И. В. Коннов, Применение вариационных неравенств для моделирования распределенных систем аукционных рынков,

Исслед. по информ., 2007, выпуск 12, 47–57

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ АУКЦИОННЫХ РЫНКОВ

И.В. Коннов

Рассматривается задача пространственного равновесия для распределенных аукционных рынков при наличии общих ограничений баланса объемов и мощности. Предлагается модель в виде вариационного неравенства, чье допустимое множество содержит часть условий задачи, при этом показывается, что ее решения позволяют получить как объемы покупки и продажи товара, так и равновесные цены аукционов для каждого аукциона. Данный подход может быть использован для получения результатов существования и единственности, а также для создания эффективных методов поиска решений.

Введение

По сравнению с классическими моделями совершенной (в смысле Вальраса) и несовершенной (в смысле Курно-Бертрана) конкуренции, аукционным рынкам уделялось значительно меньше внимания, при этом они ограничивались несколькими теоретико-игровыми моделями; см., например, [1], [2] и указанные там ссылки. Однако аукционный принцип оказывается весьма удобным для управления экономическими процессами, относящимися к приватизации больших частей государственной собственности, в особенности, связанных с естественными монополиями. По этой причине создание адекватных математических моделей аукционных рынков, которые позволяют исследовать и решать эти весьма сложные задачи, является в настоящее время очень актуальной проблемой. Сравнительно недавно в работах [3]-[5] был предложен новый подход для моделирования изолированных аукционных рынков однородного товара, который позволил получить для этих задач результаты существования и единственности решений, а также построить новые методы поиска решений.

В настоящей работе, основываясь на указанном подходе, мы рассматриваем существенно более сложную задачу управления системой пространственно распределенных аукционных рынков при наличии общих ограничений мощности и баланса. Такие задачи привлекают к себе значительное внимание, поскольку они возникают, в частности, при реструктуризации больших энергетических систем. Обычно соответствующие модели формулируются как двухуровневые задачи глобальной оптимизации с равновесными ограничениями (MPEC), либо как задачи частично целочисленного программирования, решение которых вызывает серьезные затруднения, в особенности, при большой размерности, типичной для приложений; см., например, [6], [7] и указанные там ссылки. В отличие от этих подходов, мы предлагаем использовать вариационное неравенство, чье допустимое множество содержит лишь часть условий задачи и показываем, что ее решения, тем не менее, позволяют получить как объемы покупки и продажи товара, так и равновесные цены аукционов для каждого аукционного рынка. Этот результат предоставляет нам эффективный инструментарий как для исследования, так и для решения пространственных равновесных задач для рынков аукционного типа.

Основная модель

Рассмотрим систему из n рынков однородного товара, которые соединены коммуникациями (транспортными линиями) в сеть. Обозначим через I_k и J_k, соответственно, индексные множества продавцов и покупателей k-го локального рынка, соответствующего k-му узлу сети. Предполагается, что i-й продавец выбирает величину предложения x_i из отрезка $\left[\alpha_i', \beta_i'\right]$, где $\alpha_i' \geq 0$ для $i \in I_k$, и j-й покупатель выбирает величину заявки из отрезка $\left[\alpha_j'', \beta_j''\right]$, где $\alpha_j'' \geq 0$ для $j \in J_k$, однако, их цены могут зависеть от величин закупки/продажи на этом аукционе, т.е. для данных величин объемов $x_{(k)} = (x_i)_{i \in I_k}$ и $y_{(k)} = (y_j)_{j \in J_k}$, i-й продавец (j-й покупатель) определяет свою цену $g_i = g_i(x_{(k)}, y_{(k)})$ (соответственно, $h_j = h_j(x_{(k)}, y_{(k)})$). Определим допустимые множества объемов закупки/продажи для k-го аукциона

$$X_{(k)} = \prod_{i \in I_k} \left[\alpha_i', \beta_i'\right] \quad \text{и} \quad Y_{(k)} = \prod_{j \in J_k} \left[\alpha_j'', \beta_j''\right].$$

Согласно принципу аукциона, решения $\left(x_{(k)}^*, y_{(k)}^*\right) \in X_{(k)} \times Y_{(k)}$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$g_i\left(x_{(k)}^*, y_{(k)}^*\right) \begin{cases} \geq p_k^* & \text{если } x_i^* = \alpha_i', \\ = p_k^* & \text{если } x_i^* = \left(\alpha_i', \beta_i'\right), \\ \leq p_k^* & \text{если } x_i^* = \beta_i', \end{cases} \qquad i \in I_k; \tag{1}$$

и

$$h_j\left(x^*_{(k)},y^*_{(k)}\right) \begin{cases} \le p^*_k \text{ если } y^*_j=\alpha^{''}_j, \\ = p^*_k \text{ если } y^*_j=\left(\alpha^{''}_j,\beta^{''}_j\right), & j\in J_k; \\ \ge p^*_k \text{ если } y^*_j=\beta^{''}_j, \end{cases} \tag{2}$$

где p^*_k является (неизвестной) равновесной ценой k-го аукционного рынка. Также решения должны удовлетворять уравнению материального баланса рынка:

$$\sum_{i\in I_k} x^*_i - \sum_{j\in J_k} y^*_j - u^*_k = 0, \tag{3}$$

где u^*_k является (неизвестной) величиной внешнего (по отношению к k-му рынку) спроса, причем эти величины подчиняются общему уравнению материального баланса системы:

$$\sum_{k=1}^{n} u^*_k = 0. \tag{4}$$

Однако необходимо также учитывать условия на сеть, связывающую данную систему распределенных рынков. Обозначим через A множество всех дуг, соединяющих узлы, соответствующие рынкам. Пусть f_a обозначает величину потока товара по дуге $a=(k,l)$ и пусть $\left[b^{'}_a,b^{''}_a\right]$ обозначает отрезок допустимых верхних пропускных способностей для этой дуги. Таким образом, формулировка допускает отрицательные значения для потока и для верхних границ, что соответствует обратному направлению потока и позволяет сократить размерность в модели. Отметим, что границы могут быть несимметричными, т.е. $b^{'}_a=-b^{''}_a$ в общем случае. Для данного вектора потоков $f=(f_a)_{a\in A}$ можно определить стоимость транспортировки единицы товара $c_a=c_a(f)$ по дуге $a\in A$. Далее, для узла k обозначим через A^+_k и A^-_k множества входящих и исходящих для этого узла дуг. Заметим, что множества I_k и J_k могут быть пустыми для некоторого узла k, тогда этот узел является только промежуточным пунктом транспортировки.

Если f^* является вектором оптимального распределения потоков, которое соответствует элементам $x^*_{(k)},y^*_{(k)},u^*_k$ в (1)-(4), то должно выполняться уравнение баланса потоков в узлах

$$\sum_{a\in A^-_k} f^*_a - \sum_{a\in A^+_k} f^*_a - u^*_k = 0 \quad \text{для} \quad k=1,\dots,n; \tag{5}$$

а также ограничения на мощность потоков по дугам

$$f^*_a \in \left[b^{'}_a,b^{''}_a\right], \quad a\in A. \tag{6}$$

В принципе соотношения (1)-(3) для $k=1,\dots,n$ и (4)-(6) представляют возможную формулировку задачи пространственного равновесия с ограничениями для системы аукционных рынков. Однако можно дополнительно наложить условия равновесия на цены, удельные затраты перевозки и объемы перевозки между рынками:

$$c_a\left(f^*\right)+p_k^*-p_l^* \begin{cases} \geq 0 & \text{если } f_a^*=b_a', \\ =0 & \text{если } f_a^* \in \left(b_a',b_a''\right), \quad \forall a=(k,l)\in A. \\ \leq 0 & \text{если } f_a^*=b_a'', \end{cases} \tag{7}$$

Тогда исходная задача пространственного равновесия для системы аукционных рынков будет состоять в отыскании набора элементов (x^*,y^*,u^*,f^*), которые удовлетворяют соотношениям (1)-(3) для $k=1,\dots,n$ и (4)-(7), где $x^*=(x_{(k)}^*)_{k=1,\dots,n}$, $y^*=(y_{(k)}^*)_{k=1,\dots,n}$, $u^*=(u_{(k)}^*)_{k=1,\dots,n}$.

Теперь мы укажем вариационное неравенство, чьи решения удовлетворяют данным условиям. Обозначим

$$X=\prod_{k=1}^{n}X_{(k)},\ Y=\prod_{k=1}^{n}Y_{(k)},\ F=\prod_{a\in A}\left[b_a',b_a''\right],$$

а также определим множество

$$W=\left\{ \begin{array}{c} (x,y,f) \\ \in X\times Y\times F \end{array} \middle| \begin{array}{l} \left(\sum\limits_{a\in A_k^-} f_a-\sum\limits_{a\in A_k^+} f_a\right) \\ -\left(\sum\limits_{i\in I_k} x_i-\sum\limits_{j\in J_k} y_j\right)=0 \end{array} \quad \text{для} \quad k=1,\dots,n\right\}. \tag{8}$$

Задача будет состоять в определении набора $(x^*,y^*,f^*)\in W$ такого, что

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i\in I_k} g_i(x_{(k)}^*,y_{(k)}^*)(x_i-x_i^*)-\sum_{j\in J_k} h_j(x_{(k)}^*,y_{(k)}^*)(y_j-y_j^*)\right] \\ +\sum_{a\in A} c_a(f^*)(f_a-f_a^*)\geq 0 \qquad \forall (x,y,f)\in W. \end{gathered} \tag{9}$$

Отметим, что вариационное неравенство (8), (9) включает только переменные объемов и потоков и его допустимое множество W, очевидно, выпуклое и замкнутое.

Вначале приведем необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (8), (9).

Предложение 1.

а) *Если набор* (x^*,y^*,f^*) *является решением задачи* (8), (9), *то существуют числа* p_k^*, $k=1,\dots,n$, *такие, что*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i\in I_k} g_i\left(x^*_{(k)},y^*_{(k)}\right)\left(x_i-x^*_i\right)-\sum_{j\in J_k} h_j\left(x^*_{(k)},y^*_{(k)}\right)\left(y_j-y^*_j\right)\right]$$

$$+\sum_{a\in A} c_a\left(f^*\right)\left(f_a-f^*_a\right)-\sum_{k=1}^{n} p^*_k\left[\sum_{i\in I_k}\left(x_i-x^*_i\right)-\sum_{j\in J_k}\left(y_j-y^*_j\right)\right. \tag{10}$$

$$\left.-\sum_{a\in A^-_k}\left(f_a-f^*_a\right)+\sum_{a\in A^+_k}\left(f_a-f^*_a\right)\right]\geq 0 \quad \forall(x,y,f)\in X\times Y\times F$$

и

$$\left(\sum_{a\in A^-_k} f^*_a-\sum_{a\in A^+_k} f^*_a\right)-\left(\sum_{i\in I_k} x^*_i-\sum_{j\in J_k} y^*_j\right)=0 \quad \text{для} \quad k=1,\ldots,n. \tag{11}$$

b) *Если элементы* $(x^*,y^*,f^*,p^*)\in X\times Y\times F\times R^n$ *удовлетворяют условиям* (10), (11), *то набор* (x^*,y^*,f^*) *является решением задачи* (8), (9).

Доказательство следует из того факта, что соотношения (10), (11) представляют собой условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера для задачи (8), (9); см., например, [4], предложение 11.7, где $p^*=(p^*_1,\ldots,p^*_n)$ является вектором множителей Лагранжа для балансовых уравнений в узлах (11).

Теперь получим основной результат настоящей статьи.

Теорема 1.

a) *Если набор элементов* (x^*,y^*,f^*) *является решением задачи* (8), (9), *то существуют числа* p^*_k *и* u^*_k, $k=1,\ldots,n$, *такие, что выполняются условия* (1)-(3) *для* $k=1,\ldots,n$ *и* (4)-(7).

b) *Если элементы* (x^*,y^*,f^*,p^*,u^*) *удовлетворяют условиям* (1)-(3) *для* $k=1,\ldots,n$ *и* (4)-(7), *то набор* (x^*,y^*,f^*) *является решением задачи* (8), (9).

Доказательство. На основании предложения 1 можно заключить, что достаточно показать эквивалентность, с одной стороны, условий (1)-(3) для $k=1,\ldots,n$ и (4)-(7) и, с другой стороны, условий (10), (11) для набора $(x^*,y^*,f^*,p^*)\in X\times Y\times F\times R^n$. Итак, пусть вначале выполняются условия (10), (11) для $(x^*,y^*,f^*,p^*)\in X\times Y\times F\times R^n$. Определим числа u^*_k, $k=1,\ldots,n$, из (5), тогда (11) дает (3). Кроме того, суммирование соотношений (5) для $k=1,\ldots,n$ дает

$$\sum_{k=1}^{n} u^*_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{a\in A^-_k} f^*_a-\sum_{a\in A^+_k} f^*_a\right)=0,$$

поскольку выражение в правой части содержит дважды величину потока по каждой дуге a, но с противоположными знаками. Поэтому соотношение (4) также выполняется. Далее, соотношение (10) эквивалентно следующей системе частных вариационных неравенств:

$$\begin{aligned} &\left(g_i\left(x^s_{(k)},y^s_{(k)}\right)-p^*_k\right)\left(x_i-x^*_i\right)\geq 0 \quad \forall x_i\in\left[\alpha'_i,\beta'_i\right], i\in I_k,\ k=1,\dots,n;\\ &\left(p^*_k-h_j\left(x^s_{(k)},y^s_{(k)}\right)\right)\left(y_j-y^*_j\right)\geq 0 \quad \forall y_j\in\left[\alpha''_j,\beta''_j\right], j\in J_k,\ k=1,\dots,n;\\ &\left(c_a\left(f^*\right)+p^*_k-p^*_l\right)\left(f_a-f^*_a\right)\geq 0 \ \forall f_a\in\left[b'_a,b''_a\right],\ \forall a=(k,l)\in A. \end{aligned} \tag{12}$$

Однако эти соотношения эквивалентны (1), (2) и (7), соответственно, поэтому утверждение а) справедливо.

Наоборот, пусть набор (x^*,y^*,f^*,p^*,u^*) удовлетворяет соотношениям (1)-(3) для $k=1,\dots,n$ и (4)-(7). Тогда имеем $\left(x^*,y^*,f^*\right)\in X\times Y\times F$ и из (3), (5) следует (11). Кроме того, как отмечалось, (1), (2) и (7) эквивалентны (12), что, в свою очередь, эквивалентно (10). Следовательно, утверждение b) также справедливо.

Таким образом, можно достаточно просто найти решение задачи пространственного равновесия (1)-(7) из решения вариационного неравенства (8), (9). Смысл задачи (8), (9) вполне ясен: необходимо найти допустимый набор $\left(x^*,y^*,f^*\right)\in W$, который доставляет наименьшее значение общим убыткам в системе для данных цен продажи и закупки $g=g\left(x^*,y^*\right)$ и $h=h\left(x^*,y^*\right)$ и для соответствующих величин удельных затрат перевозок $c=c\left(f^*\right)$. Отметим, что на функции g,h и c не накладывается никаких дополнительных условий, но было бы разумным предположить, что они непрерывны и неотрицательны, и что функция c четная, т.е. $c_a(f)=c_a(-f)$. В частности, при $c\equiv 0$ задача (8), (9) отражает необходимость максимизации чистой прибыли от всех аукционов.

Заметим, что для любого решения задачи (1)-(7), полученного из вариационного неравенства (8), (9), цены аукционов p^*_k, $k=1,\dots,n$, являются в точности множителями Лагранжа узловых ограничений баланса потоков из (11). В то же время для решения (x^*,y^*,f^*,p^*,u^*) усеченной задачи пространственного равновесия (1)-(6) равновесные цены аукционов p^*_k не обязаны быть множителями Лагранжа, поскольку условия (7) могут быть нарушены; см. [8], пример 6.1. Обращаясь к формулировке задачи пространственного равновесия, можно заметить, что, поскольку p^*_k и u^*_k удовлетворяют условиям (1)-(3), то одну из этих величин можно выбрать в качестве независимой переменной. Например, такой выбор p_k^* дает отображение $p_k^* \mapsto u_k^*\left(p_k^*\right)$, где u_k^* находится из (3) после вычисления величин $x_{(k)}^*$ и $y_{(k)}^*$ из (1), (2). То есть, отображение в общем случае является многозначным. Следовательно, вместо системы (1)-(7) можно использовать сокращенную систему (5)-(7), где одно из основных отображений определяется алгоритмически по решениям задач отдельных аукционов, и вместо одноуровневой задачи (8), (9) получаем двухуровневую модель.

Основываясь на утверждении теоремы 1, можно получить результаты существования и единственности решений задачи пространственного равновесия, используя теорию вариационных неравенств.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что множество* W *непусто и ограничено и что отображение* $(x,y,f) \mapsto \left(g(x,y),\, h(x,y),\, c(f)\right)$ *непрерывно. Тогда задача* (8), (9) *имеет решение.*

В самом деле, вариационное неравенство (8), (9) имеет теперь непрерывное основное отображение и непустое, выпуклое и компактное допустимой множество. Следовательно, утверждение теоремы следует, например, из теоремы 11.3 в [4].

Напомним, что отображение T называется

а) *монотонным*, если для любых u', u'' выполняется

$$\left\langle T\left(u'\right)-T\left(u''\right), u'-u''\right\rangle \geq 0;$$

b) *строго монотонным*, если для любых u', u'', $u' \neq u''$ выполняется

$$\left\langle T\left(u'\right)-T\left(u''\right), u'-u''\right\rangle > 0.$$

Объединяя теорему 2 и предложение 11.4 в [4], получаем также и утверждение единственности.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что множество* W *непусто и ограничено, а отображение* $(x,y,f) \mapsto \left(g(x,y),\, -h(x,y),\, c(f)\right)$ *непрерывно и строго монотонно. Тогда задача* (8), (9) *имеет единственное решение.*

Методы поиска решений

На основе результатов предыдущего раздела можно также предложить различные итеративные методы поиска решений задачи (8), (9), т.е. и задачи пространственного равновесия (1)-(7). Конечно, прежде всего следует рассмотреть методы, которые учитывают особенности решаемой задачи, прежде всего такие, как сепарабельность ограничений. Простейшим из этих методов является хорошо известный проективный метод, который состоит в построении итерационной последовательности $\left\{\left(x^s, y^s, f^s\right)\right\}$ в соответствии с условиями: $\left(x^{s+1}, y^{s+1}, f^{s+1}\right) \in W$ и

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i\in I_k}\left(g_i\left(x^s_{(k)}, y^s_{(k)}\right)+\theta_s^{-1}\left(x_i^{s+1}-x_i^s\right)\right)\left(x_i-x_i^{s+1}\right)\right.$$

$$\left.-\sum_{j\in J_k}\left(h_j\left(x^s_{(k)}, y^s_{(k)}\right)-\theta_s^{-1}\left(y_j^{s+1}-y_j^s\right)\right)\left(y_j-y_j^{s+1}\right)\right] \tag{13}$$

$$+\sum_{a\in A}\left(c_a\left(f^s\right)+\theta_s^{-1}\left(f_a^{s+1}-f_a^s\right)\right)\left(f_a-f_a^{s+1}\right)\geq 0$$

$$\text{для всех} \quad \forall(x,y,f)\in W,$$

где $\theta_s > 0$ является параметром длины шага. Преимущество этого метода состоит в том, что (13) есть задача выпуклого квадратичного программирования, которая имеет единственное решение, если множество W непусто, т.е. при весьма слабых предположениях. Более того, это решение может быть найдено за конечное число арифметических операций. С другой стороны, для этой цели очень удобно использовать двойственные методы типа Удзавы. В самом деле, можно найти решение (13) из двойственной задачи

$$\max_{p\in R^n} \to \varphi_s(p), \tag{14}$$

где

$$\varphi_s(p) = \min_{(x,y,f)\in X\times Y\times F} L_s(x,y,f,p), \tag{15}$$

$$L_s(x,y,f,p)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i\in I_k}\left(g_i\left(x^s_{(k)}, y^s_{(k)}\right)+0.5\theta_s^{-1}x_i\right)x_i\right.$$

$$\left.-\sum_{j\in J_k}\left(h_j\left(x^s_{(k)}, y^s_{(k)}\right)-0.5\theta_s^{-1}y_j\right)y_j\right]+\sum_{a\in A}\left(c_a\left(f^s\right)+0.5\theta_s^{-1}f_a\right)f_a$$

$$+\sum_{k=1}^{n}p_k\left[\left(\sum_{a\in A_k^-}f_a-\sum_{a\in A_k^+}f_a\right)-\sum_{i\in I_k}x_i-\sum_{j\in J_k}y_j\right].$$

Ясно, что вычисление значений функции φ_s и ее градиента можно выполнять покомпонентно, т.е. задача (15) распадается на множество независимых одномерных задач оптимизации, решение каждой находится по явной формуле. Для решения собственно задачи (14) можно использовать подходящий метод сопряженных градиентов.

Сходимость процесса (13) может потребовать дополнительных предположений усиленной монотонности или интегрируемости; см., например,

[4], глава 13. Напомним, что отображение T называется *ко-коэрцитивным* (или *обратно сильно монотонным*) с константой $\chi > 0$, если для всех u', u'' выполняется

$$\left\langle T(u') - T(u''), u' - u'' \right\rangle \geq \chi \left\| T(u') - T(u'') \right\|^2 .$$

Ясно, что ко-коэрцитивность сильнее, чем монотонность. Известно, что если отображение $(x,y,f) \mapsto \left(g(x,y),\ -h(x,y),\ c(f)\right)$ ко-коэрцитивно с константой χ и задача (8), (9) разрешима, тогда процесс (13) с $\theta_s = \theta \in (0, 2\chi)$ сходится к решению задачи (8), (9); см., например, [4], теорема 13.2. Далее, если все отображения g, h и c диагональны, т.е. $g_i = g_i(x_i)$, $h_j = h_j(y_j)$, $c_a = c_a(f_a)$, то они являются интегрируемыми и указанные условия сходимости выполняются, если g, $-h$ и c при этом монотонны и удовлетворяют условию Липшица; см., например, [9], с. 163. Это справедливо, в частности, для случая, когда все цены g_i и h_j постоянны и $c_a \equiv 0$. Такая ситуация возникает в задачах принятия решений для управления системами аукционных рынков на краткосрочный период. Тогда метод (13) совпадает с методом проксимальной точки и находит решение за конечное число итераций; см., например, [10]. Вместо проективного метода (13) можно использовать, например, метод условного градиента со вспомогательной задачей линейного программирования, однако для него требуется также ограниченность множества W (см. также [8]).

Комбинированный метод (13) с двойственным методом сопряженных градиентов применялся для решения реальных пространственных равновесных задач для систем аукционных рынков в электроэнергетике и показал довольно быструю сходимость к решению. В задачах цены участников фиксированы, а издержки транспортировки не учитываются. В качестве оценки точности выбиралась норма вектора отклонений в условиях (11), (12), при этом точность 0.1 оказалась достаточной для применения.

Приведем примеры решения двух прикладных задач. В первой задаче сеть содержала 5 аукционов, на каждом присутствовал один покупатель. Количества продавцов следующие: рынок 1 – 108, рынок 2 – 63, рынок 3 – 48, рынок 4 – 22, рынок 5 – 44 (см. рис. 1).

На рисунках числа в круглых скобках вида (Δ, p) обозначают, соответственно, величину экспорта и цену на рынках, числа в квадратных скобках – границы мощности потоков в прямом и обратном (–) направлении, одно число означает симметричность границ. Указанное на рис. 1 решение было получено за 72 итерации.

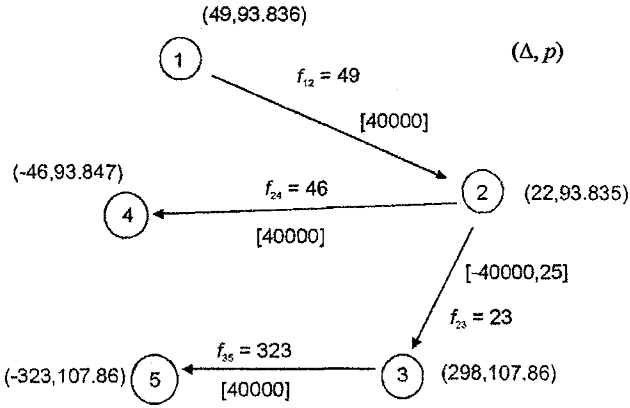

Рис. 1. Рынок 1: данные и решение

Второй пример соответствовал сети с 19 узлами, содержащими аукционы с 7 покупателями и 106 продавцами (см. рис. 2).

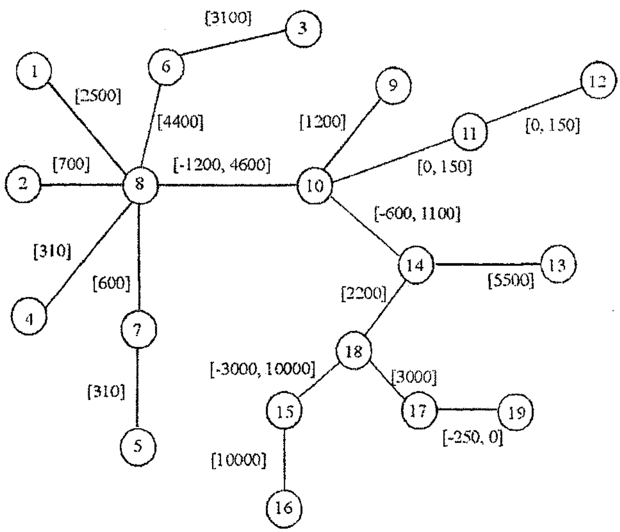

Рис. 2. Рынок 2: исходные данные

Решение этой задачи, указанное на рис. 3, потребовало 280 итераций метода.

(Δ, p)

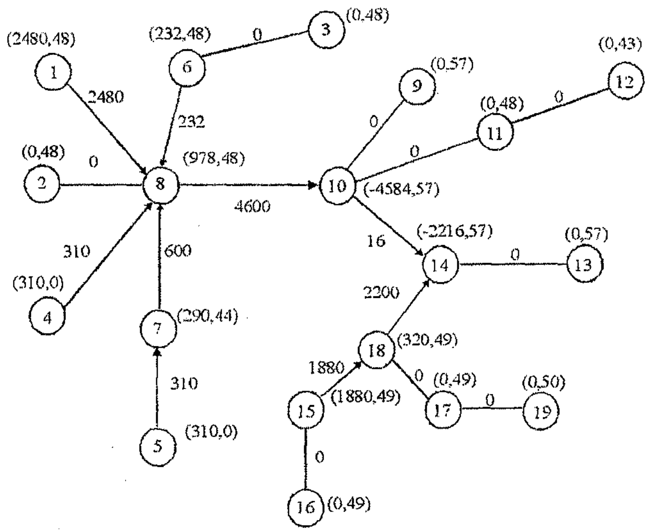

Рис. 3. Рынок 2: решение

Литература

1. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.

2. Weber R.J. Auctions and competitive bidding // Fair Allocation, Edited by H.P. Young, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, V.33. – Providence: American Mathematical Society, 1985. – P. 143-170.

3. Коннов И.В. О моделировании рынка аукционного типа // Исследования по информатике. Вып.10. – Казань: Отечество, 2006. – С. 73-76.

4. Konnov I.V. Equilibrium models and variational inequalities. – Amsterdam: Elsevier, 2007.

5. Konnov I.V. On variational inequalities for auction market problems // Optimization Letters. – 2007. – V.1, No.2. – P. 155-162.

6. Metzler C., Hobbs B.F., Pang J.-S. Nash-Cournot equilibria in power markets on a linearized DC network with arbitrage: formulations and properties // Networks and Spatial Economics. – 2003. – V.3, No.2. – P. 123-150.

7. Beraldi P., Conforti D., Triki C., Violi A. Constrained auction clearing in the Italian electricity markets // 4OR. – 2004. – V.2, No.1. – P. 35-51.

8. Konnov I.V. Modelling of auction type markets // University of Bergamo, Report No.7. – Bergamo, 2007. – 28 pp.

9. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. – Berlin: Springer, 2003.

10. Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1976. – V.14, No.5. – P. 877-898.