_i}^{\pm 1}, \rho_{n_i}^{\pm 1}$, а также соответствующих букв слов X и Y будем говорить, что они имеют одну и ту же индивидуальность. По транзитивности можно говорить и об индивидуальности букв в произвольных цепочках преобразований. (Здесь, так же как и везде ниже, до конца этого пункта под "преобразованием" мы понимаем преобразование группы G из расширенной системы соотношений).

Пусть имеем цепочку преобразований группы G:

$$W \rho_n^{\varepsilon} V \longrightarrow W_1 \rho_{n_1}^{\varepsilon} V_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow W_i \rho_{n_i}^{\varepsilon} V_i, \tag{11}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\rho_n^{\varepsilon}, \ldots, \rho_{n_i}^{\varepsilon}$ имеют одну и ту же индивидуальность. Тогда в G имеют место равенства:

$$W_i = W \mathfrak{A}_{\rho_{n_i}^{\varepsilon} \rho_n^{\varepsilon}}, \quad V_i = \mathfrak{B}_{\rho_n^{\varepsilon} \rho_{n_i}^{\varepsilon}} V,$$

где мы считаем, что

$$\mathfrak{A}_{\rho_{n_i}^{-1} \rho_n^{-1}} = \mathfrak{B}_{\rho_n \rho_{n_i}}, \quad \mathfrak{B}_{\rho_n^{-1} \rho_{n_i}^{-1}} = \mathfrak{A}_{\rho_{n_i} \rho_n}.$$

Доказательство высказанного утверждения легко провести с помощью индукции по длине цепочки (II).

Отсюда легко выводится, что если в некоторой цепочке преобразований, начинающихся со слов $W \rho_n V \rho_m^{-1} T$ или $W \rho_m^{-1} V \rho_n T$ индивидуальности букв ρ_n и ρ_m^{-1} сокращаются между собой, то

$$V = \mathfrak{B}_{\rho_n \rho_m} \quad \text{или} \quad V = \mathfrak{A}_{\rho_n \rho_m},$$

соответственно.

§ 2. Группы с правильными проходными буквами

I. Пусть имеем некоторую группу G вида (6) с системой правильных проходных букв $\mathcal{P}$ и основанием $\bar{G}=(S;\mathcal{D})$.

Условимся, что в этом пункте буквы R и T (с индексами) будут обозначать слова от алфавита S, буквы α и β (с индексами) - элементы множества $\{p_m^{\pm 1}, m\in M\}$.

Предположим, что во множестве всех групповых слов от алфавита $\mathcal{P}\cup S$ выделено некоторое подмножество C. О словах этого множества мы будем говорить, что они имеют канонический вид (или являются каноническими словами). Считаем выполненными следующие условия:

А.I. Все слова из множества C несократимы и не содержат подслов вида

$$\alpha^{-1}R\alpha,$$

где $R=1$ в $\bar{G}$.

А.2. Множество C содержит буквы $p_m^{\pm 1}$, $m\in M$.

А.3. Если $W\in C$ и $W\equiv R_1\alpha_1\dots\alpha_s R_{s+1}$, то слова вида

$$R_i\alpha_i\dots\alpha_j R_{j+1},\ R_i\alpha_i\dots\alpha_j,\ \alpha_i\dots\alpha_j,\ \alpha_i\dots\alpha_j R_{j+1},$$

где $1\le i\le j\le s$, также принадлежат C.

А.4. Если $R\alpha, T\beta\in C, R=T\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$, то $\alpha=\beta$ в G, $R=T$ в $\bar{G}$.

А.5. Каждое слово в алфавите группы G равно в этой группе слову, имеющему канонический вид.

ЛЕММА 4. (О единственности канонического вида слов). Пусть W, $\mathcal{U}$ - два слова группы G, имеющие канонический вид, причем $W=\mathcal{U}$.

Тогда, если $W\equiv R_1\alpha_1\dots\alpha_s R_{s+1}$, то $\mathcal{U}\equiv T_1\alpha_1\dots\alpha_s T_{s+1}$, где $T_i=R_i$ в $\bar{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий А.I - А.4 следует, прежде всего, что слово, имеющее канонический вид, не содержит подслов

$$\beta^{-1}R\alpha,$$

где $R=\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$.

Пусть теперь $W, \mathcal{U}$ - слова, удовлетворяющие условиям леммы. Из равенства

$$\mathcal{U}^{-1}W=1,$$

ввиду леммы Бриттона и сделанного замечания, получаем, что

$$\mathcal{U} \equiv T_1 \beta_1 \mathcal{U}_1 \quad \text{и} \quad T_1^{-1} R_1 = \mathcal{O}\!\!\mathcal{L}_{\alpha_1 \beta_1} .$$

Отсюда, в силу условия А.4, следует, что $\alpha_1 = \beta_1$ в G и $R_1 = T_1$ в $\overline{G}$.

Повторяя эти рассуждения, мы получим, что элемент $\mathcal{U}$ имеет требуемый вид.

Лемма доказана.

2. Предположим теперь, что имеется некоторая конечная последовательность групп

$$G_0, G_1, \ldots, G_k, \ldots, G_n = G, \tag{12}$$

удовлетворяющая условиям:

В.1. Каждая группа G_k, $k > 0$, является группой с системой проходных букв $p_i^{(k)}$, $i \in I_k$, и основанием G_{k-1}.

В.2. Соотношения группы G_k, $i \le k \le n$, содержащие проходные буквы, имеют вид

$$E_{1i} x_i E_{2i} p_{m_i}^{(k)} = p_{n_i}^{(k)} F_{1i} y_i F_{2i}, \tag{13}$$

где

x_i - проходная буква некоторой группы G_t, $i \le t < k$, E_{1i}, E_{2i} - слова от образующих группы G_{t-1}; y_i - проходная буква некоторой группы G_s, $i \le s < k$, F_{1i}, F_{2i} - слова от образующих группы G_{s-1}.

Кроме того, в соотношениях (13) мы допускаем случай, когда буквы x_i (или y_i) являются образующими группы G_0. В этом случае потребуем, чтобы слова E_{1i}, E_{2i} (соответственно, F_{1i}, F_{2i}) были бы словами этой же группы G_0.

Нас будет интересовать вопрос об индуктивном определении в группах G_k, $1 \le k \le n$, канонических слов, удовлетворяющих условиям А.1 - А.5.

Предположим, что в группе G_0 каким-то способом определены канонические слова и что каждое слово этой группы равно только одному каноническому слову. (В рассмотренном ниже случае G_0 - свободная группа и канонические слова в ней определены условием несократимости). Далее, будем считать, что если $k > 1$ то относительно группы G_{k-1} доказана правильность системы букв $p_i^{(k-1)}$ и в группе G_{k-1} определены канонические слова, удовлетворяющие условиям А.1 - А.5. Наконец, предположим, что доказана также правильность букв $p_i^{(k)}$ для группы G_k.

Тогда выделение канонических слов в алфавите группы G_k часто (в том числе во всех рассмотренных ниже случаях) можно осу-

ществить следующими условиями:

С.I. Все канонические слова группы G_{k-1} остаются каноническими и в G_k.

С.2. Слово

$$W \equiv R_1 \alpha_1 \ldots \alpha_s R_{s+1} ,$$

где R_i - G_{k-1} - слова, α_i - проходные буквы группы G_k, считается каноническим, если оно несократимо, R_i имеет канонический вид в группе G_{k-1} и W не содержит левых частей следующих равенств, построенных для каждого из соотношений (13):

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & \beta \mathcal{L}_{\beta x_i} E_{2i} P^{(k)}_{m_i} = \mathcal{A}_{x_i \beta} E^{-1}_{1i} P^{(k)}_{n_i} F_{1i} y_i F_{2i} ; \\
2. & \beta^{-1} \mathcal{L}_{\beta^{-1} x_i^{-1}} E^{-1}_{1i} P^{(k)}_{n_i} = \mathcal{A}_{x_i^{-1} \beta^{-1}} E_{2i} P^{(k)}_{m_i} F^{-1}_{2i} y_i^{-1} F^{-1}_{1i} ; \\
3. & \gamma \mathcal{L}_{\gamma y_i} F_{2i} P^{(k)-1}_{m_i} = \mathcal{A}_{y_i \gamma} F^{-1}_{1i} P^{(k)-1}_{n_i} E_{1i} x_i E_{2i} ; \\
4. & \gamma^{-1} \mathcal{L}_{\gamma^{-1} y_i^{-1}} F^{-1}_{1i} P^{(k)-1}_{n_i} = \mathcal{A}_{y_i^{-1} \gamma^{-1}} F_{2i} P^{(k)-1}_{m_i} E^{-1}_{2i} x_i^{-1} E^{-1}_{1i} ,
\end{array}\right\} , \quad (14)$$

где β, x_i - проходные буквы одной и той же группы G_t ; аналогично, γ и y_i .

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество слов алфавита группы G_k , удовлетворяющих условиям C_1 , C_2 , удовлетворяет, очевидно, и условиям А.2, А.3 и А.5.

§ 3. Группы Буна

I. Под специальной полугруппой мы будем понимать полугруппу T с образующими

$$s_b , q_a \quad (b \in B, \ a \in A) \tag{15}$$

и определяющими соотношениями

$$\Sigma_i = \Gamma_i , \quad i = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

где Σ_i , Γ_i - так называемые специальные слова, то есть слова вида

$$S q_a S' ,$$

где S, S' - слова от букв s_b .

Пусть T - специальная полугруппа с выделенной буквой $q_{a_0} = q$. Построим для пары (T, q) следующую группу Буна $G(T, q) = G$.

Группа $G(T,q)$ порождается образующими:

$$s_b,\ q_a,\ k,\ t,\ x,\ y,\ l_i,\ r_i, \tag{I7}$$

где $b\in B,\ a\in A,\ 1\le i\le N$, и соотношениями:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I.} & s_b y = y y s_b, & x s_b = s_b x x; \\ \text{2.} & s_b l_i = y l_i y s_b, & r_i s_b = s_b x r_i x; \\ \text{3.} & \sum_i = l_i \Gamma_i r_i; & \\ \text{4.} & t l_i = l_i t, & t y = y t; \\ \text{5.} & r_i k = k r_i, & x k = k x; \\ \text{6.} & (q^{-1} t q) k = k (q^{-1} t q) & \end{array}\right\}, \tag{I8}$$

где $b\in B,\ 1\le i\le N,\ \sum_i \Gamma_i$ - слова из определяющих равенств (I6) полугруппы T.

Наша цель состоит в доказательстве теоремы, доказанной впервые А.А.Фридманом [6], а затем Буном [I0].

ТЕОРЕМА. Степень неразрешимости проблемы тождества слов группы $G(T,q)$ совпадает со степенью неразрешимости проблемы равенства специальных слов слову q в полугруппе T.

Таким образом, если T - полугруппа (например, полугруппа Поста) с неразрешимой проблемой равенства $\sum = q$, где $\sum$ - специальное слово, то группа $G(T,q)$, как это хорошо известно, имеет неразрешимую проблему тождества слов.

Далее, в силу результата А.А.Фридмана [6] и Буна [9] о существовании специальных полугрупп T, для которых проблема равенства специальных слов слову q имеет заданную степень неразрешимости, это дает доказательство существования конечно-определенных групп с заданной степенью неразрешимости проблемы тождества слов.

2. Рассмотрим последовательность групп:

$$G_0,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4,\ G_5 = G, \tag{I9}$$

где G_0 - свободная группа с образующими x, y;

G_1 - группа, заданная образующими s_b, x, y и соотношениями (I8.I);

G_2 - добавим к группе G_1 буквы l_i, r_i, $1\le i\le N$, и соотношения (I8.2);

G_3 - добавим к группе G_2 буквы q_a, $a \in A$, и соотношения (18.3);

G_4 - добавим к группе G_3 букву t и соотношения (18.4);

$G_5 = G$ - добавим к группе G_4 букву k и соотношения (18.5), (18.6).

Применим к группам последовательности (19) рассуждения из п. 2, § 2.

Относительно группы G_0 мы отметим, что канонические слова в ней определяются условием несократимости. Далее, два слова вида

$$V(y^2, x) \quad \text{и} \quad V(y, x^2)$$

равны I в группе G_0 одновременно. И, наконец, отметим, что проблема вхождения для подгрупп (y^2, x) и (y, x^2) (порожденных элементами y^2, x и y, x^2, соответственно) разрешима. (Это означает, что для каждого элемента $U \in G_0$ можно эффективно узнать принадлежит он, например, подгруппе (y^2, x) или нет.

3. Рассмотрим группу G_1.

Определяющие соотношения G_1 запишем в виде

$$\underline{y}\, y = s_b y, \quad \underline{x}\, s_b = s_b x \underline{x}, \tag{20}$$

где подчеркнутые буквы $\underline{x}$, $\underline{y}$ выступают в роли букв x_i, y_i из равенств (14) (при $k=1$).

Так как

$$\mathcal{A}_{s_b s_b} = V(y^2, x), \quad \mathcal{B}_{s_b s_b} = V(y, x^2),$$

то, в силу предыдущего пункта, буквы s_b являются правильными проходными буквами группы G_1 с основанием G_0.

Определим в G_1 канонический вид элементов условиями С.I, С.2 и покажем, что при этом будут выполняться условия А.I - А.5 предыдущего параграфа. Нам остается доказать, по существу, лишь выполнимость условия А.4.

Пусть $R\alpha$, $T\alpha$ - два канонических слова и $R = T\mathcal{A}_{s_b\alpha}$. Предположим, например, что $\alpha = s_b$. Тогда

$$R = TV(y^2, x).$$

Отсюда легко следует, что $V = 1$ в G_0.

Из выполнимости леммы 4 и того очевидного факта, что каждое слово U группы G_1 можно эффективно привести к слову $C(U)$ имеющему канонический вид, следует, что проблема тождества для группы G_1 разрешима.

Покажем теперь, что проблема вхождения элементов группы G

в каждую из следующих подгрупп:

$$A_1=(y^{-1}s_b),\quad A_2=(y\,s_b),\quad A_3=(s_b x),\quad A_4=(s_b x^{-1}),$$

где $b\in B$, разрешима.

Сделаем это, например, для группы A_1. Каждый элемент группы A_1 можно представить в виде:

$$y S y^{-1},$$

где S - несократимое слово от букв $s_b^{\pm 1}$. Если теперь U - некоторое слово группы G_1, имеющее канонический вид, S - проекция этого слова на алфавит s_b (то есть слово, получающееся из U вычеркиванием всех букв, кроме $s_b^{\pm 1}$), то $U\in A_1$ тогда и только тогда, когда

$$U\equiv C(y S y^{-1}).$$

4. Рассмотрим группу G_2.

Запишем соотношения группы G_2 в виде:

$$y^{-1}s_b l_i = l_i y s_b,\quad s_b x r_i = r_i s_b x^{-1},\quad 1\le i\le N. \tag{21}$$

Отсюда следует, что имеют место равенства:

$$\mathcal{A}_{l_i l_i}=V(y^{-1}s_b),\qquad \mathcal{B}_{l_i l_i}=V(y\,s_b),$$

$$\mathcal{A}_{r_i r_i}=V(s_b x),\qquad \mathcal{B}_{r_i r_i}=V(s_b x^{-1}).$$

Так как отображение $s_b\to s_b$, $x\to x^{-1}$, $y\to y^{-1}$ индуцирует автоморфизм группы G_1, то $\mathcal{A}_{l_i l_i}=1$ в G_1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_{l_i l_i}=1$ в G_1. Это же верно и для элементов $\mathcal{A}_{r_i r_i}$, $\mathcal{B}_{r_i r_i}$. Таким образом, буквы l_i, r_i являются правильными проходными буквами группы G_2 с основанием G_1.

Определим канонические слова от алфавита группы G_2 условиями С.1, С.2. В силу замечания, сделанного в предыдущем пункте, для каждого элемента U группы G_2 можно эффективно построить равный ему элемент $C(U)$, имеющий канонический вид.

Докажем теперь выполнимость условий А.1 - А.5. Как и раньше, достаточно проверить условие А.4.

Пусть $R\alpha$ и $T\alpha$ - два канонических слова и $R=T\mathcal{A}_{\alpha\alpha}$. Предположим, например, что $\alpha=l_i$. Тогда

$$R=T y S y^{-1},$$

где S - несократимое слово от $s_b^{\pm 1}$. Если S - пусто, то доказывать нечего. В противном случае имеем:

$$S \equiv \alpha_1 \dots \alpha_j \ .$$

Рассмотрим две возможности:

а) При приведении слова $Ty\alpha_1$ к каноническому виду группы G_1 буква α_1 сокращается. Тогда в силу п. 5, § I, получим:

$$T \equiv T_1 \alpha_1^{-1} T_2, \qquad T_2 = \mathcal{B}_{\alpha_1^{-1}\alpha_1^{-1}} y^{-1} \ .$$

Это противоречит тому, что $T\alpha$ имеет канонический вид (не выполняется одно из условий (I4)).

б) При приведении слова $Ty\alpha_1$ к каноническому виду буква α_1 не сокращается. Тогда слово $TySy^{-1}$ в каноническом виде оканчивается на подслово

$$\alpha_j T_1,$$

где $T_1 = \mathcal{B}_{\alpha_j \alpha_j} y^{-1}$. Это противоречит тому, что слово $R\alpha$ имеет канонический вид.

Этим единственность канонического вида элементов группы доказана. Вместе с предыдущим получаем разрешимость проблемы тождества слов для группы G_2.

Покажем теперь, что в группе G_2 разрешима проблема равенства слова некоторым словам вида:

$$V(\Sigma_{i1}^{-1} \ell_i \Gamma_{i1}), \quad V(\Sigma_{i2} \tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1}), \tag{22}$$

где для каждого i, $1 \le i \le N$, слова $\Sigma_{i1}, \Sigma_{i2}, \Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}$ определяются из равенств

$$\Sigma_i \equiv \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2}, \quad \Gamma_i \equiv \Gamma_{i1} q_{m_i} \Gamma_{i2}, \tag{23}$$

где, в свою очередь, $\Sigma_i = \Gamma_i$ - соотношение из системы (I6) определяющих соотношений полугруппы T.

Последнее утверждение следует из того, что канонический вид слов (22) однозначно определяется проекцией этих слов на алфавит ℓ_i и τ_i, соответственно.

5. Рассмотрим группу G_3.

Запишем соотношения группы G_3 в виде:

$$\Sigma_{i1}^{-1} \ell_i \Gamma_{i1} q_{m_i} = q_{n_i} \Sigma_{i2} \tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{A}_{q_{m_i} q_{n_i}} = V(\Sigma_{j1}^{-1} \ell_j \Gamma_{j1}), \ \mathcal{B}_{q_{n_i} q_{m_i}} = V(\Sigma_{j2} \tau_j \Gamma_{j2}^{-1}) \ .$$

Слова $\mathcal{A}_{q_{m_i} q_{n_i}}$ и $\mathcal{B}_{q_{n_i} q_{m_i}}$ равны I в группе G_2 тогда и только тогда, когда равны I в свободной группе их проекции на ал-

фавит ℓ_i и r_i соответственно. Это показывает, что буквы q_{n_i} образуют правильную систему проходных букв группы G_3 с основанием G_2.

Определим теперь в группе G_2 канонические слова условиями С.I и С.2. В силу утверждения, высказанного в конце предыдущего пункта, для каждого слова $\mathcal{U} \in G_3$ можно эффективно построить равное ему слово $C(\mathcal{U})$, имеющее канонический вид.

Как и для предыдущих групп, легко проверяется выполнимость условий А.I - А.5. Это дает разрешимость проблемы тождества в группе G_3.

Докажем теперь основные для дальнейшего леммы.

ЛЕММА 5. Пусть $\sum$ и $\sum'$ - два специальных слова. Тогда $\sum = \sum'$ в полугруппе T тогда и только тогда, когда

$$\sum = V(\ell_i, y) \sum' W(r_i, x) \tag{23}$$

в группе G_3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sum = \sum'$ в полугруппе T, то легко видеть, что равенство (23) имеет место.

Предположим теперь обратное, а именно, что в группе G_3 выполняется равенство (23) для некоторых специальных слов $\sum$ и $\sum'$. Считаем, что $V(\ell_i, y)$ и $V(r_i, x)$ имеют канонический вид.

Положим:

$$\sum \equiv \sum_1 q_1 \sum_2, \quad \sum' \equiv \sum'_1 q_2 \sum'_2 .$$

Правая часть равенства (23) равна слову:

$$C(V(\ell_i, y) \sum'_1) q_2 C(\sum'_2 W(r_i, x)), \tag{24}$$

где, как и выше, $C(\mathcal{U})$ обозначает каноническое слово, равное $\mathcal{U}$.

Слово $\sum$ имеет канонический вид. Если слово (24) также имеет канонический вид, то $q_1 = q_2$ и

$$\sum_1 = V(\ell_i, y) \sum'_1, \quad \sum_2 = \sum'_2 W(r_i, x)$$

в группе G_2. Отсюда следует, что $V(\ell_i, y) = W(r_i, x) \equiv 1$ и $\sum \equiv \sum'$.

Пусть теперь слово (24) не имеет канонического вида. Это значит, что оно содержит в качестве подслова левую часть одного из следующих равенств:

$$\ell_i V(y^{s_b}) \Gamma_{i1} q_{m_i} = V(y^{-1 s_b}) \sum_{i1} q_{n_i} \sum_{i2} r_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1}, \tag{25}$$

$$\ell_i^{-1} V(y^{-1 s_b}) \sum_{i1} q_{n_i} = V(y^{s_b}) \Gamma_{i1} q_{m_i} \Gamma_{i2} r_i \sum_{i2}^{-1} . \tag{26}$$

Пусть, например, рассматриваемое слово содержит в качестве подслова левую часть соотношения (25). Это значит, что $q_2 = q_{m_i}$ и если

$$V(\ell_i y) \equiv V_1'(\ell_i, y)\, \ell_i W(y),$$

то в группе G_2 имеет место равенство

$$W(y)\Sigma_1' = V(y s_b)\Gamma_{i1}. \tag{27}$$

Так как левая часть этого равенства не содержит букв s_b^{-1}, то получаем (считая, что $V(y s_b)$ - несократимое слово) равенство:

$$V(y s_b) \equiv y s_{b_1} \dots y s_{b_k},$$

где $k \geq 0$. Отсюда и из равенства (27) имеем:

$$W(y) = y^{2k-1}, \quad \Sigma_1' \equiv s_{b_1} \dots s_{b_k} \Gamma_{i1}. \tag{28}$$

Таким образом, преобразование, состоящее в замене в слове (24) левой части равенства (25) на правую, переводит слово (24) в слово, равное следующему слову:

$$\left.\begin{aligned} &V_1'(\ell_i, y) y^{-1} s_{b_1} \dots y^{-1} s_{b_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} \tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma_2' W(\tau_i, x) = \\ &= V_1(\ell_i, y) s_{b_1} \dots s_{b_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} \tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma_2' W(\tau_i, x) \end{aligned}\right\}. \tag{29}$$

Докажем, что слово Σ_2' имеет вид:

$$\Sigma_2' \equiv \Gamma_{i2} s_{b_{k+1}} \dots s_{b_n}. \tag{30}$$

Действительно, в противном случае слово $\Gamma_{i2}^{-1} \Sigma_2'$ в несократимом виде начиналось бы на букву s_b^{-1}, и поэтому в каноническом виде слово

$$\tau_i^{-1} \Gamma_{i2}^{-1} \Sigma_2' W(\tau_i, x)$$

начиналось бы на τ_i^{-1}. Отсюда (ввиду того, что исходное слово $V(\ell_i, y)$ мы считали имеющим канонический вид) следует, что при приведении правой части равенства (29) к каноническому виду рассматриваемая буква τ_i^{-1} сократиться не может. Это противоречит равенству (23).

Таким образом, равенство (30) доказано.

Окончательно получаем, что преобразование (25) переводит слово (24) в слово, равное слову:

$$V_1(\ell_i, y) s_{b_1} \dots s_{b_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} s_{b_{k+1}} \dots s_{b_n} W_1(\tau_i, x),$$

где слово $V_1(\ell_i, y)$ содержит меньше вхождений букв ℓ_i, чем слово $V(\ell_i, y)$.

Этому преобразованию соответствует следующее преобразование в полугруппе T:

$$\Sigma' \equiv s_{b_1} \dots s_{b_k} \Gamma_{i1} q_{n_i} \Gamma_{i2} s_{b_{k+1}} \dots s_{b_n} \to s_{b_1} \dots s_{b_k} \Sigma_{i1} q_{n_i} \Sigma_{i2} s_{b_{k+1}} \dots s_{b_n}.$$

Если слово (24) содержит вхождение левой части равенства (26), то все рассуждения вполне аналогичны.

Доказательство леммы завершается с помощью очевидной индукции по числу вхождений букв ℓ_i в исходное слово $V(\ell_i, y)$.

ЛЕММА 6. Проблема равенства некоторого слова Q группы G_3 слову вида

$$V(\ell_i, y) \Sigma W(r_i, x), \tag{31}$$

где Σ - специальное слово, разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q - некоторое слово группы G_3, равное в этой группе слову (31). Отсюда следует, прежде всего, что Q имеет вид:

$$Q \equiv Q_1 q_i Q_2, \tag{32}$$

где Q_1, Q_2 - некоторые слова от образующих группы G_2. Будем считать, что слово Q_1 имеет канонический вид. Тогда оно удовлетворяет условиям:

I) Q_1 не содержит вхождений букв $r_i^{\pm 1}$.

Это следует из того, что канонический вид слова (31) обладает этим свойством и что преобразования, приводящие слово $Q_1 q_i Q_2$ к каноническому виду, не могут изменить число вхождений букв $r_i^{\pm 1}$ в слово Q_1.

2) Q_1 не содержит вхождений букв s_b^{-1}.

Доказательство буквально такое же, как и в предыдущем случае.

Рассмотрим теперь группу G_3', антиизоморфную группе G_3, и определим в ней канонические слова точно таким же образом, как это мы сделали для группы G_3. Из условия получаем, что слово Q' (соответствующее при антиизоморфизме слову Q) равно в G_3' слову вида

$$W(r_i, x) \Sigma' V(\ell_i, y),$$

и поэтому слово Q_2' в каноническом виде группы G_3' удовлетворяет условиям:

I) Q_2' не содержит вхождений букв $\ell_i^{\pm 1}$.

2) Q_2' не содержит вхождений букв s_b^{-1}.

Это значит, что слово Q_2 в группе G_3 равно слову, не содержащему вхождений букв $\ell_i^{\pm 1}$ и s_b^{-1}, то есть канонический вид слова Q_2 не содержит вхождений этих букв.

Итак, получаем, что если слово (32) равно в группе G_3 слову вида (31), то канонические виды слов Q_1 и Q_2 не содержат букв $r_i^{\pm 1}, s_b^{-1}$ и $\ell_i^{\pm 1}, s_b^{-1}$, соответственно Но эти условия являются и достаточными для выполнения нужного нам равенства.

Лемма доказана.

6. Рассмотрим группу G_4.

Из соотношений (18.4) видно, что

$$\mathfrak{A}_{tt} = \mathfrak{B}_{tt} = V(\ell_i, y).$$

Это показывает, что буква t является правильной проходной буквой группы G_4 с основанием G_3. Слово $V(\ell_i, y)$, если оно несократимо, имеет канонический вид в группе G_3. Поэтому проблемы вхождения элементов группы G_3 в подгруппы

$$\{\mathfrak{A}_{tt}\} \text{ и } \{\mathfrak{B}_{tt}\}$$

алгоритмически разрешимы.

Определим канонический вид элементов группы G_4 условиями С.1 и С.2. Выполнимость условий А.1 – А.5 проверяется так же, как и выше.

Все это показывает, что проблема тождества в группе G_4 разрешима.

7. Рассмотрим, наконец, группу G_5.

Из соотношений (18.5) и (18.6) видно, что буква k является правильной проходной буквой группы G_5 с основанием G_4.

Канонические слова группы G_5 определим условиями С.1 и С.2, но только потребуем (в целях большего удобства), чтобы равенства (14), построенные для соотношений (18.6), имели вид:

$$t\mathfrak{B}_{tt} q V(r_i, x) k = \mathfrak{A}_{tt} q k \cdot q^{-1} t q V(r_i, x) \quad ;$$

$$t^{-1}\mathfrak{B}_{t^{-1}t^{-1}} q V(r_i, x) k = \mathfrak{A}_{t^{-1}t^{-1}} q k \cdot q^{-1} t q V(r_i, x) \, ;$$

$$t\mathfrak{B}_{tt} q V(r_i, x) k^{-1} = \mathfrak{A}_{tt} q k^{-1} \cdot q^{-1} t q V(r_i, x) \quad ;$$

$$t^{-1}\mathfrak{B}_{t^{-1}t^{-1}} q V(r_i, x) k^{-1} = \mathfrak{A}_{t^{-1}t^{-1}} q k^{-1} \cdot q^{-1} t q V(r_i, x).$$

Как и выше, легко проверяется, что в группе G_5 выполняют-

ся условия А.I - А.5. Далее, приведение слов группы G_5 к каноническому виду во всех своих частях эффективно, кроме того случая, когда мы должны будем уметь отвечать на вопрос, равно ли некоторое слово Q группы G_3 слову вида:

$$\mathcal{L}_{tt}qV(r_i,x)\equiv\mathcal{L}_{t^{-1}t^{-1}}qV(r_i,x)\equiv V_1(\ell_i,y)qV(r_i,x).$$

Ввиду лемм 5 и 6 это сводится к вопросу о равенстве некоторого специального слова Σ слову q в полугруппе T.

Это показывает, что степень неразрешимости проблемы тождества слов группы G_5 не превосходит степени неразрешимости проблемы равенства специальных слов слову q в полугруппе T.

Для доказательства обратного неравенства достаточно заметить, что соотношение

$$(\Sigma^{-1}t\Sigma)\kappa=\kappa(\Sigma^{-1}t\Sigma)\ , \tag{32}$$

где Σ - специальное слово, имеет место в G_5 тогда и только тогда, когда

$$\Sigma=q \tag{33}$$

в полугруппе T.

Действительно, если $\Sigma=q$ в T, то равенство (32) очевидно. Обратно, если имеет место равенство (32), то, применяя два раза лемму Бриттона, получим, что

$$\Sigma=V_1(\ell_i,y)qV(r_i,x)$$

в G_3. По лемме 5 отсюда следует соотношение (33).

Теорема полностью доказана.

Поступила в редакцию
I.УШ.1966 г.

Литература

I. П.С.Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в группах.- Труды Мат. института им. Стеклова, 44 (1955).

2. W.W.Boone, The word problem, Ann.of Math. 70 (1959),207-265.

3. T.L.Briton, The word problem for groups, Proc.Lond.Math. Soc.

4. Briton T.L., The word problem, Ann.of Math. 77 (1963),1

5. Higman G., Subgroups of finitely presented groups, Roc. Royal Soc., A, 1961, A262, 455–475.

6. А.А.Фридман. Степени неразрешимости для конечно-определенных групп.- ДАН, I47(I962), № 4, 805-808.

7. А.А.Фридман. Степени неразрешимости для конечно-определенных групп.- Диссертация, Москва, I963.

8. Clapham C.R.T., Finitely presented groups with word problems of arbitrery degrees of insolvability, Proc. Lond.Math.Soc., XIV (1964),56,633–676.

9. Boone W.W., Finitely presented group whose word problem has the same degree as that as of arbitraily given Thue sistem (an Application of Method of Britton) Roc.Nat.Acad.Soc.USA, 53(1965),2, 265–269.

10. Boone W.W., Partial results regarding word problems and recursively enumerable degree of unsolvability, Bull.Amer.Math.Soc.68 (1962),616–623.