V. V. Starkov, A Countably Connected Domain is not Homeomorphic to an Uncountably Connected Domain, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, Volume 13, Issue 1, 26–29

DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-26-29

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Для того, чтобы имели место формулы при $\nu \to \infty$*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_0(x)+o(1), \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_1(x)+o(1), \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы функции f_0, f_1 удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} \Big(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)\Big) - p_2\Big(e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + F_1(x)\Big) = 0, \\ \Big(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)\Big) - \Big(e_2 f_0'(\alpha_x) - e_1 f_0'(\beta_x) + f_0'(x)\Big) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение (ввиду нулевых начальных условиях получим эквивалентное уравнение) и анализируя полученную систему, без труда получим простое условие разложимости вектора $(f_0, f_1)^T$ по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и* $e_2 = 0$ *(это эквивалентно условию* $a_{2\bar{2}} = 0$*). Для того, чтобы имели место формулы* (23)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* $f_0'(x) = \omega_2 f_1(x)$ *для всех* $x \in [0,1]$.

Из полученных результатов видно, что когда корни х.м. лежат на одном луче, для разложимости функции в ряд по с.ф. пучка $L(\lambda)$ в с.н. случае так же, как и в случае оператора первого порядка, рассмотренного в [2], не требуется аналитичности разлагаемой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. [*Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Parts I. New York : Ungar Publ. Co., 1967; *Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Parts II. New York : Ungar Publ. Co., 1968.]

2. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15. [*Gurevich A. P., Khromov A. P.* First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign // Math. Notes. 1994. Vol. 56, iss.1. P. 653—661.]

3. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193. [*Khromov A. P.* Expansion in eigenfunctions a boundary value problem of the third order // Issledovaniya po teorii operatorov. Ufa, 1988. P. 182–193.]

4. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405. [*Hromov A. P.* Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // Math. USSR Sb. 1982. Vol. 42, iss. 3. P. 331–355.]

УДК 517.53/54

СЧЕТНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ НЕ ГОМЕОМОРФНА НЕСЧЕТНОСВЯЗНОЙ

В. В. Старков

Петрозаводский государственный университет
E-mail: VstarV@list.ru

В 1923 году Керекьярто доказал, что счетносвязная область не гомеоморфна несчетносвязной. В этой заметке дано другое доказательство этого факта с использованием методов комплексного анализа.

Ключевые слова: гомеоморфизмы бесконечносвязных областей.

A Countably Connected Domain is not Homeomorphic to an Uncountably Connected Domain

V. V. Starkov

In 1923 Керекьярто proved, that a countably connected domain is not homeomorphic to an uncountaby connected domain. We give another proof of this statement.

Key words: homeomorphism of multy connected domains.

Под *континуумом*, как обычно, будем понимать связное замкнутое подмножество расширенной плоскости. Граничной компонентой области D называется каждый континуум $K \subset \partial D$, обладающий тем свойством, что любой континуум $K' \subset \partial D$, $K' \supset K$, совпадает с K.

Определение. Область D называется *счетносвязной*, если ее граница ∂D является объединением счетного множества компонент. Если же ∂D невозможно представить в виде не более чем счетного множества попарно непересекающихся континуумов, то область D называется *несчетносвязной*.

Следующий результат принадлежит Керекьярто [1] (см. также [2, гл. 4, II]), но здесь будет дано другое его доказательство с использованием методов комплексного анализа. Потребность в этом результате нередко возникает в разных задачах (см., например, [3]).

Теорема. *Счетносвязная и несчетносвязная области в $\bar{\mathbb{C}}$ топологически не эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть D — счетносвязная область. По теореме Посселя–Гретша [4, гл. 5, § 2] существует биголоморфное отображение F области D на область Ω, представляющую собой расширенную плоскость $\bar{\mathbb{C}}$ с разрезами, параллельными вещественной оси (т. е. каждая компонента границы $\partial\Omega$ представляет собой отрезок, параллельный вещественной оси, или точку). Покажем, что Ω — счетносвязная область.

Обозначим $\mathcal{I}$ проекцию множества $\partial\Omega$ на мнимую ось. Покажем, что $\mathcal{I}$ не более чем счетно. Из открытости и связности Ω следует, что для любого $y \in \mathcal{I}$ на прямой $\{z : \operatorname{Im} z = y\}$ существует интервал $\gamma_y \subset \Omega$, оканчивающийся в граничной точке области Ω. Обозначим $\Gamma_y = F^{-1}(\gamma_y) \subset D$. Каждая из кривых Γ_y имеет предедьную точку из ∂D. Если $\mathcal{I}$ несчетно, то существует граничная компонента B области D, на которой несчетное множество кривых Γ_y имеют предельные точки. Рассмотрим две из них: Γ_{y_1} и $\Gamma_{y_2}, y_1 \neq y_2$. Выберем точки $a, b \in \Omega$, расположенные на прямой $\{z : \operatorname{Im} z = y_1\}$ по обе стороны интервала γ_{y_1}, и такие ε-окрестности U_a и U_b этих точек, что $U_a, U_b \subset \Omega$.

Рассмотрим открытый прямоугольник R_1, ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b и горизонталями $\{z : \operatorname{Im} z = y_1 - \varepsilon\}, \varepsilon < |y_1 - y_2|$, и $\{z : \operatorname{Im} z = y_1\}$. Открытое множество $R_1 \cap \Omega$ распадается в объединение (не более чем счетное) областей B_j (см., например, [5, гл. 4, §4]): $R_1 \cap \Omega = \cup_j B_j, B_{j_1} \cap B_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$ (из дальнейшего будет ясно, что $R_1 \cap \Omega$ — область). Каждая из областей B_j в качестве граничных компонент или их фрагментов может иметь лишь разрезы (или их части) области Ω или фрагменты ∂R_1. Поэтому и внешняя граница области B_j может быть разбита в объединение горизонтальных отрезков и фрагментов вертикалей границы ∂R_1. Пусть $\{z \in \mathbb{C} : \rho_j' < \operatorname{Im} z < \rho_j''\}$ — минимальная горизонтальная полоса, содержащая B_j. Если этой полосе, кроме области B_j, принадлежали бы точки другой области B_k, то континуум, являющийся фрагментом внешней границы области B_j, разделял бы в $R_1 \cap \{z \in \mathbb{C} : \rho_j' < \operatorname{Im} z < \rho_j''\}$ малые окрестности точек $a' = x' + iy' \in B_j$ и $a'' = x'' + iy' \in B_k$ в том смысле, что для любого вещественного η из малой окрестности нуля отрезок $[x' + i(y' + \eta), x'' + i(y' + \eta)]$ имел бы непустое пересечение с этим фрагментом внешней границы области B_j. Но ни один из связных фрагментов ∂B_j этим свойством не обладает (отрезок $[x' + i(y' + \eta), x'' + i(y' + \eta)]$ не может пересекать вертикального фрагмента ∂B_j, так как B_j и B_k из R_1). Следовательно, каждая область B_j лежит в полосе $\{z \in \mathbb{C} : \rho_j' < \operatorname{Im} z < \rho_J''\}$, причем для разных областей B_j и B_k $(\rho_j', \rho_j'') \cap (\rho_k', \rho_k'') = \emptyset$.

Соединим простой кривой $L_1 \subset B_1$ точки $a_1 \in U_a \cap B_1$ и $b_1 \in U_b \cap B_1$. Заменяя в предыдущих рассуждениях прямоугольник R_1 на прямоугольник R_2, ограниченный вертикальными прямыми, проходящими через a и b, и горизонталями $\{z : \operatorname{Im} z = y_1\}$ и $\{z : \operatorname{Im} z = y_1 + \varepsilon\}$, придем к существованию простой кривой $L_2 \subset R_2 \cap \Omega$, соединяющей $a_2 \in U_a$ и $b_2 \in U_b$. Следовательно, существует простая замкнутая кривая $L \subset \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z - y_1| < \varepsilon\}$, содержащая в своей внутренности интервал γ_{y_1} вместе с компонентой границы $\partial\Omega$, к которой он примыкает.

Обозначим через G_1 плоскую область, ограниченную кривой L, $G_2 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{G}_1$. Тогда $\Gamma_{y_1} \subset F^{-1}(G_1 \cap \Omega), \Gamma_{y_2} \subset F^{-1}(G_2 \cap \Omega)$. Поэтому предельные точки кривых Γ_{y_1} и Γ_{y_2} не могут принадлежать одной граничной компоненте B области D. Противоречие доказывает счетность множества $\mathcal{I}$.

2. Покажем теперь, что Ω — счетносвязная область. Если это не так, то существует $y_0 \in \mathcal{I}$, для которого на прямой $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = y_0\}$ имеется несчетное множество граничных компонент области Ω. Для каждой из таких компонент существует своя последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$, сходящаяся к некоторой точке этой компоненты. Тогда каждая последовательность $\zeta_n = F^{-1}(z_n) \in D, n \in \mathbb{N}$, имеет, по крайней мере, одну предельную точку на граничной компоненте области D. Из сделанного предположения о несчетносвязности области Ω вытекает, что таких различных последовательностей — $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — несчетное множество. Поэтому существует компонента

$B \subset \partial D$, которой принадлежат предельные точки несчетного множества построенных последовательностей $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим две из них: $\{\zeta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Поскольку пределы последовательностей $z'_n = F(\zeta'_n)$ и $z''_n = F(\zeta''_n)$ принадлежат разным компонентам K' и K'' из $\partial\Omega$, лежащим на прямой l, то существует разделяющая их точка $a \in l \cap \Omega$. Теперь те же рассуждения, что и в первой части доказательства, позволяют построить простые замкнутые кривые $L' \subset \Omega$ и $L'' \subset \Omega$, ограничивающие области комплексной плоскости G'_1 и G''_1, $G'_1 \cap G''_1 = \emptyset$. Причем $K' \subset G'_1, K'' \subset G''_1$. Следовательно,

$$\{\zeta'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F^{-1}(G'_1 \cap \Omega) \subset D, \qquad \{\zeta''_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F^{-1}(G''_1 \cap \Omega) \subset D,$$

начиная с некоторого номера n. Поэтому последовательности $\{\zeta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^{\infty}$ не могут иметь предельных точек на одной и той же граничной компоненте B области D. Противоречие.

Таким образом, Ω — счетносвязная область.

3. Пусть теперь D — несчетносвязная область. Опять, по теореме Посселя–Гретша, биголоморфно отобразим ее на расширенную плоскость с разрезами, параллельными вещественной оси; это отображение обозначим снова F и обозначим $\Omega = F(D)(\ni \infty)$. Покажем, что Ω — несчетносвязная область.

Предположим противное, т. е. $\partial\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, где K_j — различные граничные компоненты области Ω. Для каждой компоненты B_α границы области D (α пробегает некоторое множество мощности **c**) построим последовательность $\{\zeta_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, сходящуюся к $\zeta^{(\alpha)} \in B_\alpha$. Последовательность $z_n^{(\alpha)} = F(\zeta_n^{(\alpha)})$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предельную точку, по крайней мере, на одной компоненте границы области Ω. Из сделанного предположения счетносвязности Ω вытекает существование такой граничной компоненты $K \subset \partial\Omega$, на которой имеются предельные точки несчетного множества различных последовательностей $\{\zeta_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим две из них: $\{\zeta'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\zeta''_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим B' и B'' ($B' \neq B''$) граничные компоненты области D, которым принадлежат соответствующие пределы ζ' и ζ'' этих последовательностей, $\zeta' \in B'$, $\zeta'' \in B''$. Выберем точки $a, b \in \Omega$, лежащие с K на одной горизонтальной прямой, но по разные стороны от K. Повторяя рассуждения из 1), построим замкнутую кривую $L_\varepsilon \subset \Omega$, лежащую в ε-окрестности компоненты K и содержащую K в своей внутренности.

Обозначим через G_ε ограниченную область комплексной плоскости с границей $\partial G_\varepsilon = L_\varepsilon$, тогда $\Phi_\varepsilon = F^{-1}(G_\varepsilon \cap \Omega)$ — область, ее замыкание $\bar{\Phi}_\varepsilon$ — континуум, $\zeta' \in \bar{\Phi}_\varepsilon \ni \zeta''$. В качестве ε возьмем убывающую последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Тогда $\bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ — убывающая последовательность континуумов, следовательно [5,гл. 5, § 3], $\Phi = \overset{\infty}{\underset{n=1}{ap}}\, \bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ — континуум, $\zeta' \in \Phi \ni \zeta''$. Поскольку при всех n множество $\bar{\Phi}_{\varepsilon_n}$ лежит в замыкании $\bar{D}$ области D, то и $\Phi \subset \bar{D}$. Но $\Phi \cap D = \emptyset$, так как в противном случае для точки $z_0 \in D \cap \Phi$ ее образ

$$F(z_0) \in G_{\varepsilon_n} \cap \Omega \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

что невозможно, если $\varepsilon_n < \rho(F(z_0, K)$. Следовательно, $\Phi \subset \partial D$. Но тогда, в силу связности Φ, ζ' и ζ'' принадлежат одной граничной компоненте области D, а значит, $B' = B''$. Противоречие.

Таким образом, Ω — несчетносвязна.

4. Пусть теперь D_1 — счетносвязная область, а D — несчетносвязная. Обозначим Ω биголоморфный образ области D_1, полученный применением теоремы Посселя–Гретша. В 2) доказана счетносвязность Ω. Если D_1 и D топологически эквивалентны, то топологически эквивалентны области Ω и D.

Обозначим через $F_0 : D \to \Omega$ соответствующий гомеоморфизм. Теперь повторим рассуждения п. 3), взяв в качестве биголоморфного отображения F — гомеоморфизм F_0. Придем к противоречию с топологической эквивалентностью областей D_1 и D. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научной деятельности и при поддержке РФФИ (*проект* 11-01-00952-а).

Библиографический список

1. *Kerekjarto B. V.* Vorlesungen über Topologie. Berlin : J. Springer, 1923. 270 p.
2.*Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М. : Наука, 1964. 228 с. [*Stoilov S.* Lectures on topological principles in the theory of analytic functions. Moscow : Nauka, 1964. 228 p.]
3. *Старков В. В.* Локально биголоморфные конечнолистные отображения ограниченных областей. // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 177–186. [*Starkov V. V.* Finitely valent locally biholomorphic mappings of bounded domains // Siberian Math. J. 2011. Vol. 52, № 1. P. 139–146.]
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с. [*Goluzin G. M.* Geometric theory of Functions of a complex variable. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1969.]
5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с. [*Alexandrov P. C.* Introduction to set theory and general topology. Moscow : Nauka, 1977. 368 p.]

УДК 517.518.82

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ МЕЙКСНЕРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Э. Ш. Султанов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: emir.sultanov@gmail.com

В работе исследуется задача о приближении функций дискретными рядами по полиномам Мейкснера, ортогональным на равномерной сетке $\{0, 1, \ldots\}$. Сконструированы новые ряды по этим полиномам, для которых в точке $x = 0$ частичные суммы совпадают с приближаемой функцией $f(x)$. Новые ряды образованы с помощью предельного перехода при $\alpha \to -1$ рядов Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ по полиномам Мейкснера.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряды Фурье, предельные ряды.

Limit Discrete Meixner Series and Their Approximative Properties

E. Sh. Sultanov

In this article the problem of function approximation by discrete series by Meixner polynomials orthogonal on uniform net $\{0, 1, \ldots\}$ is investigated. We constructed new series by these polynomials for which partial sums coincide with input function $f(x)$ in $x = 0$. These new series were constructed by the passage to the limit of Fourier series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ by Meixner polynomials when $\alpha \to -1$.

Key words: Meixner polynomials, Fourier series, limit series.

В задачах обработки сигналов часто встречается ситуация, когда требуется аппроксимировать дискретный сигнал, который с определенного момента является затухающим. При этом видится целесообразным осуществить его покусочную аппроксимацию с сохранением непрерывности восстановленного сигнала, а для этого необходимо, чтобы приближение в точке стыка совпадало с восстанавливаемой функцией. Для приближения затухающих сигналов наиболее подходящим является оператор частичных сумм Фурье по полиномам Мейкснера, однако он не обладает указанным свойством совпадения в точке стыка. Решая эту задачу, мы сконструировали оператор, основанный на новых так называемых предельных рядах по полиномам Мейкснера.

Для $0 < q < 1$, $\alpha > -1$ классические многочлены Мейкснера (J. Meixner) [1] можно определить следующим образом:

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$. Они нормируются условием $M_n^\alpha(0, q) = \binom{n+\alpha}{n}$ и образуют ортогональную систему на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ с весом

$$\eta^\alpha(x) = \eta^\alpha(x, q) = (1-q)^{\alpha+1} q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)},$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_k^\alpha(j, q) M_l^\alpha(j, q) \eta^\alpha(j) = \delta_{kl} h_k^{\alpha,q},$$

где $h_k^{\alpha,q} = \binom{k+\alpha}{k} q^{-k} \Gamma(\alpha+1)$.

