

© А.С. ГОРШКОВ, В.Ф. КРАВЧЕНКО, В.А. РВАЧЕВ,
академик АН УССР В.Л. РВАЧЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СИНТЕЗА ЦИФРОВОГО ДИФФЕРЕНЦИАТОРА

1. В настоящей работе изложен и обоснован новый подход к построению цифровых дифференцирующих устройств на основе математического аппарата атомарных функций. Известен ряд подходов к решению данной проблемы, связанной с необходимостью синтеза финитной импульсной характеристики цифрового дифференциатора в ограниченной полосе частот при максимизации отношения сигнал/шум [1–3], которые имеют ряд недостатков (высокий уровень боковых лепестков, невозможность адаптации к полосе обрабатываемого сигнала). Оптимизировать решение данной задачи удастся при использовании бесконечно дифференцируемых финитных функций [6–10].

2. Требуется оценить производную сигнала $f(x)$ в ограниченной полосе частот $[-\Omega, \Omega]$ (временную или пространственную):

$$(1) \quad g(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Отметим, что данная задача является общей и для одномерного и для двумерного случаев, так как для изображений часто необходимо оценивать модуль градиента $\nabla f(x, y)$ [1]:

$$(2) \quad h(x, y) = \left[\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2},$$

где, как это видно из (2), необходимо вычислить одномерные частные производные (вдоль строк и столбцов изображения).

Известен ряд методов оценки производной функции [1–3] — синтез цифровых нерекурсивных фильтров, набор масочных операторов и др. Общим их недостатком является жесткая настройка на сигнал определенного вида, тогда как на практике при реализации сложных алгоритмов слежения за различными объектами характер границ объекта может существенно изменяться. Поскольку выделение объекта по его границам производится пороговым способом, существенным становится согласование полосы дифференциатора и сигнала для максимизации отношения сигнал/шум, так как дифференциатор имеет свойство подчеркивания высокочастотных составляющих, в том числе и у широкополосного шума.

На рис. 1 показан ряд ситуаций, когда оценка производной сигнала путем свертки с простейшей дифференцирующей маской (+1; -1) (рис. 1а) позволяет выделять только сигналы с крутыми фронтами (рис. 1б), подавляя низкочастотные сигналы (рис. 1в).

Адаптацию дифференциатора проще осуществить, если выполнять свертку сигнала с синтезированной импульсной характеристикой, которая может храниться в виде отсчетов в ПЗУ вычислительной системы. Преимуществом такого подхода является возможность использования алгоритма быстрой свертки, например, на

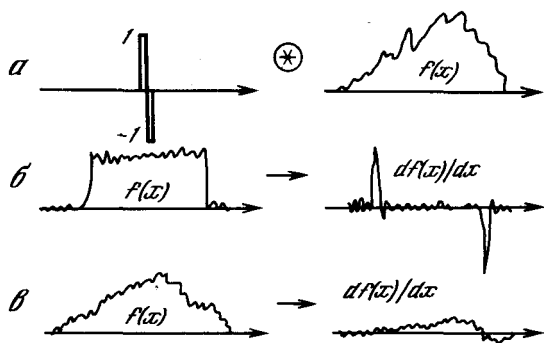


Рис. 1

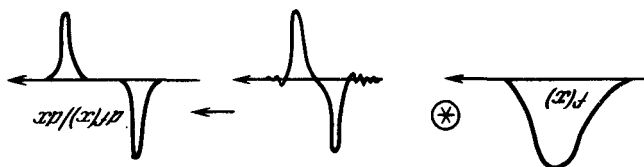


Рис. 2

основе теоретико-числового преобразования Ферма (ТЧПФ), допускающего наиболее быструю аппаратную реализацию с помощью свойств двоичного кодирования [4] (рис. 2).

Дискретной свертке присущи известные проблемы понижения уровня боковых лепестков и сужения выходных импульсов, как и дискретному преобразованию Фурье (ДПФ) [5]. В данном случае различие состоит в необходимости получения узких импульсов с малыми боковыми лепестками на границах исследуемого сигнала. Ее решение достигается путем использования бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями малого диаметра, что обеспечивается математическим аппаратом атомарных функций [6–11].

3. Атомарные функции имеют спектр вида

$$(3) \quad \hat{\varphi}(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{T(u/a_k)}{P(u/a_k)},$$

где $T(u)$ — квазиполином вида $T(u) = \sum_{l=1}^N c_l e^{j\mu_l u}$, $\mu_l \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < +\infty$, $P(u)$ — алгебраический полином, а также удовлетворяют уравнению

$$(4) \quad Lf(x) = \sum_{k=1}^M c_k f(ax - b_k), \quad |a| > 1,$$

где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами.

Возможно использование двух методов решения поставленной задачи на основе атомарных функций. Первый основывается на исследованном в работе [10] способе построения весовых окон для спектрального анализа посредством ДПФ. Показано, что построение окон через атомарные функции позволяет резко улучшить качество спектральных линий по сравнению с известными окнами [5].

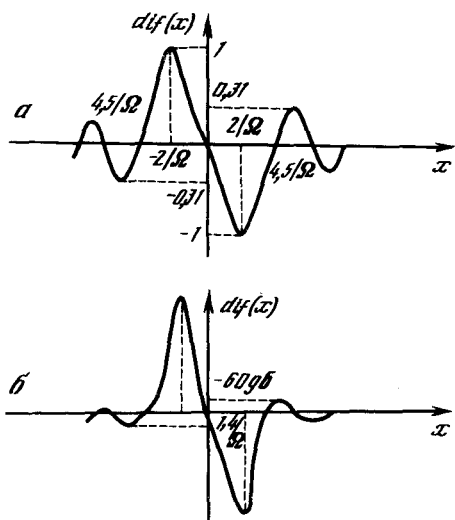


Рис. 3

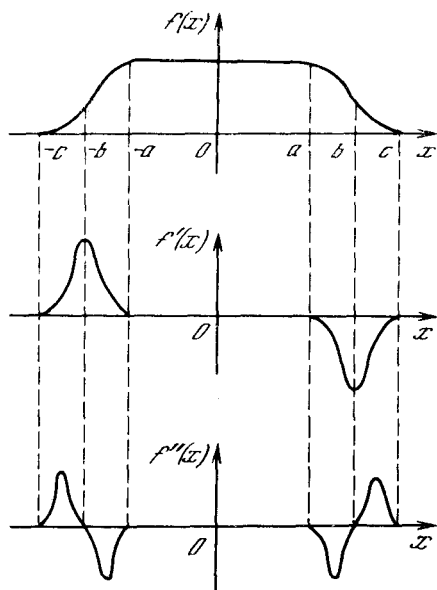


Рис. 4

Так как дифференцирование сигнала сводится к умножению его спектра на частоту:

$$(5) \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{jux} du = \int_{-\infty}^{+\infty} ju F(u) e^{jux} du,$$

то возможно восстановить импульсную характеристику дифференциатора, но только в конечной полосе частот (для бесконечной полосы в (5) согласно принципу неопределенности она становится исчезающе малой):

$$(6) \quad \text{dif}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{2\pi ju}{\Omega^2} e^{jux} du = 2 \frac{\Omega x \cos \Omega x - \sin \Omega x}{(\Omega x)^2}.$$

Полученная функция (рис. 3а) характеризуется слишком высоким уровнем боковых лепестков ($-8,3$ дБ) вследствие использования в неявном виде при интегрировании в (6) простейшего прямоугольного окна Дирихле:

$$(7) \quad W(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq \Omega, \\ 0, & |u| > \Omega. \end{cases}$$

Существенно снизить боковые лепестки (на -51 дБ) позволяет, например, окно

$$(8) \quad W(u) = 1,0696 \left[h_{1,5} \left(\frac{u}{\Omega} \right) + \frac{1}{121} h''_{1,5} \left(\frac{u}{\Omega} \right) \right]$$

на основе атомарной функции

$$(9) \quad h_{1,5}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\lambda v} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[\frac{1}{2}\lambda(2/3)^k]}{\frac{1}{2}\lambda(2/3)^k} d\lambda,$$

где $|v| \leq 1$.

Окно (8) аппроксимируется тригонометрическим полиномом

$$(10) \quad W(u) = \sum_{k=0}^5 \alpha_k \cos \frac{\pi k u}{\Omega},$$

где $\alpha_0 = 0,5537$, $\alpha_1 = 0,3628$, $\alpha_2 = 0,0835$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0,00135$, $\alpha_5 = -0,00132$, откуда может быть получена требуемая импульсная характеристика (рис. 3в):

$$(11) \quad \text{dif}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{2\pi j u}{\Omega^2} W(u) e^{j u x} du = 2\Omega x \cos \Omega x \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k \alpha_k}{(\Omega x)^2 - (\pi k)^2} - \\ - 2 \sin \Omega x \sum_{k=0}^5 (-1)^k \alpha_k \frac{(\Omega x)^2 + (\pi k)^2}{[(\Omega x)^2 - (\pi k)^2]}.$$

4. В качестве альтернативного может быть использован прямой метод синтеза на основе уравнения (4). Для модели гладкого (финитного бесконечно дифференцируемого) перепада (рис. 4)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > c, \end{cases}$$

$a \leq |x| \leq c$ – область перехода, справедливо

$$g(x) = f(x) \circledast \psi'(x) = f'(x) \circledast \psi(x),$$

где $\psi'(x) = \text{dif}(x)$, что означает согласованную по производной фильтрацию, дающую максимальный граничный отклик, если только выполнено

$$(12) \quad \psi^*(x) = f'(x).$$

Учтем, что для модельного перепада $f(x)$ его вторая производная имеет характер антисимметричной функции

$$(13) \quad f''(x) = \varphi(2x + 1) - \varphi(2x - 1),$$

где $\varphi(x)$ – финитная бесконечно дифференцируемая функция.

Тогда из (12) и (13) имеем связь между спектрами функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$2\Phi(u) \sin(u/2) = u \Psi(u).$$

Распространение этих соотношений на производные более высокого порядка приводит к выражению

$$(14) \quad \Psi(u) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(u/2^k)}{u/2^k}$$

или эквивалентному уравнению для первой производной

$$(15) \quad \psi'(x) = 2[\psi(2x + 1) - \psi(2x - 1)].$$

Его решением является атомарная функция вида

$$(16) \quad \psi(x) = \text{up}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j u x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin u \cdot 2^{-k}}{u \cdot 2^{-k}} du.$$

В итоге импульсная характеристика синтезируется следующим образом:

$$(17) \quad \text{dif}(x) = \text{up}'(x) = 2[\text{up}(2x + 1) - \text{up}(2x - 1)].$$

Основные свойства и аппроксимация функции $\text{up}(x)$ полностью обоснованы в [6, 7, 11]. Отметим, что таким способом оказалось возможным полностью сгладить боковые лепестки.

5. Оценка полосы сигнала для подстройки дифференциатора может быть выполнена, например, с помощью оценки моментов сигнала после его выделения:

$$(18) \quad \Omega \approx 4\pi \sqrt{\frac{\mu_{00}}{\mu_{20} + \mu_{02}}}.$$

6. Таким образом, в работе предложен и обоснован новый подход к синтезу цифрового дифференциатора. Данный подход может быть также распространен на широкий класс задач обработки сигналов и изображений цифровыми методами.

Научно-исследовательский институт точных приборов
Москва

Поступило
24 IV 1991

Институт проблем машиностроения
Академии наук УССР
Харьков

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакут П.А., Колмогоров Г.С. – Зарубежн. радиоэлектрон., 1987, № 10, с. 31–38.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
3. Кумар Б., Дутта Рой С. Тр. Ин-та инж. по электротехн. и радиоэлектрон., 1988, т. 76, № 3, с. 90–91.
4. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / Под ред. С. Гуна и др. М.: Мир, 1989, т. 356–368.
5. Хэррис Ф.Дж. – Тр. Ин-та инж. по электротехн. и радиоэлектрон., 1978, т. 66, № 1, с. 60–96.
6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
7. Рвачев В.Л., Рвачев В.А. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1979. 196 с.
8. Зубков Ю.Л., Кравченко В.Ф., Нефедов Е.И. – ДАН, 1981, т. 259, № 4, с. 823–825.
9. Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Шварко Ю.В. – ДАН, 1987, т. 295, № 3, с. 594–596.
10. Кравченко В.Ф., Рвачев В.А., Рвачев В.Л. – ДАН, 1989, т. 306, № 1, с. 78–81.
11. Рвачев В.А. – УМН, 1990, т. 45, вып. 1 (271), с. 77–103.