V. I. Vasyunin, On a biorthogonal system associated with the Riemann hypothesis,
Algebra i Analiz, 1995, Volume 7, Issue 3, 118–135

Алгебра и анализ
Том 7 (1995), вып. 3

ОБ ОДНОЙ БИОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ГИПОТЕЗОЙ РИМАНА

В. И. Васюнин[1]

В работе исследуется геометрия одного семейства кусочно-постоянных функций в пространстве $L^2(0,1)$. Это семейство минимально, и по нему разлагается функция, тождественно равная константе, в ряд, сходящийся в каждой точке. Сходимость этого ряда в норме L^2 повлекла бы доказательство гипотезы Римана о нулях ζ-функции.

В работе Н. К. Никольского [1] приведено следующее усиление теоремы Б. Нимана [2]:

Теорема 0. *Пусть* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ *и* $\gamma > 0$. *Пусть, кроме того,*

$$E_{\alpha,\gamma}(x) = x^\gamma\Big(\Big[\frac{\alpha}{x}\Big] - \alpha\Big[\frac{1}{x}\Big]\Big), \quad 0 < \alpha < 1, \ 0 < x < 1,$$

и

$$d_\gamma^2(s) = \inf \int_0^1 \Big|x^s - \sum_\alpha a_\alpha E_{\alpha,\gamma}\Big|^2 \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

где инфимум берется по всем линейным комбинациям $E_{\alpha,\gamma}$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда* ζ*-функция Римана не имеет нулей в круге*

$$\gamma + \Big\{ z : \Big|\frac{z-s}{z+\bar{s}}\Big| < 1 - 2\operatorname{Re} s d_\gamma^2(s) \Big\}.$$

В качестве следствия отмечено, что существование точки s, $\operatorname{Re} s > 0$, такой, что $d_\gamma = 0$, необходимо и достаточно для того, чтобы в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \gamma$ не было нулей ζ-функции, однако основной идеологический акцент работы [1] делается на возможность с помощью аппроксимации локально находить области, свободные от нулей. Мы же посмотрим именно на то, каким образом можно добиться выполнения условия $d_\gamma(s) = 0$.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (грант R64000) и программы PAST Министерства высшего образования и исследований Франции.
Ключевые слова: ζ-функция, гипотеза Римана, биортогональное семейство.

Естественно начать с попытки поточечно приблизить функцию x^s линейными комбинациями функций $E_{\alpha,\gamma}$, например, попытаться представить x^s в виде интеграла от этих функций по параметру. Оказывается, что при $\mathrm{Re}\, s > \gamma - 1$ такое представление существует и единственно. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При* $\mathrm{Re}\, s > \gamma - 1$ *функция* x^s *представляется интегралом*

$$x^s = \int_0^1 E_{\alpha,\gamma}(x)\, d\nu_{s,\gamma}(\alpha), \tag{2}$$

сходящимся поточечно на интервале $x \in (0, 1]$, *причем такое представление единственно, и интеграл* (2) *является несобственным интегралом Стилтьеса, задаваемым функцией*

$$\nu_{s,\gamma}(\alpha) = -\alpha^{s-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-\gamma} \mu(n) \theta(1 - \alpha n), \tag{3}$$

где μ *— функция Мебиуса, т.е.*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } p^2 \mid n, \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 p_2 \dots p_k, \end{cases}$$

а θ *— функция Хэвисайда, т.е.*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. Прежде всего перейдем от двупараметрического семейства функций $E_{\alpha,\gamma}$ к однопараметрическому

$$E_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-\gamma} E_{\alpha,\gamma}(x) = \left[\frac{\alpha}{x}\right] - \alpha\left[\frac{1}{x}\right].$$

Разделив обе части искомого тождества (2) на x^γ, получаем

$$x^{s-\gamma} = \int_0^1 E_\alpha(x)\, d\nu_{s,\gamma}(\alpha),$$

т.е. если семейство $\nu_{s,\gamma}$ существует, то $\nu_{s,\gamma} = \nu_{s-\gamma}$, где однопараметрическое семейство ν_s удовлетворяет тождеству

$$x^s = \int_0^1 E_\alpha(x)\, d\nu_s(\alpha). \tag{4}$$

Проверим, что этим тождеством функция ν_s определяется однозначно. Отметим сначала, что, поскольку $E_\alpha(1) = -\alpha$, тождество (4) в точке $x = 1$ принимает вид

$$\int_0^1 \alpha\, d\nu_s(\alpha) = -1. \tag{5}$$

Теперь пусть $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, тогда

$$E_\alpha(x) = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } \alpha < x, \\ 1-\alpha, & \text{если } \alpha \geqslant x, \end{cases}$$

т.е.

$$\int_0^1 E_\alpha(x)\, d\nu_s(\alpha) = \int_x^1 d\nu_s(\alpha) - \int_0^1 \alpha\, d\nu_s(\alpha) = \nu_s(1) - \nu_s(x) + 1.$$

Нормируем функции ν_s условием $\nu_s(1) = -1$, тогда тождество (4) для $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ примет вид

$$x^s = -\nu_s(x),$$

т.е. функция ν_s однозначно (с точностью до нормировки) определена тождеством (4) на интервале $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Теперь воспользуемся представлением

$$[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \theta(x-k) = \sum_{k \leqslant x} \theta(x-k)$$

и запишем функцию E_α в виде

$$E_\alpha(x) = \sum_{k \leqslant \frac{1}{x}} \theta(\alpha - kx) - \alpha\left[\frac{1}{x}\right],$$

тогда тождество (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned} x^s &= \sum_{k \leqslant \frac{1}{x}} \int_{kx}^1 d\nu_s(\alpha) - \left[\frac{1}{x}\right] \int_0^1 \alpha\, d\nu_s(\alpha) = \sum_{k \leqslant \frac{1}{x}} (-1 - \nu_s(kx)) + \left[\frac{1}{x}\right] \\ &= -\sum_{k \leqslant \frac{1}{x}} \nu_s(kx). \end{aligned}$$

Полученное тождество можно использовать для определения функции ν_s при малых значениях аргумента, если уже известны значения ν_s в некоторой окрестности точки $\alpha = 1$:

$$\nu_s(x) = -x^s - \sum_{k=2}^{\left[\frac{1}{x}\right]} \nu_s(kx),$$

так, например, уже зная, что $\nu_s(\alpha) = -\alpha^s$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, получаем

$$\nu_s(\alpha) = -\alpha^s - (2\alpha)^s, \quad \frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

Итак, единственность доказана. Осталось найти функцию ν_s, удовлетворяющую тождеству

$$\sum_{k \leqslant \frac{1}{x}} \nu_s(kx) = -x^s. \tag{6}$$

В силу мультипликативности функции x^s искомая функция ν_s существует и задается формулой обращения Мёбиуса:

$$\nu_s(x) = -\sum_{n \leqslant \frac{1}{x}} \mu(n)(nx)^s = -\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)(nx)^s \theta(1 - nx), \tag{7}$$

что совпадает с формулой (3).

Проверка того, что полученная мера (точнее, заряд) действительно удовлетворяет тождеству (4) сводится по существу к проверке единственного условия (5), которое было использовано при приведении тождества (4) к виду (6). Это и приводит к ограничению $\operatorname{Re} s > -1$. Нормировка $\nu_s(1) = -1$, очевидно, выполнена.

Отметим сперва, что при $s = 0$ функция ν_s кусочно-постоянна, т.е. мы получаем чисто точечный заряд с нагрузками $\mu(n)$ в точках $\alpha = \frac{1}{n}$. Функция $\nu_s - \nu_0$ уже не имеет скачков, т.е. дискретная часть не зависит от s.

Итак, для дискретной меры ν_0 имеем

$$\int_0^1 \alpha \, d\nu_0(\alpha) = \sum_{n \geqslant 2} \frac{\mu(n)}{n} = -1,$$

в силу известной (см. [3, теорема 479], или [4, теорема 3.13]) сходимости к нулю ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$. Для вычисления первого момента непрерывной составляющей $\nu_s - \nu_0$ нам потребуется еще оценка $\sum_{n=1}^{N} \mu(n) n^s = o(N^{\operatorname{Re} s + 1})$, являющаяся простым следствием известной оценки для функции Мёбиуса $\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x)$ (см. там же):

$$\int_0^1 \alpha \, d(\nu_s - \nu_0)(\alpha) = -\lim_{N \to \infty} \int_{\frac{1}{N}}^1 \alpha \Big(\sum_{n=1}^{\infty} s\mu(n) n^s \alpha^{s-1} \theta(1 - n\alpha) \Big) \, d\alpha$$

$$= -\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N-1} s\mu(n) n^s \int_{\frac{1}{N}}^{\frac{1}{n}} \alpha^s \, d\alpha = -\frac{s}{s+1} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(n) \Big(\frac{1}{n} - \frac{n^s}{N^{s+1}} \Big)$$

$$= 0.$$

Итак, функция ν_s, задаваемая равенством (7), удовлетворяет тождествам (5) и (6), а следовательно, и тождеству (4). Теорема доказана. •

Приведенная теорема показывает особую роль случая $s=\gamma$, когда в интегральном представлении (2) мера дискретна, и в оставшейся части работы мы займемся именно этим случаем, т.е. рассмотрением семейства функции

$$e_n(x) \overset{\text{def}}{=} E_{\frac{1}{n}}(x) = \left[\frac{1}{nx}\right] - \frac{1}{n}\left[\frac{1}{x}\right], \quad n \geqslant 2,\ 0 < x \leqslant 1,$$

которые участвуют в представлении (4) при $s=0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mu(n) e_n(x) = 1. \tag{8}$$

Численные эксперименты (результаты которых будут приведены в конце статьи) показывают, что вряд ли можно надеяться на сходимость ряда (8) в метрике L^2, тем не менее они же оставляют надежду на возможность регуляризации этого ряда с помощью какого-либо метода суммирования. Как для компьютерных вычислений, так и для теоретических оценок, необходимо исследование геометрии семейства $\{e_n\}_{n\geqslant 2}$. Основным результатом в этом направлении является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n=\omega n_0$, $m=\omega m_0$, $(n_0,m_0)=1$, *а целые числа* μ *и* ν *удовлетворяют тождеству* $n_0\mu + m_0\nu = 1$. *Тогда скалярные произведения в* $L^2(0,1)$ *функций* e_n *могут быть вычислены по любой из следующих формул*:

$$\begin{aligned} &nm(e_n,e_m)\\ &= \frac{m-1}{2}\log n + \frac{n-1}{2}\log m\\ &\quad - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{m}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{m}\\ &\quad + \frac{\pi\omega}{2}\sum_{k=1}^{n_0-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n_0}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k\nu}{n_0} + \frac{\pi\omega}{2}\sum_{k=1}^{m_0-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{m_0}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k\mu}{m_0}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &nm(e_n,e_m)\\ &= \frac{m-1}{2}\log n + \frac{n-1}{2}\log m\\ &\quad - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} - \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{m}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{m}\\ &\quad + \frac{\pi\omega}{2}\sum_{k=1}^{n_0-1}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{km_0}{n_0}\right\}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n_0} + \frac{\pi\omega}{2}\sum_{k=1}^{m_0-1}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{kn_0}{m_0}\right\}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{m_0}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\{x\}=x-[x]$ *— дробная часть числа* x.

Полагая в этих формулах $m=n$, получим формулу для нормы:

Следствие 3.

$$\|e_n\|^2 = \frac{n-1}{n^2}\log n - \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} \tag{11}$$

Поведение нормы при больших значениях n задается следующей асимптотической формулой:

Предложение 4.

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{n}(\log 2\pi - C) + O\Big(\frac{\log n}{n^2}\Big),$$

где $C = 0,5772\ldots$, *— постоянная Эйлера.*

Доказательство. Чтобы найти асимптотику суммы в выражении (11), разобьем эту сумму на две части:

$$\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi k}{n}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} - \frac{n}{\pi k} + \frac{n}{\pi(n-k)}\right)$$

и

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi k}{2}\right)\left(\frac{n}{\pi k} - \frac{n}{\pi(n-k)}\right) = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(n-2k)\Big(\frac{1}{k}-\frac{1}{n-k}\Big)\\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{k} - 2 + \frac{k}{n-k}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{k}-1\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\Big(\log n + C - 2 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Первая сумма является суммой Римана с шагом $\frac{\pi}{n}$, функции $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x}$, непрерывно дифференцируемой на компакте $[0,\pi]$. Поэтому, вычисляя асимптотику, заменим эту сумму интегралом:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi k}{n}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n} - \frac{n}{\pi k} + \frac{1}{\pi - \frac{\pi k}{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x}\right)dx + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x}\right)dx + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \frac{1}{n}(I_1 - I_2 + I_3) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) dx = \log \frac{\sin x}{x}\Big|_0^{\pi/2} = \log \frac{2}{\pi},$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (x \operatorname{ctg} x - 1)\, dx = \log 2 - 1$$

(см. [5]),

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\pi - x}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{1 - x}{2 - x}\, dx = 1 - \log 2.$$

В результате получаем

$$S_1 = \frac{1}{n}(2 - \log 2\pi) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

и для всей суммы:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{n}(\log n + C - \log 2\pi) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|e_n\|^2 &= \frac{n-1}{n^2} \log n - \frac{1}{n}(\log n + C - \log 2\pi) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\ &= \frac{1}{n}(\log 2\pi - C) + O\Big(\frac{\log n}{n^2}\Big). \quad \bullet\end{aligned}$$

Теперь приступим к доказательству теоремы 2. Основным техническим моментом доказательства является вычисление следующего полинома

$$A_{n,m}(x) = \sum_{k=1}^{nm} \Big\{\frac{k}{n}\Big\}\Big\{\frac{k}{m}\Big\} x^k \tag{11}$$

в точках $x = \xi$, где ξ — корень из единицы степени mn: $\xi^{mn} = 1$.

Лемма 5. *Пусть* $n = \omega n_0$, $m = \omega m_0$, $(n_0, m_0) = 1$, *а целые числа* μ *и* ν *удовлетворяют тождеству* $n_0\mu + m_0\nu = 1$, *и пусть* $\xi^{nm} = 1$. *Тогда*

$$A_{n,m}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{(m-1)(n-1)}{4} + \dfrac{\omega^2-1}{12}, & \text{если } \xi = 1; \quad (13) \\ \dfrac{m+n}{2(\xi-1)} - \dfrac{2\xi}{(\xi-1)^2}, & \text{если } \xi \neq \xi^\omega = 1; \quad (14) \\ \dfrac{m}{2(\xi-1)} - \dfrac{\xi}{(\xi-1)^2} + \dfrac{\omega}{2(\xi-1)} \cdot \dfrac{\xi^\omega+1}{\xi^\omega-1}, & \text{если } \xi^\omega \neq \xi^n = 1; \quad (15) \\ \dfrac{n}{2(\xi-1)} - \dfrac{\xi}{(\xi-1)^2} + \dfrac{\omega}{2(\xi-1)} \cdot \dfrac{\xi^\omega+1}{\xi^\omega-1}, & \text{если } \xi^\omega \neq \xi^m = 1; \quad (16) \\ \dfrac{\omega(\xi^\omega-1)}{(\xi^{\nu m}-1)(\xi^{\mu n}-1)(\xi-1)}, & \text{если } \xi^{n_0 m_0 \omega} = 1,\ \xi^n \neq 1,\ \xi^m \neq 1; \quad (17) \\ 0, & \text{если } \xi^{n_0 m_0 \omega} \neq 1. \end{cases}$$

Если $\xi \neq \xi^{n_0 m_0 \omega} = 1$, то все перечисленные случаи можно объединить формулой

$$\begin{aligned} 2(\xi-1)&A_{n,m}(\xi) \\ &= \delta_1(\xi^n)\Big(m - 1 - \frac{\xi+1}{\xi-1}\Big) + \delta_1(\xi^m)\Big(n - 1 - \frac{\xi+1}{\xi-1}\Big) \\ &+ \omega(1-\delta_1(\xi^n))\frac{\xi^{\mu n}+1}{\xi^{\mu n}-1} + \omega(1-\delta_1(\xi^m))\frac{\xi^{\nu m}+1}{\xi^{\nu m}-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство леммы проведем после доказательства теоремы 2. Из последнего будет видно, почему возникает необходимость в вычислении величины $A_{nm}(\xi)$.

Доказательство теоремы 2.

$$\begin{aligned} (e_n, e_m) &= \int_0^1 \Big(\Big[\frac{1}{xn}\Big] - \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{x}\Big]\Big)\Big(\Big[\frac{1}{xm}\Big] - \frac{1}{m}\Big[\frac{1}{x}\Big]\Big)\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{k}{n}\Big\}\Big\{\frac{k}{m}\Big\} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{\frac{k}{n}\Big\}\Big\{\frac{k}{m}\Big\} \int_0^1 (x^{k-1} - x^k)\,dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{k}{n}\Big\}\Big\{\frac{k}{m}\Big\} x^{k-1}\Big)\,dx = \int_0^1 \frac{x-1}{x^{nm}-1} \cdot \frac{A_{n,m}(x)}{x}\,dx, \end{aligned}$$

где полином $A_{n,m}(x)$ определен формулой (12). Для вычисления последнего интеграла разложим подинтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{x-1}{x^{nm}-1}\cdot\frac{A_{n,m}(x)}{x}=\sum_{k=1}^{nm-1}\frac{a_{n,m}(\eta^k)}{x-\eta^k},\qquad \eta\overset{\text{def}}{=}e^{\frac{2\pi i}{nm}}.$$

Если ξ — произвольный корень из единицы степени nm, отличный от единицы, т.е. $\xi^{nm}=1$, $\xi\neq 1$, то

$$\begin{aligned}a_{n,m}(\xi)&=\lim_{x\to\xi}\frac{(x-\xi)(x-1)A_{n,m}(x)}{(x^{nm}-1)x}=\lim_{x\to\xi}\frac{(x-1)A_{n,m}(x)}{nmx^{nm}}\\&=\frac{1}{nm}(\xi-1)A_{n,m}(\xi).\end{aligned}$$

Фиксируя стандартную ветвь логарифма, получим

$$\int_0^1\frac{dx}{x-\eta^k}=\log(x-\eta^k)\,\Big|_0^1=\log|1-\eta^k|+\pi i\Big(\frac{1}{2}-\frac{k}{nm}\Big).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(e_n,e_m)=\operatorname{Re}(e_n,e_m)&=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{nm-1}a_{n,m}(\eta^k)\int_0^1\frac{dx}{x-\eta^k}\\&=\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{nm-1}\log|1-\eta^k|\operatorname{Re}[(\eta^k-1)A_{n,m}(\eta^k)]\\&\quad-\frac{\pi}{nm}\sum_{k=1}^{nm-1}\Big(\frac{1}{2}-\frac{k}{nm}\Big)\operatorname{Im}[(\eta^k-1)A_{n,m}(\eta^k)].\end{aligned}\tag{19}$$

Если $\xi=e^{i\varphi}$, то формулу (18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}[(\xi-1)A_{n,m}(\xi)]\\&\quad=\frac{m-1}{2}\delta_1(\xi^n)+\frac{n-1}{2}\delta_1(\xi^n),\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}[(\xi-1)A_{n,m}(\xi)]\\&\quad=\frac{1}{2}(\delta_1(\xi^n)+\delta_1(\xi^m))\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\\&\quad-\frac{\omega}{2}(1-\delta_1(\xi^n))\operatorname{ctg}\frac{\mu n\varphi}{2}-\frac{\omega}{2}(1-\delta_1(\xi^m))\operatorname{ctg}\frac{\nu m\varphi}{2}.\end{aligned}\tag{21}$$

Подставляя первое слагаемое из (20) в первую сумму в выражении (19), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{nm-1}\log|1-\eta^k|\frac{m-1}{2}\delta_1(\eta^{kn})&=\frac{m-1}{2nm}\sum_{l=1}^{n-1}\log|1-\eta^{lm}|\\&=\frac{m-1}{2nm}\log\Big|\prod_{l=1}^{n-1}(1-e^{\frac{2\pi l}{n}i})\Big|=\frac{m-1}{2nm}\log\frac{x^n-1}{x-1}\Big|_{x=1}\\&=\frac{m-1}{2nm}\log n.\end{aligned}$$

Аналогично второе слагаемое дает $\frac{n-1}{2nm}\log m$, таким образом, мы получили два первых слагаемых в формуле (9). Теперь подставляем по очереди слагаемые из тождества (21) во вторую сумму в выражении (19):

$$-\frac{\pi}{nm}\sum_{k=1}^{nm-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{nm}\right)\cdot\frac{1}{2}\delta_1(\eta^{kn})\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{nm}=-\frac{\pi}{2nm}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{l}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{n}.$$

Аналогично второе слагаемое дает

$$-\frac{\pi}{2nm}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{l}{m}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{m},$$

т.е. это следующие два члена формулы (9). И, наконец, учитывая, что $A_{n,m}(\xi)=0$, если $\xi^{\omega n_0 m_0}\neq 1$, получаем для первого из оставшихся слагаемых

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{\substack{k=1\\ \omega|k}}^{nm-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{nm}\right)(1-\delta_1(\eta^{kn}))\operatorname{ctg}\frac{\mu n\pi k}{mn}\\
&=\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{s=1}^{m_0-1}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{\omega s+tm}{nm}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\mu(\omega s+tm)}{m}\\
&=\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{s=1}^{m_0-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi\mu s}{m_0}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{nm_0}-\frac{t}{n}\right)\\
&=\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{s=1}^{m_0-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi\mu s}{m_0}\left(\frac{n}{2}-\frac{s}{m_0}-\frac{n-1}{2}\right)\\
&=\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{s=1}^{m_0-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{m_0}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\mu s}{m_0}.
\end{aligned}$$

Аналогично в силу симметрии последнее слагаемое из (21) при подстановке в формулу (19) дает вклад в выражение для скалярного произведения

$$\frac{\pi\omega}{2nm}\sum_{s=1}^{n_0-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{n_0}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi\nu s}{n_0}.$$

В результате получаем два последних члена в формуле (9), которыми только и отличаются выражения (9) и (10). Поэтому, чтобы доказать справедливость формулы (10) для скалярного произведения (e_n,e_m), достаточно проверить тождество

$$\sum_{k=1}^{m_0-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{n_0}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k\nu}{n_0}=\sum_{k=1}^{m_0-1}\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{km_0}{n_0}\right\}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n_0}. \tag{22}$$

Покажем, что левая сумма переходит в правую после замены переменной суммирования $k = n_0\{\frac{lm_0}{n_0}\}$. Действительно, поскольку n_0 и m_0 взаимно просты, то функция $l \mapsto k$ является автоморфизмом класса вычетов $\bmod n_0$, т.е. когда l пробегает все целые значения от 1 до $n_0 - 1$, то k пробегает то же множество натуральных чисел. При этом

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi k\nu}{n_0} = \operatorname{ctg}\pi\nu\left\{\frac{lm_0}{n_0}\right\} = \operatorname{ctg}\pi l\frac{\nu m_0}{n_0} = \operatorname{ctg}\pi l\frac{1-\mu n_0}{n_0} = \operatorname{ctg}\frac{\pi l}{n_0},$$

что и доказывает равенство (22), а вместе с ним и формулу (10). Теорема 2 доказана. •

Прежде чем приступить к доказательству лемму 5, приведем в качестве отдельного утверждения несколько простых формул, которые будут неоднократно использованы при доказательстве леммы без специального упоминания.

Лемма 6.

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} n, & \textit{если } x = 1, \\ \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & \textit{если } x \neq 1; \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} kx^k = \begin{cases} \dfrac{1}{2}n(n-1), & \textit{если } x = 1, \\ \dfrac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}, & \textit{если } x \neq 1; \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2x^k = \begin{cases} \dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1), & \textit{если } x = 1, \\ \dfrac{(n-1)^2x^{n+2} - (2n^2-2n-1)x^{n+1} + n^2x^n - x^2 - x}{(x-1)^3}, & \textit{если } x \neq 1; \end{cases}$$

В частном случае, когда $x \neq 1$ является корнем n-й степени из единицы, эти тождества принимают вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \frac{n}{x-1};$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2x^k = \frac{n(n-2)x - n^2}{(x-1)^2}.$$

Доказательство леммы 5.

$$A_{n,m}(\xi) = \sum_{k=1}^{nm-1}\left\{\frac{k}{n}\right\}\left\{\frac{k}{m}\right\}\xi^k = \sum_{l=1}^{\omega n_0m_0-1}\left\{\frac{l}{n}\right\}\left\{\frac{l}{m}\right\}\xi^l\sum_{r=0}^{\omega-1}\xi^{r\omega m_0n_0}.$$

Последняя сумма равна нулю, если $\xi^{\omega m_0 n_0} \neq 1$, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $\xi^{\omega m_0 n_0} = 1$. Сначала разберем случай $\xi = 1$.

$$A_{n,m}(1) = \omega \sum_{l=1}^{\omega n_0 m_0 - 1} \left\{\frac{l}{n}\right\}\left\{\frac{l}{m}\right\} = \omega \sum_{s=0}^{m_0-1}\sum_{t=1}^{n-1} \frac{t}{n}\left\{\frac{sn+t}{m}\right\} = \frac{1}{n_0}\sum_{t=1}^{n-1} t \sum_{s=0}^{m_0-1}\left\{\frac{sn_0 + \frac{t}{\omega}}{m_0}\right\}$$
$$= \frac{1}{n_0}\sum_{t=1}^{n-1} t \sum_{s=0}^{m_0-1}\left(\left\{\frac{sn_0 + \left[\frac{t}{\omega}\right]}{m_0}\right\} + \frac{1}{m_0}\left\{\frac{t}{\omega}\right\}\right).$$

Как уже отмечалось в конце доказательства теоремы 2, в силу взаимной простоты m_0 и n_0 новая переменная $r = m_0\left\{\frac{sn_0+[\frac{t}{\omega}]}{m_0}\right\}$, будет пробегать все значения от нуля до $m_0 - 1$, поэтому

$$A_{n,m}(1) = \frac{1}{n_0}\sum_{t=1}^{n-1} t \sum_{r=0}^{m_0-1}\left(\frac{r}{m_0} + \frac{1}{m_0}\left\{\frac{t}{\omega}\right\}\right) = \frac{1}{n_0}\sum_{t=0}^{n-1} t\left(\frac{m_0-1}{2} + \left\{\frac{t}{\omega}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{n_0}\sum_{\beta=0}^{\omega-1}\sum_{\alpha=0}^{n_0-1}(\alpha\omega+\beta)\left(\frac{m_0-1}{2} + \frac{\beta}{\omega}\right)$$
$$= \frac{1}{n_0}\sum_{\beta=0}^{\omega-1}\left(\frac{n_0(n_0-1)}{2}\omega + \beta n_0\right)\left(\frac{m_0-1}{2} + \frac{\beta}{\omega}\right)$$
$$= \sum_{\beta=0}^{\omega-1}\left(\frac{(n_0-1)(m_0-1)}{4}\omega + \frac{n_0+m_0-2}{2}\beta + \frac{\beta^2}{\omega}\right)$$
$$= \frac{(n-\omega)(m-\omega)}{4} + \frac{(n+m-2\omega)(\omega-1)}{4} + \frac{(\omega-1)(2\omega-1)}{6}$$
$$= \frac{(n-1)(m-1)}{4} + \frac{\omega^2-1}{12}.$$

Теперь пусть $\xi \neq 1$.

$$(\xi-1)A_{n,m}(\xi) = \sum_{k=1}^{nm-1}\left\{\frac{k}{n}\right\}\left\{\frac{k}{m}\right\}(\xi^{k+1} - \xi^k)$$
$$= \sum_{k=1}^{nm}\left(\left\{\frac{k-1}{n}\right\}\left\{\frac{k-1}{m}\right\} - \left\{\frac{k}{n}\right\}\left\{\frac{k}{m}\right\}\right)\xi^k$$
$$= \sum_{k=1}^{nm}\left\{\frac{k-1}{n}\right\}\left(\left\{\frac{k-1}{m}\right\} - \left\{\frac{k}{m}\right\} + \frac{1}{m}\right)\xi^k$$
$$+ \sum_{k=1}^{nm}\left\{\frac{k}{m}\right\}\left(\left\{\frac{k-1}{n}\right\} - \left\{\frac{k}{n}\right\} + \frac{1}{n}\right)\xi^k$$
$$- \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm}\left\{\frac{k-1}{n}\right\}\xi^k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nm}\left\{\frac{k}{m}\right\}\xi^k.$$

Заметим, что

$$\left\{\frac{k-1}{m}\right\}-\left\{\frac{k}{m}\right\}+\frac{1}{m}=\begin{cases}0, & \text{если } k\nmid m,\\ 1, & \text{если } k\mid m,\end{cases} \tag{23}$$

поэтому

$$\begin{aligned}(\xi-1)A_{n,m}(\xi)&=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{lm-1}{n}\right\}\xi^{lm}+\sum_{l=1}^{m}\left\{\frac{ln}{m}\right\}\xi^{ln}\\ &\quad-\frac{\xi}{m}\sum_{k=1}^{nm-1}\left\{\frac{k}{n}\right\}\xi^{k}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nm-1}\left\{\frac{k}{m}\right\}\xi^{k}.\end{aligned} \tag{24}$$

Начнем с более простых двух последних сумм:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{nm-1}\left\{\frac{k}{m}\right\}\xi^{k}&=\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{t=0}^{n-1}\left\{\frac{s+mt}{m}\right\}\xi^{s+mt}\\ &=\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{s}{m}\xi^{s}\sum_{t=0}^{n-1}\xi^{mt}=\frac{1}{m}\delta_1(\xi^m)\sum_{s=1}^{m-1}s\xi^{s}\\ &=\frac{1}{\xi-1}\delta_1(\xi^m).\end{aligned}$$

Перепишем коэффициент в первой сумме в следующем виде:

$$\left\{\frac{lm-1}{n}\right\}=\left\{\frac{lm-\omega+\omega-1}{n}\right\}=\left\{\frac{lm_0-1}{n_0}\right\}+\frac{\omega-1}{n}.$$

Поскольку

$$\frac{\omega-1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi^{lm}=(\omega-1)\delta_1(\xi^m),$$

тождество (24) принимает вид

$$\begin{aligned}(\xi-1)A_{n,m}(\xi)&=\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{lm_0-1}{n_0}\right\}\xi^{lm}+\sum_{l=1}^{m}\left\{\frac{ln_0}{m_0}\right\}\xi^{ln}\\ &\quad-\frac{\xi}{\xi-1}\delta_1(\xi^n)+\left(\omega-1-\frac{1}{\xi-1}\right)\delta_1(\xi^m).\end{aligned} \tag{25}$$

Напомним, что $\xi^{n_0m}=\xi^{m_0n}=1$, поэтому две суммы в выражении (25) могут быть записаны в виде

$$\omega\sum_{l=1}^{n_0}\left\{\frac{lm_0-1}{n_0}\right\}\xi^{lm}+\omega\sum_{l=1}^{m_0}\left\{\frac{ln_0}{m_0}\right\}\xi^{ln}, \tag{26}$$

причем суммируемые выражения зависят лишь от величины вычета $l \pmod{n_0}$ в первой сумме и $l \pmod{m_0}$ во второй. Таким образом, полагая $l\equiv$

$(r+1)\nu \pmod{n_0}$ в первой сумме (т.е. $lm_0 - 1 \equiv (r+1)m_0\nu - 1 \equiv r \pmod{n_0}$) и $l \equiv r\mu \pmod{m_0}$ во второй (т.е. $ln_0 \equiv r \pmod{m_0}$), переписываем (26) в виде

$$\omega \sum_{r=1}^{n_0-1} \frac{r}{n_0} \xi^{(r+1)\nu m} + \omega \sum_{r=1}^{m_0-1} \frac{r}{m_0} \xi^{r\mu n}$$
$$= \omega \frac{n_0-1}{2} \delta_1(\xi^m) + \omega \frac{\xi^{\nu m}}{\xi^{\nu m}-1}(1-\delta_1(\xi^m)) + \omega \frac{m_0-1}{2}\delta_1(\xi^n) + \omega \frac{1}{\xi^{\mu n}-1}(1-\delta_1(\xi^n))$$
$$= \frac{\omega}{2}\frac{\xi^{\nu m}+1}{\xi^{\nu m}-1}(1-\delta_1(\xi^m)) + \left(\frac{n}{2}-\omega\right)\delta_1(\xi^m) + \frac{\omega}{2}\frac{\xi^{\mu n}+1}{\xi^{\mu n}-1}(1-\delta_1(\xi^n)) + \frac{m}{2}\delta_1(\xi^n).$$

Подставляя полученные формулы для сумм (26) в выражение (25), получаем требуемое тождество (18).

Теперь из общей формулы (18) получим ее частные случаи (14)–(17).

Если $\xi^\omega = 1$, то $\xi^n = \xi^m = 1$ и

$$2(\xi-1)A_{n,m}(\xi) = m - 1 - \frac{\xi+1}{\xi-1} + n - 1 - \frac{\xi+1}{\xi-1} = m + n - \frac{4\xi}{\xi-1},$$

что соответствует формуле (14). Пусть теперь $\xi^\omega \neq \xi^n = 1$, тогда $\xi^m \neq 1$ и $\xi^{\nu m} = \xi^{\omega(1-\mu n_0)} = \xi^\omega$, откуда

$$2(\xi-1)A_{n,m}(\xi) = m - 1 - \frac{\xi+1}{\xi-1} + \omega\frac{\xi^\omega+1}{\xi^\omega-1},$$

что дает формулу (15). Формула (16) аналогична. И наконец, пусть $\xi^n \neq 1$, $\xi^m \neq 1$, тогда

$$2(\xi-1)A_{n,m}(\xi) = \omega\frac{\xi^{\mu n}+1}{\xi^{\mu n}-1} + \omega\frac{\xi^{\nu m}+1}{\xi^{\nu m}-1} = 2\omega\frac{\xi^\omega-1}{(\xi^{\mu n}-1)(\xi^{\nu m}-1)},$$

т.е. справедлива формула (17). Лемма доказана •

Поскольку мы имеем дело только с функциями, которые постоянны на промежутках $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, то подпространство таких кусочно-постоянных функций в $L^2(0,1)$ естественно отображается на весовое пространство $l^2\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$: k-м элементом последовательности будет значение функции на интервале $\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$. Так, функциям e_n соответствуют последовательности

$$e_n = \left(-\left\{\frac{k}{n}\right\}\right)_{k\geqslant 1}$$

(в силу указанного отождествления мы их будем обозначать той же буквой).

В пространстве $l^2\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$ естественнее строить семейство биортогональное e_n, поскольку, как оказывается, оно состоит из финитных последовательностей.

Теорема 7. *Семейство* e_n *минимально, и биортогональное с ним семейство* f_n *задается формулой*

$$f_n = \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right)\varphi_k,$$

где φ_k *— последовательности с двумя ненулевыми членами:*

$$\varphi_k(k-1) = -k(k-1), \qquad \varphi_k(k) = k(k+1)$$

при $k \geqslant 2$, *и*

$$\varphi_1 = (2, 0, 0, \dots).$$

Доказательство. Заметим сперва, что для любой последовательности h

$$(h, \varphi_k) = h(k) - h(k-1).$$

(Эта формула будет верна и при $k = 1$, если формально положить $h(0) = 0$). Поэтому

$$(e_n, f_m) = \sum_{k|m} \mu\left(\frac{m}{k}\right)(e_n, \varphi_k) = \sum_{k|m} \mu\left(\frac{m}{k}\right)\left(-\left\{\frac{k}{n}\right\} + \left\{\frac{k-1}{n}\right\}\right).$$

Еще раз пользуясь формулой (23), получаем

$$(e_n, f_m) = -\frac{1}{n}\sum_{k|m} \mu\left(\frac{m}{k}\right) + \sum_{\substack{k|m\\ n|k}} \mu\left(\frac{m}{k}\right) = \delta_{n,m},$$

поскольку первая сумма всегда равна нулю (так как $m \geqslant 2$), а вторую сумму, положив $m = ns$, $k = nt$, можно переписать в виде

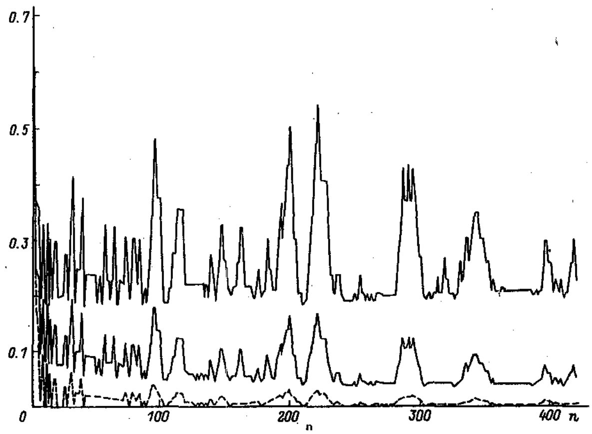
$$\sum_{t|s} \mu\left(\frac{s}{t}\right) = \delta_1(s) = \delta_{n,m}. \quad \bullet$$

В заключение приведем некоторые результаты численных экспериментов. Обозначим

$$s(n) = \left(\int_0^1 \left|1 - \sum_{k=e}^{n} \mu(k)e_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$r(n) = \left(\int_0^1 \left|1 - \sum_{k=2}^{n} \mu(k)e_k(x)\right|^2 \sqrt{x}\, dx\right)^{1/2},$$

$$m(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}.$$



Согласно формуле (1), $d_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant s(n)$ и $d_{3/4}\left(\frac{3}{4}\right) \leqslant r(n)$. На приведенной диаграмме изображены графики функции $s(n)$, $r(n)$ и $|m(n)|$ для значений $n \leqslant 420$. Самый высокий график отвечает функции $s(n)$, самый нижний — $m(n)$.

Поведение функции $s(n)$ не оставляет надежды на сходимость ряда (8) по норме L^2. Вероятно, амплитуда колебаний функции $s(n)$ не будет убывать. Косвенным соображением в пользу этого может служить тот факт, что существуют (см. [6]) значения n, при которых $\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(n)\right| > \sqrt{n}$, т.е. на отрезке натурального ряда длины n функция $\mu(k)$ почти сохраняет знак на интервале длины порядка $\sqrt{n}$. А так как функции e_n принимают только неположительные значения, и $\|e_n\| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, то на подобном интервале можно ожидать прирост величины $s(n)$ порядка $O(1)$.

Можно попытаться искать какой-либо метод суммирования, который улучшал бы сходимость ряда (8), например, перейти от L^2 по мере Лебега к L^2 с весом, убывающим в окрестности нуля. Таким естественным весом является $x^{2\gamma-1}$, который получается при рассмотрении аппроксимации функции x^s функциями $E_{\alpha,\gamma}$ при $s = \gamma > \frac{1}{2}$ и $\alpha = \frac{1}{n}$. Сходимость в случае $s = \gamma = \frac{3}{4}$ отражает график функции $r(n)$. Следует отметить, что при $s = \gamma \neq \frac{1}{2}$ вычисление норм частичных сумм потребовало гораздо больше времени, поскольку пришлось пользоваться непосредственным определением нормы в виде интеграла, в то время как при $s = \gamma = \frac{1}{2}$ была использована формула (10) из теоремы 2. Для объяснения синхронных всплесков графиков $s(n)$ и $r(n)$ приведен в том же масштабе график модуля функции

$m(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k}$. Дело в том, что

$$1 - \sum_{k=2}^{n} \mu(k) e_k(x) = m(n) \left[\frac{1}{x}\right] \quad \text{при} \quad x > \frac{1}{n},$$

и при больших значениях $|m(n)|$ интеграл по отрезку $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ дает основной вклад в значение нормы, а именно, порядка $n^{1-\gamma}|m(n)|$. Этим вкладом и объясняются всплески графиков $s(n)$ и $r(n)$ при больших значениях $|m(n)|$.

Далее представляется разумным либо ограничиться подпоследовательностью значений n, при которых $|m(n)| < \frac{1}{n}$ (такая подпоследовательность существует, поскольку функция $m(n)$ меняет знак бесконечное количество раз, см. [7]), либо вводить корректирующие слагаемые $a_r e_r(x)$ такие, чтобы величина $\sum\limits_{r} \frac{a_r}{r} + m(n)$ была по возможности минимальной. В последнем случае, если все корректирующие значения r больше n, то значение „исправленной" функции на интервале $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ будет $\left(\sum\limits_{r} \frac{a_r}{r} + m(n)\right)\left[\frac{1}{x}\right]$, т.е. мало, в то время как, если число добавленных членов и их коэффициенты не слишком велики, то не слишком сильно изменится значение интеграла по оставшемуся промежутку $\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

Возможно, поиску подобного баланса помогло бы нахождение наилучших приближений константы функциями e_n, но в этом направлении пока не удалось далеко продвинуться — очень быстро растет время, необходимое для нахождения каждого следующего наилучшего приближения, а первые шаги не дают существенной информации: так, например, если $s(14) \approx 0.1815$, то при наилучшей аппроксимации теми же векторами $\{e_k\}_{k=2}^{14}$ (заметим, что в $s(14)$ векторы e_4, e_8, e_9 и e_{12} входят с нулевыми коэффициентами) мы получаем

$$\inf_{a_k} \left(\int_0^1 \left| 1 - \sum_{k=2}^{14} a_k e_k(k) \right|^2 dx \right)^{1/2} \approx 0.1361.$$

что улучшает аппроксимацию всего на 25%

В заключение хочу выразить признательность университету Бордо-I, который предоставил техническую возможность проведения обсуждавшегося выше численного эксперимента. Настоящая работа была в существенном выполнена во время моего пребывания в этом университете весной 1994 г.

Список литературы

[1] Nikolski N., *Distance formulae and invariant subspaces, with an application to localization of zeroes of the Riemann ζ-fuctions*, Ann. Inst. Fourier **45** (1995), no. 1, 1–17.

[2] Nyman B., *On some groups and semigroups of translations*, Thesis, Uppsala, 1950.

[3] Landau E., *Vorlesungen über die Zahlen Theorie*, Bd. 2, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1927.

[4] Titchmarsh E. C., *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1967.

[5] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1962.

[6] Odlyzko A. M., te Riele H. J. J., *Disproof of the Mertens conjecture*, J. Reine und Ang. Math. **357** (1985), 138–160.

[7] Selberg S., *Über die Summe* $\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}$, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim **28** (1955), 37–41.

Поступило 30 декабря 1994 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27