

О ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Среди методов приближенного решения различных операторных уравнений особое место занимают итеративные методы. Обладая рядом преимуществ по сравнению с прямыми или проекционными методами (простота, устойчивость к ошибкам округления, достижение любой точности), эти методы имеют, вообще говоря, ограниченную применимость и потому современные итеративные методы преследуют две цели: расширение области применимости метода и ускорение его сходимости. Именно таковым методом является проекционно-итеративный метод [1].

В настоящей работе исследуется применимость проекционно-итеративного метода для решения систем сингулярных интегральных уравнений (с. и. у.) и с. и. у. с комплексно-сопряженными неизвестными. В этом смысле она является продолжением работы автора [2].

1. Случай линейных уравнений. Рассмотрим систему с. и. у.

$$Kx \equiv A(t)x(t) + B(t)(Sx)(t) + Thx(t) = \varphi(t), \quad (1)$$

где $x(t), \varphi(t)$ m -мерные вектор-функции,

$Thx(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(t, \tau)x(\tau)d\tau$ - сингулярный интеграл с ядром Коши по единичной окружности $\gamma = \{\tau: |\tau|=1\}$, применяемый к $x(t)$ покомпонентно, $A(t), B(t), h(t, \tau)$ - заданные матрицы-функции $m \times m$.

Приближенное решение уравнения (1) различными прямыми и итеративными методами рассматривалось автором в работах [2 - 4].

Вычислительная схема проекционно-итеративного метода состоит в следующем [1]. Предполагается, что банахово пространство X , в котором рассматривается уравнение (1), представимо в виде прямой суммы банаховых пространств $U \oplus V$. Пусть P, Q - операторы проектирования X на U и V соответственно. Последовательность приближений к искомому решению уравнения (1), записанному в виде $x = Tx$, строится по формулам:

$$u^{(k)} = PT(u^{(k)} + v^{(k-1)}), v^{(k)} = QT(u^{(k)} + v^{(k-1)}), \quad (2)$$

где $u^{(k)} = Px^{(k)}$, $v^{(k)} = Qx^{(k)}$, $x^{(k)} - k$ -е приближение к искомому решению (на k -м шаге), $x^{(k)} = u^{(k)} + v^{(k)}$. Другими словами, метод состоит из проекционной части - отыскание $u^{(k)}$, и итеративной - отыскание $v^{(k)}$.

Рассмотрим схему детальнее применительно к уравнению (1). Возьмем в качестве X - пространство вектор-функций с m компонентами, каждая из которых суммируема на γ с квадратом, а под нормой $x \in X$, $x =$

$\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)\}$ будем понимать $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_2$. Обозначим это пространство через $L_2^{(m)}(\gamma)$. Пусть S_τ - оператор, ставящий в соответствие каждой функции из $L_2(\gamma)$ - $x_i(t)$ ее τ -й отрезок ряда Фурье по системе

$\{t^k\}_{-\infty}^{\infty}$. Ясно, что $L_2^{(m)}(\gamma)$ распадается на прямую сумму пространства U элементов вида

$$\{S_\tau x_1(t), S_\tau x_2(t), \dots, S_\tau x_m(t)\}, S_\tau x_i(t) = \sum_{k=-\tau}^{\tau} a_k^{(i)} t^k$$

и его прямого дополнения до $L_2^{(m)}(\gamma)$.

Запишем уравнение (1) в эквивалентной форме $x = (E - \mu K)x + \mu f$, где μ - параметр, определенный ниже. Приближения к искомому решению уравнения $x^*(t)$ согласно алгоритму (2) будем искать в виде решения системы алгебраических уравнений

$$x_\tau^{(n)} = S_\tau(E - \mu K)(x_\tau^{(n)} + y_\tau^{(n-1)}) + \mu S_\tau f, \quad (3)$$

где $x_\tau^{(n)} = S_\tau x^{(n)}$, а $y_\tau^{(n)} = Q_\tau x^{(n)}$ и находится итеративным методом

$$y_\tau^{(n)} = Q_\tau(E - \mu K)(x_\tau^{(n)} + y_\tau^{(n-1)}) + \mu Q_\tau f. \quad (4)$$

Для обоснования вычислительной схемы (3) - (4) необходимо доказать разрешимость уравнения (3) относительно $x_\tau^{(n)}$ при любом $y_\tau^{(n-1)}$ и f , а затем сходимость $x^{(n)} = x_\tau^{(n)} + y_\tau^{(n)}$ к x^* при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $\mu \tilde{f} = (E - \mu K)y_\tau^{(n-1)} + \mu f$ при произвольно фиксированном $y_\tau^{(n-1)}$. Тогда уравнение

(3) можно записать в виде

$$S_{\tau} K x_{\tau}^{(n)} = S_{\tau} \bar{f}. \quad (5)$$

Уравнение (5) представляет собой приближенное уравнение метода моментов, исследованного применительно к уравнению (1) в работе [4].

Следуя результатам этой работы, потребуем для уравнения (1) выполнения следующих условий:

1) матрицы $A(t), B(t), h(t, \tau)$ и правая часть $f(t)$ принадлежат множеству $H_{\alpha}, 0 < \alpha < 1$, причем $h(t, \tau)$ — равномерно по обоим переменным;

2) $\det [A(t) \pm B(t)] \neq 0$ на γ ;

3) левые и правые частные индексы матрицы

$$c(t) = [A(t) + B(t)]^{-1} [A(t) - B(t)] \quad \text{равны нулю.}$$

4) уравнение (1) однозначно разрешимо в $L_2^{(m)}(\gamma)$ при любой правой части $f(t)$.

Тогда повторяя выкладки работы [4] с той лишь разницей, что $\|S_{\tau}\|_{L_2(\gamma)} = 1$, получаем

$$q_1 = \|K^{-1}\| \|K - S_{\tau} K\|_{U \rightarrow X} \leq \gamma_1 / \tau^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где γ_1 — определенная постоянная, явный вид которой можно при необходимости выписать, повторяя выкладки работы [4].

Выбирая τ достаточно велико при выполнении условий 1)–4) согласно теореме 7 [5], заключаем, что уравнение (5), а следовательно, (3), однозначно разрешимо относительно $x_{\tau}^{(n)}$ при любом $y_{\tau}^{(n-1)} \in L_2^{(m)}(\gamma)$.

Таким образом, в нашем случае условие, при котором в [1] исследуется сходимость проекционно-итеративного метода — разрешимость уравнений (1.14)–(2.1) [1] — выполнены, при этом множество S (см. стр. 56) — совпадает с V , а \mathcal{D} — с $L_2^{(m)}(\gamma)$. Поэтому для доказательства сходимости проекционно-итеративного метода можно использовать один из критериев, изложенных в § 2 [1]. В частности, параметр μ можно выбрать так, что норма оператора $T = E - \mu K$ в $L_2^{(m)}(\gamma)$ была меньше 1. Тогда оператор

T - оператор сжатия, и в силу теоремы 2.1 [1] проекционно-итеративный метод будет сходиться при любом выборе начального приближения, при этом быстрота его сходимости лучшая, чем в обычном методе последовательных приближений (см. Замечание 2.1, стр. 19 [1]).

Ясно, что требование сжатия оператора T в некоторых случаях можно заменить другими требованиями. Например, в случае, когда элементы матрицы $h_{ij}(t, \tau)$ имеют вид $\sum_{\kappa=0}^{\tau} \beta_{ij\kappa}(\tau) t^{\kappa}$, а матрицы-функции $A(t), B(t)$ таковы, что

$$[A(t)+B(t)]_{ij} = \sum_{\kappa=0}^{i-1} a_{ij\kappa} t^{\kappa}, [A(t)-B(t)]_{ij} = \sum_{\kappa=0}^{\tau} b_{ij\kappa} t^{\kappa}.$$

Тогда равенство (4) примет вид

$$y_{\tau}^{(n)} = y_{\tau}^{(n-1)} - \mu Q_{\tau} (A(t)y_{\tau}^{(n-1)} + B(t)S y_{\tau}^{(n-1)}) + \mu Q_{\tau} f \quad (6)$$

и при выполнении условия $q_1 < 1$, для сходимости метода достаточно потребовать сходимости последовательности приближений, определяемых (6).

Рассмотрим теперь с. и. у. с комплексно-сопряженными неизвестными

$$\begin{aligned} a(t)\varphi(t) + \overline{b(t)\varphi(t)} + c(t)(S\varphi)(t) + \overline{d(t)(S\varphi)(t)} + \\ + Th_1\varphi(t) + \overline{Th_2\varphi(t)} = f(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Как показано в работах [2 - 4], такие уравнения сводятся к решению системы с. и. у. Поэтому к ним можно применить проекционно-итеративный метод. В виду того, что получаемые при этом системы двух уравнений с двумя неизвестными имеют специфический вид: второе уравнение получено переходом к комплексному сопряжению в уравнении (7), то вычислительная схема и условия сходимости метода могут быть конкретизированы и ослаблены. Действительно, в этом случае, как нетрудно убедиться, оператор, получаемой системы - K_2 обладает свойством: $(K_2 x, x)$ - действительное число, а потому здесь применима теория монотонных операторов [6] и для сходимости проекционно-итеративного метода применительно к уравнению (7) можно использовать критерии сходимости для уравнений с монотонными операторами § 3 [1].

2. Случай нелинейных уравнений. Рассмотрим теперь следующую систему нелинейных сингулярных интегральных уравнений (н. с. и. у.)

$$\mathbf{x}(t) - \lambda F(t, \mathbf{x}(t), Sh(t, \tau, \mathbf{x}(\tau))) = \mathbf{f}(t), \quad (8)$$

где $\mathbf{x}(t), \mathbf{f}(t), F(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}), h(t, \tau, w)$ — вектор-функции
 с m — компонентами, а $Sh(t, \tau, \mathbf{x}(\tau))$ — вектор-функция
 с компонентами вида

$$Sh_i(t, \tau, \mathbf{x}(\tau)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_i(t, \tau, \mathbf{x}(\tau)) d\tau}{\tau - t},$$

γ — как и выше, окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Применим к уравнению (8) проекционно-итеративный метод и исследуем условия его сходимости в пространстве $L_2^{(m)}(\gamma)$.

Вычислительную схему метода запишем следующим образом. Исходя из некоторого начального, приближения находят по следующей рекуррентной формуле

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \lambda F(t, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), Sh(t, \tau, \mathbf{x}^{(n-1)}(\tau))) + \mathbf{f}(t) + \lambda \mathbf{y}^{(n)}(t), \quad (9)$$

где $\mathbf{y}^{(n)}(t) = \{y_1^{(n)}(t), y_2^{(n)}(t), \dots, y_m^{(n)}(t)\}$
 компонентами вида $y_i^{(n)}(t) = \sum_{\kappa=1}^{\tau} c_{i\kappa}^{(n)} \psi_{i\kappa}(t)$, а $\{\psi_{i\kappa}\}_{\kappa=1, i=\overline{1, \tau}}$ — произвольные ортонормированные системы функций из $L_2(\gamma)$, а коэффициенты $c_{i\kappa}^{(n)}$ определяются равенствами

$$c_{i\kappa}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\delta_i^{(n)}(\tau) \overline{\psi_{i\kappa}(\tau)} d\tau}{\delta_i^{(n)}(t) - i},$$

функции

$$\delta_i^{(n)}(t) = F(t, \mathbf{x}^{(n)}(t), Sh(t, \tau, \mathbf{x}^{(n)}(\tau))) - F(t, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), Sh(t, \tau, \mathbf{x}^{(n-1)}(\tau))).$$

Заметим, что в качестве $\{\psi_{i\kappa}\}_{\kappa=1, i=\overline{1, \tau}}$ можно взять одну систему $\{t^{\kappa}\}_{-\infty}^{\infty}$. Тогда, как нетрудно видеть, $c_{i\kappa}^{(n)}$ — коэффициент Фурье функции $\delta_i^{(n)}(t)$, а

$$y_i^{(n)}(t) = S_{\tau} \delta_i^{(n)}(t). \quad \text{Эквивалентность алгоритма (9)}$$

и (3) — (4) следует из его записи в виде (0.10) [1], где $P = S_{\tau}$.

Будем предполагать выполненными следующие условия на уравнение (8):

1) пусть $F(t, u, v)$ таковы, что для любой ее компоненты имеет место неравенство

$$\|F_i(t, u_2, v_2) - F_i(t, u_1, v_1)\|_2 \leq A|u_2 - u_1| + B|v_2 - v_1|, A, B - \text{const};$$

2) функции $h_i(t, \tau, w)$ определены при $t, \tau \in \gamma, -\infty < w < \infty$ и

$$\|h_i(t, \tau, w_2) - h_i(t, \tau, w_1)\|_2 \leq C|w_2 - w_1|, C - \text{const},$$

а вектор-функция $g(t, \tau, w) = h(t, \tau, w) - h(t, t, w)$

такова, что

$$\|g_i(t, \tau, w_2) - g_i(t, \tau, w_1)\|_2 \leq R_i(t, \tau)|w_2 - w_1|,$$

где $R_i(t, \tau)$ - вещественная неотрицательная функция, обладающая свойством

$$\iint_0^{2\pi} \frac{R^2(t, \tau) ds_1 ds_2}{|\tau - t|^2} = R_1 < \infty, t = e^{is_1}, \tau = e^{is_2}.$$

Кроме того, $h(t, \tau, w)$ такова, что для любой $w(\tau) \in L_2(\gamma)$

$$\iint_0^{2\pi} |h(t, \tau, w(\tau))|^2 ds_1 ds_2 < \infty.$$

Пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x^*(t) \in L_2^{(m)}(\gamma)$ (хотя бы в некотором замкнутом множестве из $L_2^{(m)}(\gamma)$).

Рассмотрим

$$x^*(t) - x^{(n)}(t) = \lambda [F(t, x^*(t), Sh(t, \tau, x^*(\tau))) - F(t, x^{(n-1)}(t),$$

$$Sh(t, \tau, x^{(n-1)}(\tau)))] = \lambda [F(t, x^*(t), Sh(t, \tau, x^*(\tau))) -$$

$$- F(t, x^{(n)}(t), Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau))) + \lambda [\delta^{(n)}(t) - y^{(n)}(t)].$$

Теперь воспользуемся условием 1) на уравнение (8).

Далее для краткости знак $L_2^{(m)}(\gamma)$ у нормы опущен, а под $\| \cdot \|_2$ понимается норма в $L_2(\gamma)$.

$$\begin{aligned} & \|F(t, x^*(t), Sh(t, \tau, x^*(\tau))) - F(t, x^{(n)}(t), Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau)))\| \leq \\ & \leq A \|x^* - x^{(n)}\| + B \|Sh(t, \tau, x^*(\tau)) - Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau))\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее с условием 2) имеем

$$\|Sh(t, \tau, x^*(\tau)) - Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau))\| \leq C \|x^* - x^{(n)}\|. \quad (11)$$

Из (10) с учетом (11) имеем

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq |\lambda| (A + BC_1) \|x^* - x^{(n)}\| + |\lambda| \|\delta^{(n)} - y^{(n)}\|. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь разность $\|\delta^{(n)} - y^{(n)}\|$. Оценим аналогично получению (12)

$$\begin{aligned} \|\delta^{(n)}\| &= |\lambda| \|F(t, x^{(n)}(t), Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau))) - F(t, x^{(n-1)}(t), \\ &Sh(t, \tau, x^{(n-1)}(\tau)))\| \leq \alpha_1 \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|, \\ \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| &= |\lambda| \|\delta^{(n-1)} + y^{(n)} - y^{(n-1)}\|, \\ \|\delta^{(n)}\| &\leq \alpha_1 \|\delta^{(n-1)} - y^{(n-1)} + y^{(n)}\|, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha_1 = |\lambda| (A + BC_1)$.
Теперь

$$\begin{aligned} \|\delta_j^{(n)} - y_j^{(n)} + y_j^{(n)}\|_2^2 &= \|\delta_j^{(n)} - y_j^{(n)}\|_2^2 + \|y_j^{(n)}\|_2^2 - \\ &- 2(\delta_j^{(n)}(t) - y_j^{(n)}(t), y_j^{(n)}(t)). \end{aligned} \quad (14)$$

Но последнее слагаемое в (14) равно нулю в силу определения $y^{(n)}(t)$ и ортонормированности системы $\{\psi_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$.
Аналогично

$$\|\delta_j^{(n-1)} - y_j^{(n-1)} + y_j^{(n)}\|_2^2 = \|\delta_j^{(n-1)} - y_j^{(n-1)}\|_2^2 + \|y_j^{(n)}\|_2^2. \quad (14')$$

Из (14) и (14') с учетом (13) получаем

$$\|\delta_j^{(n)}\|_2^2 \leq \alpha_1^2 \|\delta_j^{(n-1)} - y_j^{(n-1)}\|_2^2 + \alpha_1^2 \|y_j^{(n)}\|_2^2,$$

а, следовательно,

$$\|\delta^{(n)} - y^{(n)}\| \leq \alpha_1 \|\delta^{(n-1)} - y^{(n-1)}\| \leq \alpha_1^{n-1} \|\delta^{(1)} - y^{(1)}\|.$$

Подставляя последнее в (12) и предполагая λ таким, что $\alpha_1 < 1$, получаем

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{|\lambda| \alpha_1^{n-1}}{1 - \alpha_1} \|\delta^{(1)} - y^{(1)}\|.$$

Таким образом, сходимость метода доказана. Мы доказали сходимость при условии, что решение уравнения (8) существует и единственно. Заметим, что из условий 1) и 2) при достаточно малых λ следует существование и единственность решения уравнения (8). Действительно, обозначая правую часть уравнения (8) через Gx , аналогично приведенным выше выкладкам, получаем

$$\|Gx - Gy\| \leq \alpha_1 \|x - y\|,$$

где $\alpha_2 = (A + BC_1)\lambda$. Отсюда по принципу сжатых отображений при λ таких, что $\alpha_1 < 1$ следует наше утверждение.

Осталось показать разрешимость системы, определяющей коэффициенты $C_{ik}^{(n)}$. Обозначим через S_τ - оператор, действующий покомпонентно в $L_2^{(m)}(\gamma)$ так, что $S_\tau \delta_i(t)$ - отрезок ряда Фурье функции $\delta_i(t)$ по системе $\{\psi_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$.

Тогда систему для определения $C_{ik}^{(n)}$ можно записать в операторной форме в виде

$$y^{(n)} = S_\tau \delta^{(n)} \equiv G_1 y^{(n)}, \quad (15)$$

$$\text{где } \delta^{(n)} = \delta^{(n)}(t) = F(t, x^{(n)}(t), Sh(t, \tau, x^{(n)}(\tau))) - F(t, x^{(n-1)}(t), Sh(t, \tau, x^{(n-1)}(\tau))).$$

Так как оператор Фурье по ортонормированной в $L_2(\gamma)$ системе имеет норму равную 1, то при условиях 1) и 2) на уравнение (8) при малых λ оператор G_1 является оператором сжатия, и решение уравнения (15) существует и единственно.

Заметим, что если в качестве ортонормированной системы взять систему $\{t^k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, то уравнение (15) представляет собой систему метода моментов, разрешимость которой исследована при иных условиях в работе [4].

Таким образом, осуществимость и сходимость алгоритма (9) доказана.

Как и в линейном случае результаты п. 2 переносятся и конкретизируются для нелинейных с. и. у. с комплексно-сопряженными неизвестными [7].

Л и т е р а т у р а

1. Лучка А. Ю. Критерии сходимости проекционно-итеративного метода для нелинейных уравнений. - Киев, 1982, с. 54. (Препринт. Инст. матем. АН УССР).

2. Кадушин В. П. К приближенному решению систем нелинейных сингулярных интегральных уравнений. - Изв. вузов. Математика, 1981, № 10, с. 26 - 30.

3. Кадушин В. П. К прямым методам решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. - Изв. вузов. Математика, 1976, № 11, с. 109 - 113.

4. Кадушин В. П. Решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно-сопряженными неизвестными методом редукции. - Конструктивная теория функций и функциональный анализ, вып. 2, Изд-во Казанского ун-та, 1979, с. 33 - 40.

5. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казанского университета, 1980, с. 232.

6. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. - М.: Наука, 1980, с. 414.

7. Кадушин В. П. Приближенное решение одного класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений. - Казань, 1981, с. 27 - Рукопись представлена Казанским ун-том. Деп. в ВИНТИ 04 дек. 1981, № 5548 - 81.