

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский, Обобщённый граф Вонга  
для потоков Морса на поверхностях,  
*Журнал СВМО*, 2023, том 25, номер 3, 123–149

<https://www.mathnet.ru/svmo859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

20 мая 2025 г., 11:57:55



DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.123-149

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

## Обобщённый граф Вонга для потоков Морса на поверхностях

В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена градиентно-подобным потокам на поверхностях, представляющих из себя потоки Морса-Смейла без предельных циклов, и их топологической классификации с точностью до топологической сопряжённости. Такие потоки, называемые иначе потоками Морса, были неоднократно классифицированы посредством различных топологических инвариантов. Одним из таких инвариантов является двуцветный граф К. Вонга, действующий лишь для градиентно-подобных потоков на ориентируемых поверхностях. Целью данного исследования было обобщение графа Вонга на случай произвольных замкнутых поверхностей. В работе вводится новый инвариант – обобщённый граф Вонга. Посредством обобщённого графа Вонга получена топологическая классификация градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях, т. е. с добавлением неориентируемого случая; в т. ч. выполнена реализация обобщённого графа Вонга стандартным потоком Морса на поверхности. Для получения всех результатов используется конструктивный метод: для доказательства классификационной теоремы строится гомеоморфизм, отображающий области с одинаковым поведением траекторий друг в друга, а граф позволяет установить верное расположение таких областей друг относительно друга. Для доказательства теоремы реализации также используется конструктивный метод: по графу строится стандартный поток, топологически сопряжённый каждому потоку, которому соответствует данный граф. Таким образом, в работе построена полная топологическая классификация потоков Морса на поверхностях посредством инварианта, в некоторых отношениях превосходящего в простоте и практической ориентированности граф Пейшото, так и трёхцветный граф Ошемкова-Шарко.

**Ключевые слова:** градиентно-подобный поток, поток Морса, топологическая классификация, граф Вонга, поток на поверхности

**Для цитирования:** Круглов В. Е., Рекшинский М. С. Обобщённый граф Вонга для потоков Морса на поверхностях // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 123–149. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.123-149>

*Об авторах:*

**Круглов Владислав Евгеньевич**, научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, [kruglovslava21@mail.ru](mailto:kruglovslava21@mail.ru)

**Рекшинский Михаил Сергеевич**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4683-4619>, [mrekshinskii@mail.ru](mailto:mrekshinskii@mail.ru)

© В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский



MSC2020 37D15

# Generalised Wang's Graph for Morse Flows on Surfaces

V. E. Kruglov, M. S. Rekshinskiy

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper is devoted to gradient-like flows on surfaces, which are Morse-Smale flows without limit cycles, and to their topological classification up to topological conjugacy. Such flows, otherwise called Morse flows, have been repeatedly classified by means of various topological invariants. One of these invariants is the two-colour Wang's graph, which is valid only for gradient-like flows on orientable surfaces. The purpose of this study was to generalize the Wang's graph to the case of arbitrary closed surfaces. A new invariant, the generalized Wang's graph, is introduced in the paper. Using this generalization, a topological classification of gradient-like flows on arbitrary surfaces is obtained, including a non-orientable case. The realization of the generalized Wang's graph by the standard Morse flow on the surface is performed as well. To obtain all the results, constructive method is used: to prove the classification theorem, a homeomorphism is constructed that maps regions with the same behavior of trajectories into each other, and the graph allows to establish the correct location of such regions relative to each other. The realization theorem is also proven constructively: basing on the graph being considered, standard flow is created that is topologically conjugated to every flow such that the graph corresponds to this flow. Thus, a complete topological classification of Morse flows on surfaces is constructed by means of an invariant, which in some respects surpasses in simplicity and practicality both the directed Peixoto graph and the three-colour Oshemkov-Sharko graph.

**Keywords:** gradient-like flow, Morse flow, topological classification, Wang's graph, surface flow

**For citation:** V. E. Kruglov, M. S. Rekshinskiy. Generalised Wang's Graph for Morse Flows on Surfaces. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 123–149. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.123-149>

*About the authors:*

**Vladislav E. Kruglov**, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, HSE University (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Cand.Sci. (Mathematical Sciences), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, [kruglovlava21@mail.ru](mailto:kruglovlava21@mail.ru)

**Mihail S. Rekshinskiy**, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, HSE University (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4683-4619>, [mrekshinskii@mail.ru](mailto:mrekshinskii@mail.ru)

## 1. Введение

Понятие *грубых потоков* на плоскости были введено в статье А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, отсутствуют траектории, соединяющие седловые точки. Этот важный класс потоков был обобщён С. Смейлом в работе [2] на произвольные размерности, назван классом потоков Морса-Смейла и классифицирован с точностью до

топологической эквивалентности. В настоящей работе рассматриваются потоки Морса-Смейла без периодических траекторий на поверхностях, называемые потоками Морса или градиентно-подобными потоками.

Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одним и тем же предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], Е. А. Леонтович и А. Г. Майера [3–4]. Типы ячеек (число которых конечно) и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. На основе данного разбиения в работах Пейшото [5] и Вонга [6] были введены соответствующие топологические инварианты. Пейшото ввел понятие различающего ориентированного графа, который ставится в соответствие потоку Морса-Смейла на поверхности, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом для потоков Морса-Смейла с точностью до топологической эквивалентности. Однако как было выяснено впоследствии, описанный Пейшото ориентированный граф является полным топологическим инвариантом лишь для градиентно-подобных потоков. В свою очередь Вонг предъявил более простой, чем у Пейшото, инвариант для потоков Морса-Смейла, определённый только на ориентируемых поверхностях. И поскольку Вонг построил свой инвариант на основе работы Пейшото, он также является полным инвариантом лишь для потоков Морса.

Более подробные сведения по истории классификации потоков на поверхностях и, в частности, градиентно-подобных потоков смотрите, например, в работах [7–8].

Граф Вонга  $\Gamma_{f^t}^W$  для градиентно-подобного потока  $f^t$  на ориентируемой поверхности  $S$  – это двуцветный ориентированный граф, дуальный к графу Пейшото: вершины такого графа соответствуют ячейкам потока  $f^t$ , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по сепаратрисам, соответствующим рёбрам. Ребру присваивается цвет  $u$ , если оно соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, и цвет  $s$ , если соответствует устойчивой седловой сепаратрисе. Заметим, что если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренней замкнутости некоторой ячейки, то этой сепаратрисе соответствует петля на графе. Таким образом, каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Также, на всех  $s$ - и  $u$ -рёбрах графа  $\Gamma_{f^t}^W$  задаётся ориентация, индуцированная выбором ориентации на несущем многообразии  $S$ , такая, что ориентация рёбер на всех  $su$  циклах задаёт согласованную ориентацию на каждом одноцветном цикле.

В ходе построения своего графа Вонг использовал некий вспомогательный граф, у которого отсутствуют цвета и ориентация рёбер, но присутствует разбиение всех рёбер на пары следующим образом: набор из четырех инцидентных одной вершине рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе ячейки, соответствующей вершине. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары.

При построении обобщённого графа Вонга используется нечто среднее между этим вспомогательным графом и, собственно, графом Вонга для потоков Морса. Определим обобщённый граф Вонга следующим образом: обобщённый граф Вонга  $\Gamma_{f^t}$  для потока Морса  $f^t$  – это двуцветный граф Вонга без ориентации на рёбрах, но с описанным выше разбиением на пары всех рёбер.

В качестве основного результата работы доказываем, что такой граф является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях, а не только на ориентируемых.

## 2. Формулировка результатов

**Определение 2.1** (см., например, [2]). Поток  $f^t$  называется потоком Морса-Смейла, если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, инвариантные многообразия которых пересекаются друг с другом только трансверсально.

Для потока на поверхности последнее условие означает отсутствие траекторий, соединяющих седловые точки.

**Определение 2.2** (см., например, [5]). Поток Морса-Смейла без периодических траекторий называется потоком Морса или градиентно-подобным потоком.

**Определение 2.3** (см., например, [5]). Потоки  $f^t, f^{t'}: M \rightarrow M$  на многообразии  $M$  называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow M$ , отображающий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f^{t'}$  с сохранением направления движения по траекториям.

**Определение 2.4** (см., например, [9]). Два потока называются топологически сопряжёнными, если выполняется условие  $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$ , это означает, что  $h$  отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

**Предложение 2.1** ([10], теорема 1; [11], теорема 7). Градиентно-подобные потоки на замкнутой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны.

**Предложение 2.2** ([12], гл. 2, теорема 5.1; [9], гл. 4, теорема 7.1). Пусть  $p$  – неподвижная гиперболическая точка потока  $f^t: S \rightarrow S$ . Тогда существует окрестность  $U_p \subset S$  точки  $p$  и гомеоморфизм на образ  $\eta_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^2$  такой, что поток  $f^t|_{U_p}$  топологически сопряжён с одним из следующих потоков:

$$a_0^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^{-t}y), \quad (2.1)$$

$$a_1^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^t y), \quad (2.2)$$

$$a_2^t(x, y) = (2^t x, 2^t y), \quad (2.3)$$

то есть  $\eta_p \circ f^t|_{U_p} = a_{i_p}^t \circ \eta_p|_{U_p}$ ,  $i_p \in \{0, 1, 2\}$  для любого  $t$ , не выводящего точки за пределы  $U_p$ . Окрестность  $U_p$  и гомеоморфизм  $\eta_p$  будем называть линейризующими. В случае  $i_p = 0, 1, 2$  неподвижная точка  $p$  называется стоком, седлом, источником соответственно.

Напомним, что конечным графом  $\Gamma$  называется упорядоченная пара  $(B, E)$ , для которой выполнены следующие условия:  $B$  – непустое множество вершин;  $E$  – множество рёбер, каждое из которых соединяет некоторую пару вершин из множества  $B$ .

Каждую из вершин  $a, b$ , которые соединяет ребро  $ab$ , называют инцидентной ребру  $ab$ . Валентностью вершины называется число инцидентных ей рёбер. Граф, рёбра которого соединяют упорядоченные пары вершин, называется ориентированным. Граф называется связным, если любые две его вершины  $b_0, b_k$  можно соединить путём, то есть последовательностью  $b_0, b_0b_1, b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k-1}b_k, b_k$ , при этом  $k$  – длина пути. Если начало и конец пути совпадают, то путь называют циклом. Если обе вершины ребра

совпадают, то ребро называется *петлёй*. *Подграфом* графа  $\Gamma$  называется пара множеств  $(\tilde{B}, \tilde{E})$ , где  $\tilde{B} \subset B, \tilde{E} \subset E$ .

Два графа  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  называются *изоморфными*, если существует отображение, переводящее вершины и рёбра графа  $\Gamma$  в вершины и рёбра графа  $\Gamma'$  соответственно, с сохранением, при наличии, цветов, направлений и оснащений.

Будем обозначать через  $\Omega_{ft}^0, \Omega_{ft}^1, \Omega_{ft}^2$  множества всех стоков, седёл, источников потока  $f^t$  соответственно.

Рассмотрим множество

$$\tilde{S} = S \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_{ft}^1} (cl(W_\sigma^u) \cup cl(W_\sigma^s)).$$

Замыкание любой его компоненты связности называется *ячейкой*. Согласно [5], все ячейки градиентно-подобных потоков могут быть только трёх типов (Рис. 2.1).

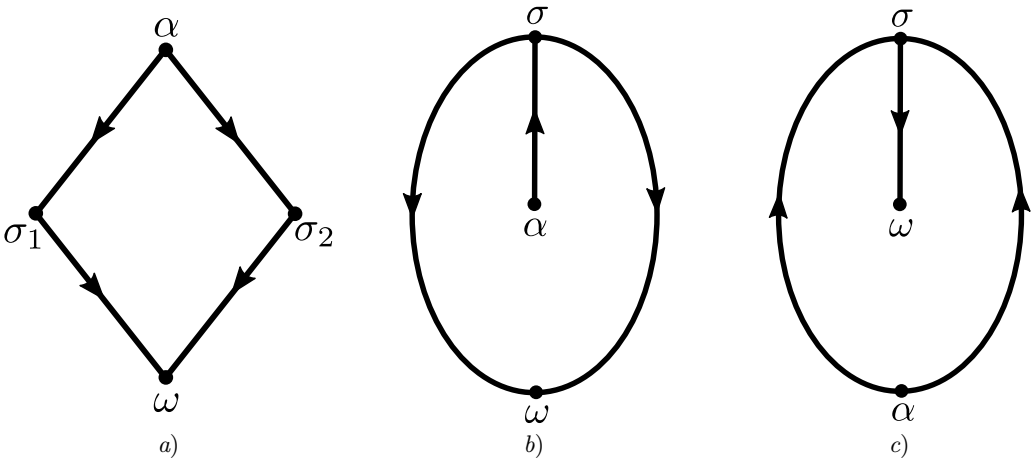
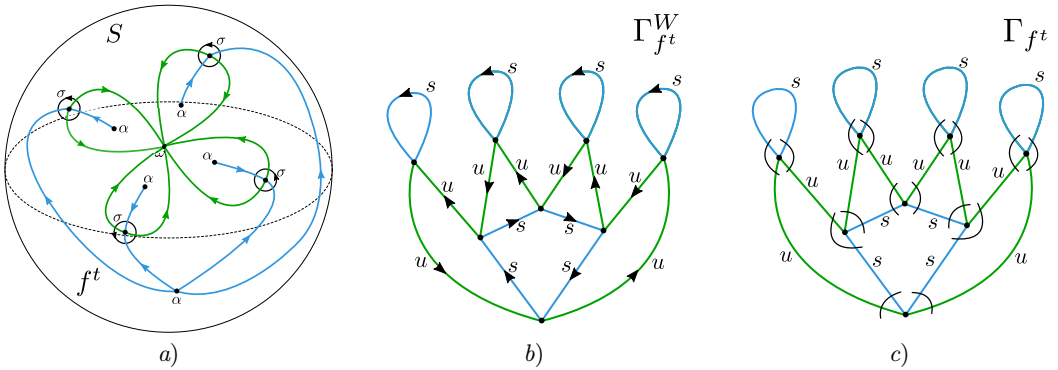


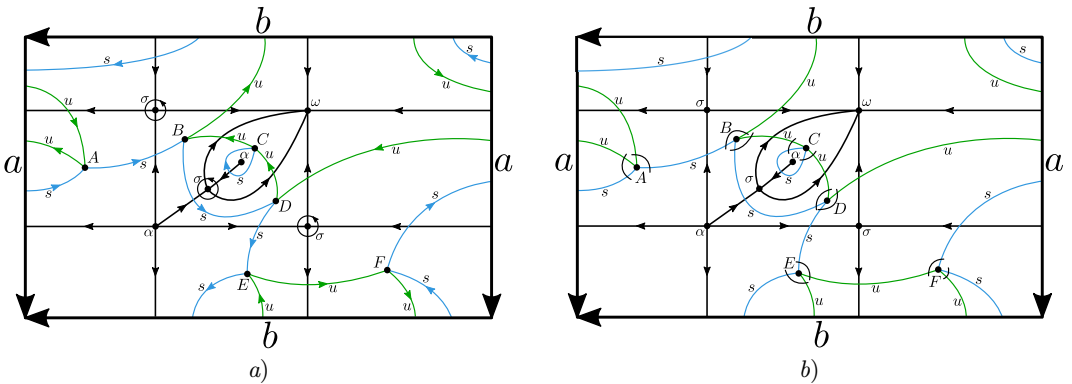
Рис. 2.1. Три типа ячеек градиентно-подобного потока на поверхностях:  
а) тип 1; б) тип 2; в) тип 3

Fig 2.1. Three types of gradient-like flow's cells on surfaces:  
а) Type 1; б) Type 2; в) Type 3

Пусть  $f^t: S \rightarrow S$  – градиентно-подобный поток, заданный на поверхности  $S$ . Граф Вонга  $\Gamma_{ft}^W$  для такого потока на ориентируемой поверхности  $S$  – это двуцветный ориентированный граф: вершины такого графа соответствуют ячейкам потока  $f^t$ , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по сепаратрисам, соответствующим рёбрам. Ребру присваивается цвет  $u$ , если оно соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, и цвет  $s$ , если устойчивой седловой сепаратрисе. Заметим, что если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой сепаратрисе соответствует петля на графе. Таким образом, каждая вершина имеет валентность 4, если принять петлю за два условных ребра. Также на всех  $s$ - и  $u$ -рёбрах графа  $\Gamma_{ft}^W$  задаётся ориентация, индуцированная выбором ориентации на несущем многообразии  $S$ , такая, что ориентация рёбер на всех  $su$ -циклах задаёт согласованную ориентацию на каждом одноцветном цикле (см. Рис. 2.2, Рис. 2.3).



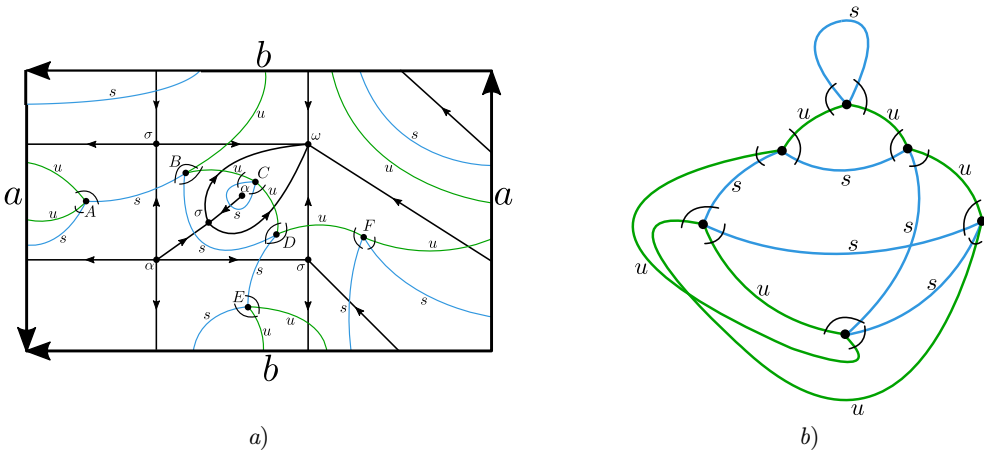
**Рис. 2.2.** Графы потока  $f^t$  на сфере: а) фазовый портрет потока  $f^t$ ; б) граф Вонга  $\Gamma_{f^t}^W$ ; в) обобщённый граф Вонга  $\Gamma_{f^t}$   
**Fig 2.2.** Graphs for a flow  $f^t$  on the sphere: а) phase portrait for a flow  $f^t$ ; б) Wang's graph  $\Gamma_{f^t}^W$ ; в) generalised Wang's graph  $\Gamma_{f^t}$



**Рис. 2.3.** Графы  $\Gamma_{f^t}^W$  и  $\Gamma_{f^t}$  (нарисованные в цвете) для потока  $f^t$  (фазовый портрет нарисован чёрным) на торе: а) граф  $\Gamma_{f^t}^W$ ; б) граф  $\Gamma_{f^t}$   
**Fig 2.3.** Graphs  $\Gamma_{f^t}^W$  and  $\Gamma_{f^t}$  painted in colour for a flow  $f^t$  painted in black // on the torus: а) graph  $\Gamma_{f^t}^W$ ; б) graph  $\Gamma_{f^t}$

Обобщённым графом Вонга для градиентно-подобного потока  $f^t$  назовём граф  $\Gamma_{f^t}$ . Вершины обобщённого графа Вонга  $\Gamma_{f^t}$  соответствуют ячейкам потока  $f^t$ , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим рёбрам сепаратрисам. Ребро окрашивается в цвет  $u$ , если соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе или  $u$ -кривой, и в цвет  $s$ , если соответствует устойчивой седловой сепаратрисе или  $s$ -кривой. При этом, если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой ячейке и этой сепаратрисе соответствует вершина графа с петлёй. Другими словами, каждая вершина имеет валентность 4, если принять петлю за два условных ребра. Набор этих четырех рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе ячейки, соответствующей вершине. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра

пары (см. Рис. 2.2, Рис. 2.3, Рис. 2.4).



**Рис. 2.4.** Граф  $\Gamma_{f^t}$  для потока  $f^t$  на бутылке Клейна: а) граф, нарисованный цветным, поверх фазового портрета потока, нарисованного чёрным; б) граф  $\Gamma_{f^t}$  в чистом виде

**Fig 2.4.** Graph  $\Gamma_{f^t}$  for a flow  $f^t$  on the Klein bottle: а) graph  $\Gamma_{f^t}$  painted in colour with a flow  $f^t$  painted in black; б) only graph  $\Gamma_{f^t}$

Назовём  $su$ -циклом цикл на графе  $\Gamma_{f^t}$ , состоящий из чередующихся рёбер цветов  $s$  и  $u$ , каждое из которых объединено в пару с каждым из соседних с ним в цикле рёбер. Назовём  $s$ -циклом,  $u$ -циклом цикл на графе  $\Gamma_{f^t}$ , состоящий лишь из рёбер цветов  $s$ ,  $u$  соответственно.

Два обобщённых графа Вонга  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f^{tt}}$ , соответствующих потокам  $f^t$  и  $f^{tt}$  соответственно, назовём изоморфными, если существует взаимное однозначное отображение  $\psi$  вершин и рёбер одного графа соответственно в вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности и разбиения на пары всех рёбер.

Обозначим через  $\pi_{f^t}$  взаимно-однозначное соответствие между потоком  $f^t$  и графом  $\Gamma_{f^t}$ .

**Теорема 2.1.** *Градиентно-подобные потоки  $f^t, f^{tt} : S \rightarrow S$  на произвольных поверхностях топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их обобщённые графы Вонга  $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{tt}}$  изоморфны.*

**Теорема 2.2.** *Для любого допустимого графа  $\Gamma$  существует градиентно-подобный поток  $f^t$ , заданный на замкнутой поверхности  $S$ , граф которого изоморфен исходному графу, при этом:*

i) эйлерова характеристика поверхности  $S$  вычисляется по формуле

$$\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2, \tag{2.4}$$

где  $\nu_0, \nu_1$  и  $\nu_2$  – число всех  $u$ -,  $su$ - и  $s$ - циклов графа  $\Gamma_{f^t}$  соответственно;

ii) поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma_{f^t}$  содержит хотя бы один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.



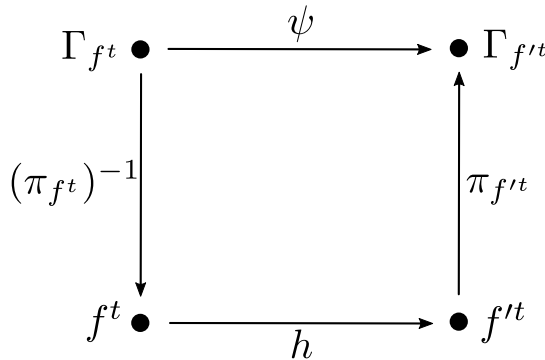
### 3. Доказательство классификационного результата

#### 3.1. Доказательство теоремы 1.1.

Докажем теорему 2.1, частично следуя конструкции из работы [13].

**Необходимость.**

Пусть потоки  $f^t$  и  $f'^t$  топологически сопряжены, тогда эти потоки топологически эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм  $h : S \rightarrow S$ , переводящий траектории потока  $f^t$  в траектории потока  $f'^t$ . Тогда гомеоморфизм  $h$  переводит ячейки потока  $f^t$  в ячейки потока  $f'^t$ , седловые сепаратрисы – в седловые сепаратрисы с сохранением устойчивости и порядка в границе ячейки, и искомый изоморфизм  $\psi : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f'^t}$  определяется формулой  $\psi = \pi_{f'^t} h (\pi_{f^t})^{-1}$  (см. Рис. 3.1)



**Рис. 3.1.** Диаграмма отображений  
**Fig. 3.1.** Diagram of mappings

**Достаточность.**

Пусть графы  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f'^t}$  потоков  $f^t$  и  $f'^t$  изоморфны посредством  $\psi$ . Рассмотрим ячейку  $J \in J_{f^t}$ . Её граница содержит единственный источник  $\alpha$ , единственный сток  $\omega$  и либо пару седел  $\sigma_1, \sigma_2$ , либо одно седло  $\sigma_3(\sigma_4)$ , в зависимости от типа ячейки. Рассмотрим ячейку  $J'$  потока  $f'^t$ , для которой выполняется равенство

$$J' = (\pi_{f'^t})^{-1} \psi \pi_{f^t}(J).$$

Изоморфизм  $\psi$  обеспечивает одинаковое количество одноцветных простых рёбер и петель, исходящих из вершин графов  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f'^t}$ , соответствующих ячейкам  $J$  и  $J'$ , что означает наличие в границе у  $J'$  ровно одного стока  $\omega'$ , одного источника  $\alpha'$  и либо пары седел  $\sigma'_1, \sigma'_2$ , либо одного седла  $\sigma'_3(\sigma'_4)$ , а также сохранение её типа, и как следствие, количества седел в её границе. Заметим, что, благодаря дугам на графе, осуществляющим разбиение на пары всех рёбер, две сепаратрисы одного типа, соответствующие двум рёбрам одного цвета, входящим в разные пары, при гомеоморфизме не меняются местами.

Поскольку изоморфизм  $\psi$  сохраняет цветность и разбиение на пары всех рёбер, то построение гомеоморфизма  $h : S \rightarrow S$ , осуществляющего топологическую эквивалентность потоков  $f^t$  и  $f'^t$ , сводится к построению гомеоморфизма  $h_J : cl(J) \rightarrow cl(J')$ , переводящего траектории потока  $f^t$ , лежащие в  $cl(J)$ , в траектории потока  $f'^t$ , лежащие

в  $cl(J')$ , таким образом, что

$$h_J|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})} = h_{\tilde{J}}|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})}$$

для любых ячеек  $J, \tilde{J}$  потока  $f^t$ . Для этого построим замкнутые кривые  $\zeta_\alpha, \zeta_\omega$ , ограничивающие попарно непересекающиеся окрестности  $U_\alpha \ni \alpha, U_\omega \ni \omega$  и заданные формулами  $\zeta_\alpha = \eta_\alpha^{-1}(\zeta_0^{\tau_*})$ , и  $\zeta_\omega = \eta_\omega^{-1}(\zeta_0^{\tau_*})$ , при  $\tau_* \in (0, 1]$ , где  $\zeta_0^\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \tau^2\}$ . Также положим  $\zeta_\alpha^\tau = \eta_\alpha^{-1}(\zeta_0^\tau)$ , и  $\zeta_\omega^\tau = \eta_\omega^{-1}(\zeta_0^\tau)$ , при  $\tau \in (0, \tau_*]$ .

Обозначим через  $l_{\alpha, \sigma_1}, l_{\alpha, \sigma_2}$  и  $l_{\sigma_1, \omega}, l_{\sigma_2, \omega}$  соответственно устойчивые и неустойчивые сепаратрисы на границе ячейки  $J$  первого типа и через  $l_{\alpha, \sigma_3}(l_{\sigma_4, \alpha}, l_{\alpha, \sigma_4})$  и  $l_{\sigma_3, \omega}, l_{\omega, \sigma_3}(l_{\sigma_4, \omega})$  соответственно устойчивые и неустойчивые сепаратрисы на границе ячейки  $J$  второго (третьего) типа. Положим  $\{A\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_2, \omega}, \{A_0\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_1, \omega}, \{C\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_2}, \{C_0\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_1}, \{D\} = \zeta_\omega \cap l_{\omega, \sigma_3}, \{D_0\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_3, \omega}, \{F\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_3}, \{G\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_4, \omega}, \{I\} = \zeta_\alpha \cap l_{\sigma_4, \alpha}, \{I_0\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_4}$  (см. Рис. 3.2 и Рис. 3.6).

Везде далее мы будем использовать следующие обозначения:

- $\mathcal{O}_z$  – траектория точки  $z \in cl(J)$ ;
- $m_{a,b}$  – замыкание отрезка некоторой секущей к траекториям потока  $f^t|_{cl(J)}$ , ограниченного точками  $a$  и  $b$ ;
- $m_a$  – частный случай  $m_{a,b}$ , где  $a = b$ ;
- $l_{a,b}$  – отрезок траектории, ограниченный точками  $a$  и  $b$ , и  $\lambda_{a,b}$  – его длина;
- $h_{\{a,b\}, \{c,d\}} : l_{a,b} \rightarrow l_{c,d}$  – гомеоморфизм по длине дуги, то есть гомеоморфизм, определённый формулой

$$h_{\{a,b\}, \{c,d\}}(z) = p, z \in l_{a,b}, p \in l_{c,d}, \text{ где } \lambda_{c,p} = \frac{\lambda_{a,z} \cdot \lambda_{c,d}}{\lambda_{a,b}}.$$

Введем аналогичные обозначения со штрихом для соответствующих объектов ячейки  $J'$ , полагая  $t'_* = t_*$ , и далее будем строить гомеоморфизм  $h_J$  для ячейки первого типа по шагам.

**I.** Построим гомеоморфизм в ячейке типа 1.

**Шаг 1.** Построим  $h_J$  в окрестностях узловых точек.

Пусть  $h_{m_{A,A_0}} : m_{A,A_0} \rightarrow m_{A',A'_0}$  – произвольный гомеоморфизм. Для  $z \in m_{A,A_0}$  и  $\tau \in (0, \tau_*]$  положим  $z_\tau = \zeta_\omega^\tau \cap \mathcal{O}_z$ . Положим  $z' = h_{m_{A,A_0}}(z)$  и  $z'_\tau = \zeta_{\omega'}^\tau \cap \mathcal{O}_{z'}$ . Определим гомеоморфизм  $h_{U_\omega} : cl(U_\omega) \cap J \rightarrow cl(U_{\omega'}) \cap J'$  так, что  $h_{U_\omega}(\omega) = \omega'$  и  $h_{U_\omega}(z_\tau) = z'_\tau$ .

Аналогично строится гомеоморфизм  $h_{U_\alpha} : cl(U_\alpha) \cap J \rightarrow cl(U_{\alpha'}) \cap J'$ , при условии, что  $h_{m_{C,C_0}}(m_{C,C_0} \cap \mathcal{O}_z) = m_{C',C'_0} \cap \mathcal{O}_{z'}$ .

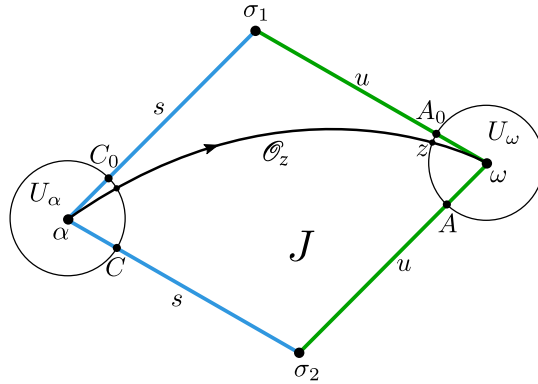
**Шаг 2.** Построим  $h_J$  на границе  $J$ . Для этого построим следующие гомеоморфизмы по длине дуги:  $h_{[A_0, \sigma_1], [A'_0, \sigma'_1]} : l_{A_0, \sigma_1} \rightarrow l_{A'_0, \sigma'_1}, h_{[C_0, \sigma_1], [C'_0, \sigma'_1]} : l_{C_0, \sigma_1} \rightarrow l_{C'_0, \sigma'_1}, h_{[A, \sigma_2], [A', \sigma'_2]} : l_{A, \sigma_2} \rightarrow l_{A', \sigma'_2}, h_{[C, \sigma_2], [C', \sigma'_2]} : l_{C, \sigma_2} \rightarrow l_{C', \sigma'_2}$ .

Аналогичная конструкция на сепаратрисах в границах замыканий всех ячеек обеспечивает выполнение условия  $h_J|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})} = h_{\tilde{J}}|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})}$  для любых  $J, \tilde{J}$ .

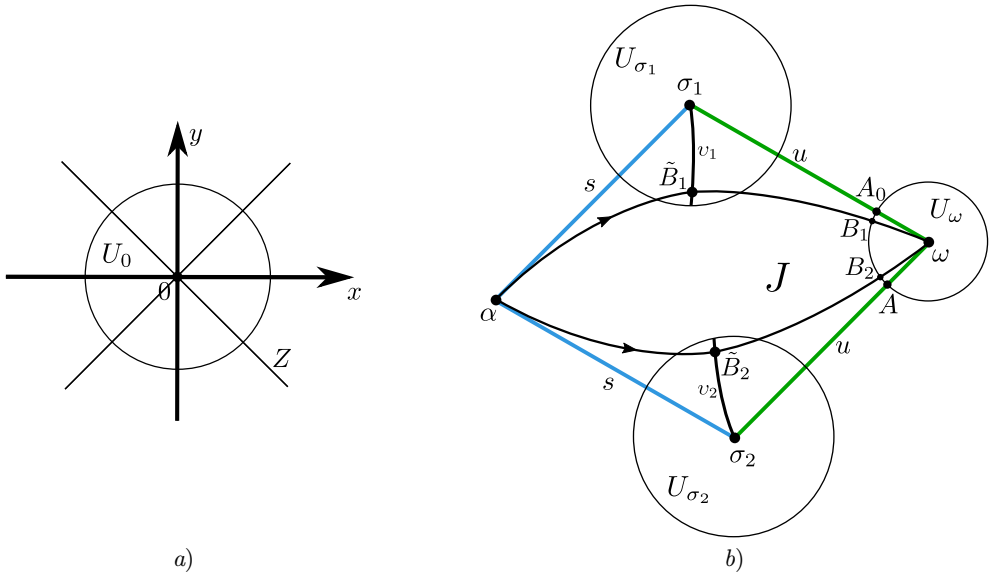
**Шаг 3.** Построим секущую, граничными точками которой являются седла  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Определим секущую  $m_{\sigma_2, \sigma_1}(m_{\sigma'_2, \sigma'_1})$  следующим образом. Пусть

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}.$$



**Рис. 3.2.** Шаги 1-2 построения гомеоморфизма  $h_J$  для ячейки первого типа  
**Fig. 3.2.** Steps 1-2 of constructing the homeomorphism  $h_J$  for a cell of the first type



**Рис. 3.3.** Начало построения секущей: а) множество  $Z$  в окрестности  $U_0$ ;  
 б) построение  $v_i$  с помощью множества  $Z$   
**Fig 3.3.** Beginning of construction a secant: а) set  $Z$  in the neighbourhood  $U_0$  ;  
 б) constructing  $v_i$  by means of  $Z$

Множество  $Z$  состоит из двух прямых, пересекающихся в начале координат и трансверсальных траекториям потока  $a_1^t$  (Предложение 2.2). Пусть  $v_i = \eta_{\sigma_i}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(v_i' = \eta_{\sigma_i}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$  (см. Рис. 3.3). Выберем некоторую пару точек  $B_1, B_2 \in m_{A, A_0}$ , такую что  $m_{B_1, A_0} \cap m_{B_2, A} = \emptyset, \mathcal{O}_{B_i} \cap v_i \neq \emptyset (m_{B_1', A_0'} \cap m_{B_2', A'} = \emptyset, \mathcal{O}_{B_i'} \cap v_i' \neq \emptyset)$  и  $B_i' = h_{A, A_0}(B_i), i \in \{1, 2\}$ . Пусть  $\{\tilde{B}_i\} = \mathcal{O}_{B_i} \cap v_i$  (см. Рис. 3.4). Обозначим через  $m_{\tilde{B}_i, \sigma_i}$  подмножество  $v_i$ , ограниченное точками  $\tilde{B}_i$  и  $\sigma_i$ . Пусть  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ , такие что  $\tilde{B}_2 = f^{t_0}(B_2)$  и  $\tilde{B}_1 = f^{t_1}(B_1)$ . Поскольку секущая  $m_{B_2, B_1}$  гомеоморфна отрезку  $[0, 1]$ ,

то точки  $z \in m_{B_2, B_1}$  будем считать параметризованными:  $z = z(s), s \in [0, 1]$  так, что  $z(0) = \tilde{B}_2$ . Положим  $t_s = st_1 + (1 - s)t_0$  и

$$m_{\tilde{B}_2, \tilde{B}_1} = \{f^{t_s}(z(s)), z(s) \in m_{B_2, B_1}\}.$$

Тогда  $m_{\sigma_2, \sigma_1} = m_{\sigma_2, \tilde{B}_2} \cup m_{\tilde{B}_2, \tilde{B}_1} \cup m_{\tilde{B}_1, \sigma_1}$  – секущая к траекториям потока в  $\text{int}(J)$  (Рис. 3.4). Аналогично определяются  $m_{\sigma'_2, \tilde{B}'_2}, m_{\tilde{B}'_2, \tilde{B}'_1}$  и  $m_{\tilde{B}'_1, \sigma'_1}$ .

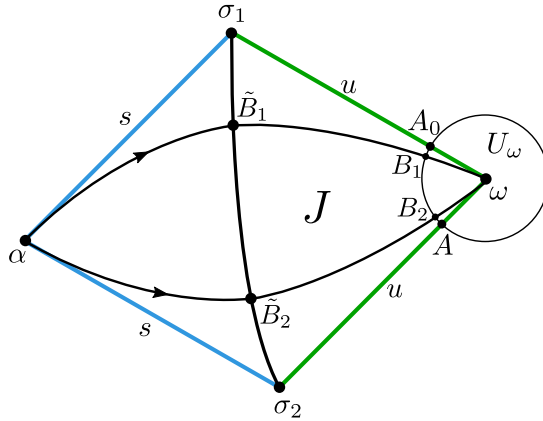


Рис. 3.4. Построение секущей  
Fig. 3.4. Constructing a secant

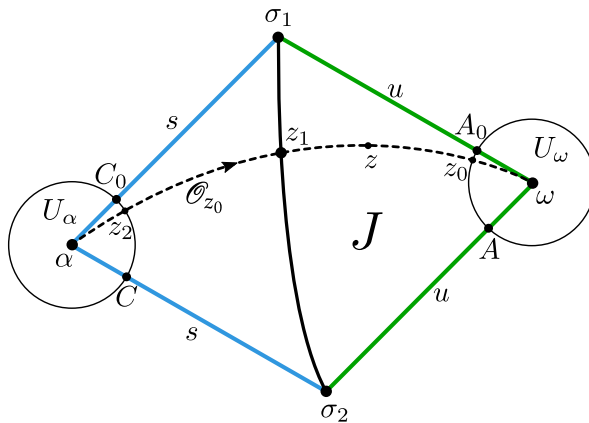
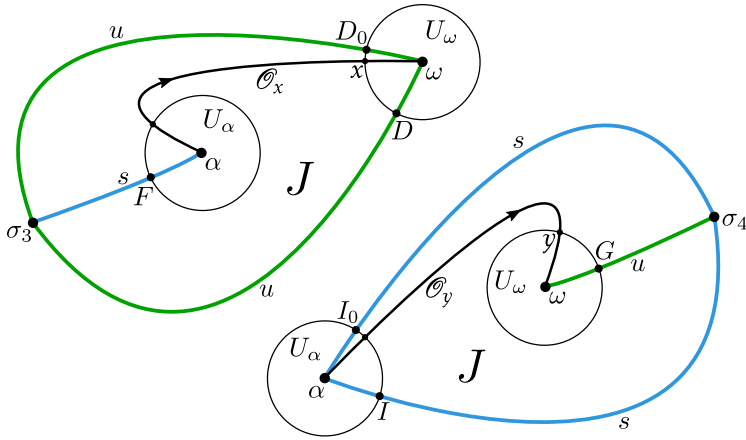


Рис. 3.5. Продолжение гомеоморфизма  $h_J$  внутрь ячейки  $J$  типа 1  
Fig. 3.5. Extending the homeomorphism  $h_J$  inside a cell  $J$  of type 1

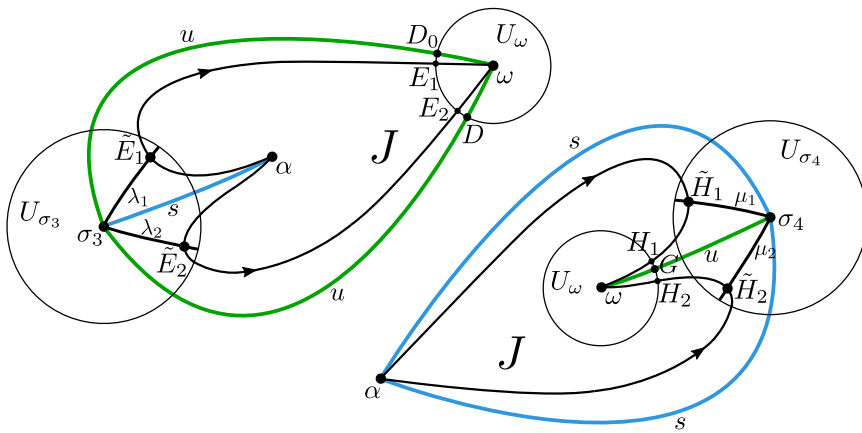
**Шаг 4.** Продолжим  $h_J$  внутрь  $J$ . Пусть  $z_0 \in m_{A, A_0}, z'_0 = h_{m_{A, A_0}}(z_0)$ . Положим  $\{z_1\} = \mathcal{O}_{z_0} \cap m_{\sigma_2, \sigma_1}, \{z'_1\} = \mathcal{O}_{z'_0} \cap m_{\sigma'_2, \sigma'_1}, \{z_2\} = \mathcal{O}_{z_0} \cap m_{C, C_0}, \{z'_2\} = \mathcal{O}_{z'_0} \cap m_{C', C'_0}$  (Рис. 3.5). Положим  $h_J|_{I_{z_{i-1}, z_i}} = h_{[z_{i-1}, z_i], [z'_{i-1}, z'_i]}$ , где  $i \in \{1, 2\}$ .

**II.** Построим гомеоморфизм  $h_J$  в ячейках типа 2 и 3.

Шаги 1 и 2 проводятся аналогично шагам 1 и 2 для ячейки первого типа (см. Рис. 3.6).



**Рис. 3.6.** Шаги 1-2 построения гомеоморфизма  $h_J$  для ячеек второго и третьего типов  
**Fig. 3.6.** Steps 1-2 of constructing the homeomorphism  $h_J$  for cells of the second and third types



**Рис. 3.7.** Начало построения секущей. Построение  $\lambda_{1,2}, \mu_{1,2}$ .  
**Fig. 3.7.** The beginning of a secant design. Constructing  $\lambda_{1,2}, \mu_{1,2}$

**Шаг 3.** Построим секущую, граничной точкой которой является седловая точка  $\sigma_3(\sigma_4)$ .

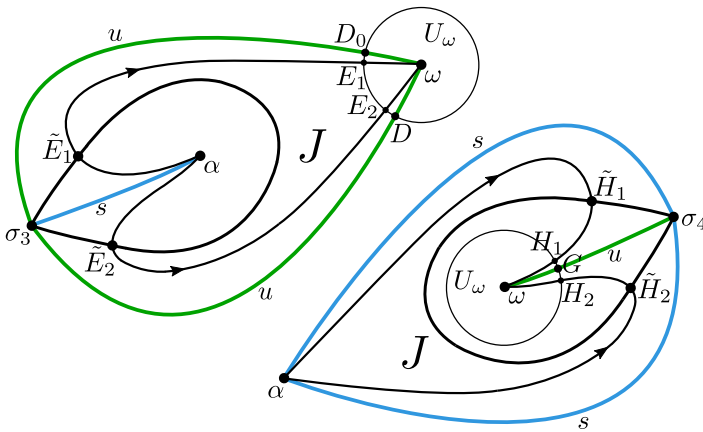
Определим секущую  $m_{\sigma_3}(m_{\sigma'_3})(m_{\sigma_4}(m_{\sigma'_4}))$  следующим образом.

Пусть  $\lambda_i = \eta_{\sigma_3}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(\lambda'_i = \eta_{\sigma'_3}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$  и  $\mu_i = \eta_{\sigma_4}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(\mu'_i = \eta_{\sigma'_4}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$  (Рис. 3.7). Выберем некоторую пару точек  $E_1, E_2 \in m_{D, D_0}(H_1, H_2 \in m_G)$ , такую что  $\mathcal{O}_{E_i} \cap \lambda_i \neq \emptyset$  ( $\mathcal{O}_{E'_i} \cap \lambda'_i \neq \emptyset$ ) ( $\mathcal{O}_{H_i} \cap \mu_i \neq \emptyset$ ) ( $\mathcal{O}_{H'_i} \cap \mu'_i \neq \emptyset$ ) и  $E'_i =$

$h_{D,D_0}(E_i)(H'_i = h_G(H_i)), i \in \{1, 2\}$ . Пусть  $\{\tilde{E}_i\} = \mathcal{O}_{E_i} \cap \lambda_i(\{\tilde{H}_i\} = \mathcal{O}_{H_i} \cap \mu_i)$  (см. Рис. 3.8). Обозначим через  $m_{\tilde{E}_i, \sigma_3}(m_{\tilde{H}_i, \sigma_4})$  подмножество  $\lambda_i(\mu_i)$ , ограниченное точками  $\tilde{E}_i(\tilde{H}_i)$  и  $\sigma_3(\sigma_4)$ . Пусть  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ , такие что  $\tilde{E}_2 = f^{t_0}(E_2)(\tilde{H}_2 = f^{t_0}(H_2))$  и  $\tilde{E}_1 = f^{t_1}(E_1)(\tilde{H}_1 = f^{t_1}(H_1))$ . Поскольку секущая  $m_{E_2, E_1}(m_{H_2, H_1})$  гомеоморфна отрезку  $[0, 1]$ , то точки  $x \in m_{E_2, E_1}(y \in m_{H_2, H_1})$  будем считать параметризованными:  $x = x(s)(y = y(s)), s \in [0, 1]$  так, что  $x(0) = \tilde{E}_2(y(0) = \tilde{H}_2)$ . Положим  $t_s = st_1 + (1 - s)t_0$  и

$$m_{\tilde{E}_2, \tilde{E}_1} = \{f^{t_s}(x(s)), x(s) \in m_{E_2, E_1}\}(m_{\tilde{H}_2, \tilde{H}_1} = \{f^{t_s}(y(s)), y(s) \in m_{H_2, H_1}\}).$$

Тогда  $m_{\sigma_3} = m_{\sigma_3, \tilde{E}_2} \cup m_{\tilde{E}_2, \tilde{E}_1} \cup m_{\tilde{E}_1, \sigma_3}(m_{\sigma_4} = m_{\sigma_4, \tilde{H}_2} \cup m_{\tilde{H}_2, \tilde{H}_1} \cup m_{\tilde{H}_1, \sigma_4})$  – секущая к траекториям потока в  $int(J)$  (см. Рис. 3.8). Аналогично определяются  $m_{\sigma'_3, \tilde{E}'_2}, m_{\tilde{E}'_2, \tilde{E}'_1}$  и  $m_{\tilde{E}'_1, \sigma'_3}(m_{\sigma'_4, \tilde{H}'_2}, m_{\tilde{H}'_2, \tilde{H}'_1}$  и  $m_{\tilde{H}'_1, \sigma'_4}$ .

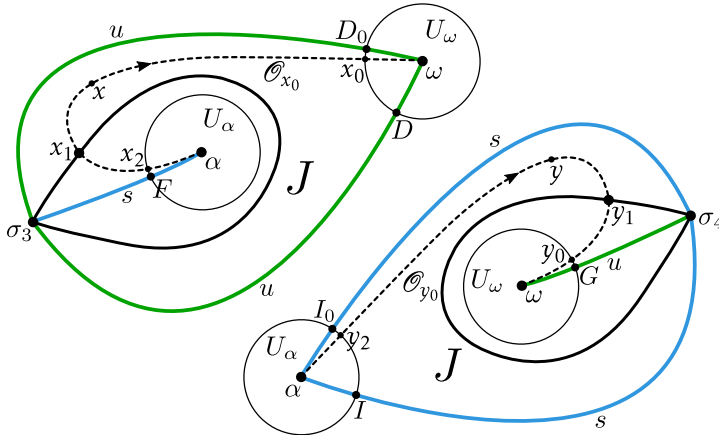


**Рис. 3.8.** Построение секущей  
**Fig. 3.8.** Constructing a secant

**Шаг 4.** Продолжим  $h_J$  внутрь  $J$ .

Пусть  $x_0 \in m_{D,D_0}, x'_0 = h_{m_{D,D_0}}(x_0)(y_0 \in m_G, y'_0 = h_{m_G}(y_0))$ . Положим  $\{x_1\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_{\sigma_3}(\{y_1\} = \mathcal{O}_{y_0} \cap m_{\sigma_4}), \{x'_1\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{\sigma'_3}(\{y'_1\} = \mathcal{O}_{y'_0} \cap m_{\sigma'_4}), \{x_2\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_F(\{y_2\} = \mathcal{O}_{y_0} \cap m_{I,I_0}), \{x'_2\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{F'}(\{y'_2\} = \mathcal{O}_{y'_0} \cap m_{I',I'_0})$  (Рис. 3.9). Положим  $h_J|_{l_{x_{i-1}, x_i}} = h_{[x_{i-1}, x_i], [x'_{i-1}, x'_i]}(h_J|_{l_{y_{i-1}, y_i}} = h_{[y_{i-1}, y_i], [y'_{i-1}, y'_i]})$ , где  $i \in \{1, 2\}$ .

Таким образом, мы отобразили посредством гомеоморфизма  $h_J$  замыкание ячейки  $J$  на замыкание ячейки  $J'$ . Из этого следует топологическая эквивалентность потоков  $f^t$  и  $f'^t$  и, как следствие, их топологическая сопряжённость (Предложение 2.1). Теорема доказана.



**Рис. 3.9.** Продолжение гомеоморфизма  $h_J$  внутрь ячейки  $J$  типов 2 и 3  
**Fig. 3.9.** Extending the homeomorphism  $h_J$  inside a cell  $J$  of types 2 and 3

#### 4. Реализация обобщённого графа Вонга

Пусть  $f^t$  – градиентно-подобный поток, заданный на поверхности  $S$ . Напомним, что ячейкой  $J$  потока  $f^t$  называется компонента связности множества  $\tilde{S} = S \setminus (W_{f^t}^u \cup W_{f^t}^s \cup W_{f^t}^t)$ . Обозначим через  $J_{f^t}$  множество всех ячеек потока  $f^t$  и выберем по одной траектории  $\theta_J$  ( $t$ -кривой) в каждой ячейке  $J \in J_{f^t}$ . Положим  $\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{S}} \theta_J$ ,  $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$ .

Назовём  $u$ -кривыми неустойчивые седловые сепаратрисы и  $s$ -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы.

Из работы [5] следует, что каждая компонента связности  $\Delta$  множества  $\bar{S}$  является криволинейным треугольником, ограниченным одной  $s$ -, одной  $u$ - и одной  $t$ -кривой, в следствии чего мы будем называть  $\Delta$  *треугольной областью*.

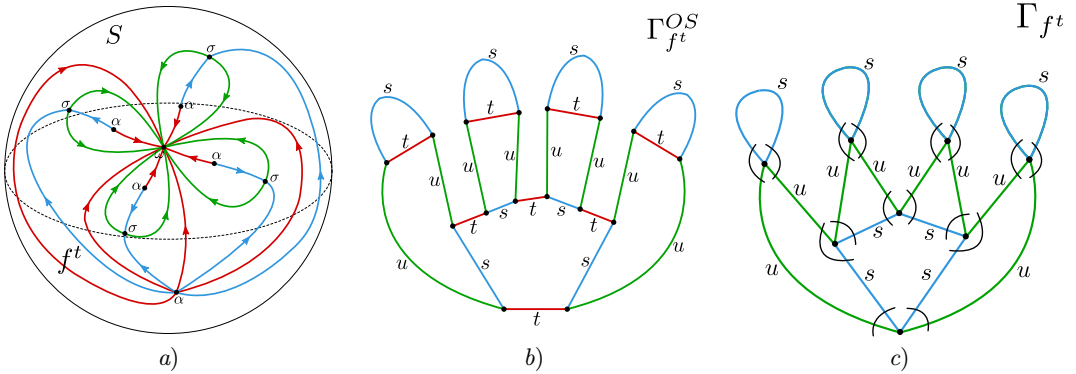
*Трёхцветный граф*  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  *Ошемкова-Шарко* из работы [14], соответствующий градиентно-подобному потоку  $f^t$ , строится следующим образом (см. Рис. 4.1):

- 1) вершины графа  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s, t, u$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ -сторону, а между этим ребром и  $s$ -,  $t$ -,  $u$ -кривой устанавливается взаимно однозначное соответствие.

**Предложение 4.1** ([14], п. 2, теорема 1.12). *Пусть  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  - трёхцветный граф градиентно-подобного потока  $f^t$ , заданного на поверхности  $S$ . Тогда поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma_{f^t}^{OS}$  содержит хотя бы один цикл нечётной длины.*

##### 4.1. Допустимый граф

Конечный связный двухцветный граф  $\Gamma$  с дугами между парами рёбер, находящихся в паре, описанных выше, назовём *допустимым*, если он содержит  $su$ -циклы и каждый



**Рис. 4.1.** Графы потока  $f^t$  на сфере: а) фазовый портрет потока  $f^t$ ; б) трёхцветный граф Ошемкова-Шарко  $\Gamma_{f^t}^{OS}$ ; в) обобщённый граф Вонга  $\Gamma_{f^t}$   
**Fig 4.1.** Graphs for a flow  $f^t$  on the sphere: а) phase portrait for a flow  $f^t$ ; б) three-colour Oshemkov-Sharko's graph  $\Gamma_{f^t}^{OS}$ ; в) generalised Wang's graph  $\Gamma_{f^t}$

такой цикл имеет длину 4.

Цикл графа  $\Gamma$  назовём  $s$ -циклом ( $u$ -циклом), если все его рёбра имеют цвет  $s$  ( $u$ ).

**Л е м м а 4.1.** *Граф  $\Gamma_{f^t}$  является допустимым.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При доказательстве будем следовать конструкциям из [14–13].

Поскольку поток  $f^t$  лежит на замкнутой поверхности  $S$ , а каждая вершина графа соответствует его ячейке, значит, можно построить граф, изоморфный данному, просто расположив его вершины внутри ячеек, а рёбрами сделав вложенные в поверхность кривые, соединяющие эти вершины и пересекающие каждая свою цветную кривую единственный раз. Как граф, построенный по потоку  $f^t$ , он очевидно будет изоморфен графу  $\Gamma_{f^t}$ . Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что граф  $\Gamma_{f^t}$  вложен в поверхность  $S$  вышеописанным образом. Поскольку поверхность  $S$  связна, то связан и граф  $\Gamma_{f^t}$ .

Поскольку к каждой точке  $p \in \Omega_{f^t}$  примыкает конечное число ячеек, разделенных сепаратрисами, то точке  $p$  посредством отображения  $\pi_{f^t}$  однозначно соответствует цикл из вершин, соответствующих примыкающим к  $p$  ячейкам, и цветных рёбер, пересекающих сепаратрисы, выходящие из  $p$ . Так, если к седлу примыкают либо в точности четыре ячейки первого типа, либо две ячейки первого типа и одна второго (третьего) типа, либо две ячейки второго (третьего) типа, все разделены  $u$ - и  $s$ -кривыми, то каждому седлу потока  $f^t$  соответствует  $su$ -цикл графа  $\Gamma_{f^t}$ , а именно цикл из четырёх обычных рёбер, трёх обычных и одного условного ребра, двух обычных и двух условных рёбер, в первом, втором и третьем случаях соответственно. Справедливо и обратное соответствие: каждый  $su$ -цикл можно поместить в окрестность единственной седловой точки так, что для разных  $su$ -циклов эти окрестности не пересекаются. Таким образом, граф  $\Gamma_{f^t}$  содержит  $su$ -циклы, и каждый такой цикл имеет длину 4. Следовательно, граф  $\Gamma_{f^t}$  является допустимым.

**Л е м м а 4.2.** *Отображение  $\pi_{f^t}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  и множествами  $s$ -,  $su$ -,  $u$ -циклов соответственно.*



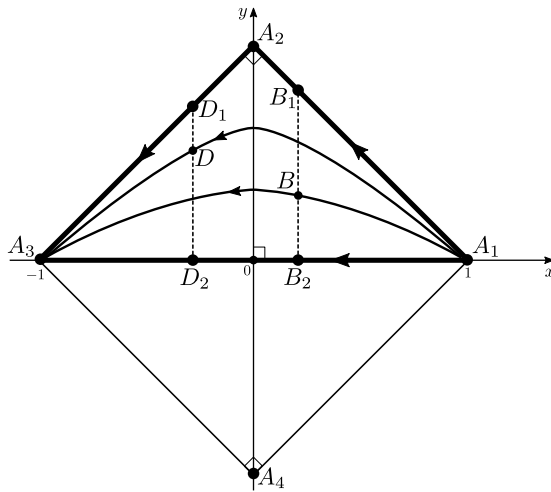
**Доказательство.** Соответствие посредством отображения  $\pi_{f^t}$  между множеством  $\Omega_{f^t}^1$  и множеством  $su$  циклов следует из доказательства леммы 4.1. К каждой стоковой точке  $\omega$  потока  $f^t$  примыкают области, разделенные  $u$ -кривыми, лежащими в бассейне  $W_\omega^s$ . Значит, точке  $\omega$  посредством отображения  $\pi_{f^t}$  соответствует единственный  $u$ -цикл графа  $\Gamma_{f^t}$ . Справедливо и обратное соответствие: поскольку бассейны различных стоков разделяются  $s$ -кривыми, то каждый  $u$ -цикл можно поместить в бассейн единственного стока. Таким образом, отображение  $\pi_{f^t}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством  $\Omega_{f^t}^0$  и множеством  $u$ -циклов. Соответствие между множеством  $\Omega_{f^t}^2$  и множеством  $s$ -циклов устанавливается аналогично.

**4.2. Доказательство теоремы 1.2.**

Пусть мы имеем некоторый допустимый граф  $\Gamma$ .

**I.** Построим по шагам поток  $f^t$ , соответствующий классу изоморфности графа  $\Gamma$ , частично следуя конструкции из [13].

**Шаг 1.** Рассмотрим некоторую вершину  $b$  графа  $\Gamma$ . Она инцидентна либо четырём простым рёбрам, два из которых  $s$ -рёбра, а два другие –  $u$ -рёбра, либо трём рёбрам, два из которых  $s$ -рёбра ( $u$ -рёбра), а третье –  $u$ -ребро ( $s$ -ребро) – является петлёй. Построим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  квадрат  $A_1A_2A_3A_4$  с центром в точке  $O(0, 0)$ , вершинами  $A_1(1, 0), A_2(0, 1), A_3(-1, 0), A_4(0, -1)$  соответственно (Рис. 4.2). Заметим, что сторона этого квадрата равна  $\sqrt{2}$ , а его центральный угол равен  $\frac{\pi}{2}$ .



**Рис. 4.2.** Построение векторного поля  $v_b^j$   
**Fig. 4.2.** Constructing of the vector field  $v_b^j$

Вершине  $b$  графа  $\Gamma$  соответствует ячейка  $J_b$ , состоящая из двух треугольных областей. Обозначим треугольник  $A_1A_2A_3$ , представляющий из себя половину квадрата, лежащую выше оси  $Ox$ , через  $S_b^j, j = 1, 2$ , где  $b$  – вершина графа;  $j$  – номер треугольника, лежащего в ячейке  $J_b$ .

Сторону  $A_1A_2$  назовём устойчивой сепаратрисой  $s$ , сторону  $A_2A_3$  – неустойчивой сепаратрисой  $u$ , а сторону  $A_1A_3$  –  $t$ -кривой. Точки  $A_1, A_2, A_3$  назовём источником, седлом

и стоком соответственно.

**Шаг 2.** Построим векторное поле  $v_b^j$  на  $S_b^j$  следующим образом.

Сначала определим векторное поле  $v_{A_1A_3}$  на стороне  $A_1A_3$  системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, \\ \dot{x} = x^2 - 1, x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

По построению  $A_1, A_3$  – неподвижные точки, и поток, порождённый этим векторным полем, движется от  $A_1$  к  $A_3$ . Определим векторное поле на остальных сторонах треугольника  $S_b^j$ .

Рассмотрим стороны  $A_1A_2$  и  $A_2A_3$ . Прямые, проходящие через точки  $A_1, A_2$  и  $A_2, A_3$ , имеет следующие уравнения:

$$A_1A_2: y = -x + 1,$$

$$A_2A_3: y = x + 1$$

соответственно. Их углы наклона к положительному направлению оси  $Ox$  равны  $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$  соответственно.

Сведём рассматриваемую ситуацию к случаю стороны  $A_1A_3$ . Для этого установим взаимно однозначные соответствия  $t_1$  между точками отрезков  $[0, 1]$  и  $[-1, 1]$  и  $t_2$  между точками отрезков  $[-1, 0]$  и  $[-1, 1]$  формулами

$$t_1 = 2x - 1,$$

$$t_2 = 2x + 1.$$

Определим векторные поля  $v_{A_1A_2}, v_{A_2A_3}$  системами дифференциальных уравнений:

$$v_{A_1A_2} = \begin{cases} \dot{x} = -(1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [0, 1], \\ \dot{y} = (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$v_{A_2A_3} = \begin{cases} \dot{x} = -(1 - t_2^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [-1, 0], \\ \dot{y} = -(1 - t_2^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

**Шаг 3.** Построим векторное поле  $v_{int}$  внутри треугольника  $S_b^j$ . Выберем пару произвольных точек  $B$  и  $D$  с координатами  $(x_1, y_1), x_1 \geq 0$  и  $(x_2, y_2), x_2 < 0$ , соответственно внутри треугольника  $S_b^j$ . Тогда  $B$  и  $D$  принадлежат вертикальным отрезкам  $B_1B_2$  и  $D_1D_2$ , соответственно, где  $B_1 \in A_1A_2, D_1 \in A_2A_3$ , а  $B_2$  и  $D_2$  – проекции  $B_1$  и  $D_1$  на  $Ox$ , соответственно (Рис. 4.2). Определим векторное поле  $v_{int}$  системой дифференциальных уравнений

$$v_{int} = \begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = \frac{B_1 B}{B_1 B_2} (x^2 - 1) - \frac{B B_2}{B_1 B_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = -\frac{B B_2}{B_1 B_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x. \end{cases} & \text{если } x \in [0, 1], \\ \begin{cases} \dot{x} = \frac{D_1 D}{D_1 D_2} (x^2 - 1) - \frac{D D_2}{D_1 D_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = \frac{D D_2}{D_1 D_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x. \end{cases} & \text{если } x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Определим векторное поле  $v_b^j$  системой:

$$v_b^j(x, y) = \begin{cases} v_{A_1 A_3}(x, y), & (x, y) \in A_1 A_3, \\ v_{A_1 A_2}(x, y), & (x, y) \in A_1 A_2, \\ v_{A_2 A_3}(x, y), & (x, y) \in A_2 A_3, \\ v_{int}(x, y), & (x, y) \in \text{int } S_b^j. \end{cases}$$

**Шаг 4.** Склеив два идентичных треугольника по  $t$ -кривым так, что сток склеится со стоком, а источник с источником, мы получим четырёхугольник, соответствующий ячейке первого типа. Склеив получившийся четырёхугольник по устойчивым (неустойчивым) сепаратрисам так, что седло склеится с седлом, мы получим геометрическую фигуру, соответствующую ячейке второго (третьего) типа. Каждой ячейке потока  $f^t$  соответствует вершина графа  $\Gamma$  с инцидентными ей рёбрами, количество которых совпадает с количеством сепаратрис в данной ячейке.

Более детально. Обозначим через  $B$  множество вершин, через  $N$  – число вершин и через  $E$  – множество рёбер графа  $\Gamma$ . Присвоим рёбрам, исходящим из вершины  $b$  и принадлежащим одной паре, номер  $j = 1, 2$ . Пусть  $\pi_b$  – отображение, ставящее в соответствие  $u$ - или  $s$ -ребру, инцидентному вершине  $b$ ,  $u$ - или  $s$ -сторону треугольника  $S_b^j \subset J_b, j = 1, 2$  соответственно, где  $J_b$  – ячейка, а паре рёбер  $u_j$ - и  $s_j$ -, инцидентных вершине  $b$  –  $t$ -сторону треугольника  $S_b^j$  соответственно,  $j = 1, 2$ . Обозначим через  $\mathcal{S}$  дизъюнктное объединение треугольников  $S_b^j, b \in B$ . Введём на множестве  $\mathcal{S}$  минимальное отношение эквивалентности  $\sim$ , удовлетворяющее следующему правилу: если вершины  $b_1, b_2$  из множества  $B$  инцидентны ребру  $e$  из множества  $E$ , то отрезки  $P_1 Q_1 = \pi_{b_1}(e)$  и  $P_2 Q_2 = \pi_{b_2}(e)$  отождествляются так, что точка  $(x_1, y_1) \in P_1 Q_1 = [(x_{P_1}, y_{P_1}), (x_{Q_1}, y_{Q_1})]$  эквивалентна точке  $(x_2, y_2) \in P_2 Q_2 = [(x_{P_2}, y_{P_2}), (x_{Q_2}, y_{Q_2})]$ , где

$$\begin{cases} x_2 = x_{P_2} + \frac{(x_1 - x_{P_1})(x_{Q_2} - x_{P_2})}{x_{Q_1} - x_{P_1}}, \\ y_2 = y_{P_2} + \frac{(y_1 - y_{P_1})(y_{Q_2} - y_{P_2})}{y_{Q_1} - y_{P_1}}. \end{cases}$$

Отрезки  $\overline{P_1 Q_1} = \pi_b(s_1 u_1)$  и  $\overline{P_2 Q_2} = \pi_b(s_2 u_2)$ , представляющие собой  $t$ -стороны треугольников  $S_b^1$  и  $S_b^2$  соответственно, отождествляются по такому же правилу.

Если вершина  $b$  инцидентна петле  $s_1 = s_2(u_1 = u_2)$ , то по такому же правилу отождествляются отрезки  $\widetilde{P_1 Q_1} = \pi_b(s_1)$  и  $\widetilde{P_2 Q_2} = \pi_b(s_2)$  ( $\widetilde{P_1 Q_1} = \pi_b(u_1)$  и  $\widetilde{P_2 Q_2} = \pi_b(u_2)$ ), представляющие собой  $s$ -стороны ( $u$ -стороны) треугольников  $S_b^1$  и  $S_b^2$  соответственно.

Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство  $S = S / \sim$  является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через  $q: S \rightarrow S$  естественную проекцию. Заметим, что векторное поле в эквивалентных посредством  $\sim$  точках имеет одинаковую длину, поэтому на многообразии  $S$  проекция  $q$  индуцирует непрерывное векторное поле, обозначим его  $V$ .

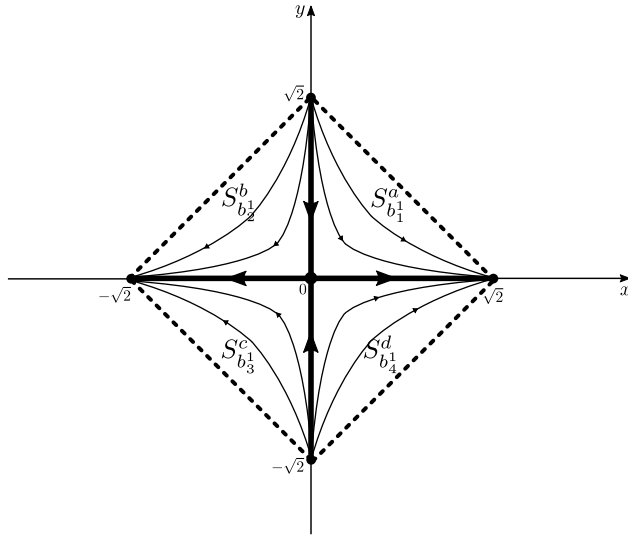
**Шаг 5.** Определим на  $S$  гладкую структуру, относительно которой поле  $V$  является гладким.

Покроем многообразие  $S$  конечным числом карт  $(U_z, \psi_z), z \in S$ , где  $U_z \subset S$  – открытая окрестность точки  $z$  и  $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$  – гомеоморфизм на образ следующих типов.

1. Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $su$ -циклы трёх возможных типов. Цикл первого типа:

$$\zeta_1 = \{b_1^1, b_1^1 b_2^1 = s, b_2^1, b_2^1 b_3^1 = u, b_3^1, b_3^1 b_4^1 = s, b_4^1, b_4^1 b_1^1 = u, b_1^1\},$$

где вершине  $b_i^1 \in B, i = \overline{1, 4}$  соответствует треугольник  $S_{b_i^1}^j$ , и  $\pi_{b_1^1}(s), \pi_{b_2^1}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_1^1}^a, S_{b_2^1}^b$ ;  $\pi_{b_2^1}(u), \pi_{b_3^1}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_2^1}^b, S_{b_3^1}^c$ ;  $\pi_{b_3^1}(s), \pi_{b_4^1}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_3^1}^c, S_{b_4^1}^d$ ;  $\pi_{b_4^1}(u), \pi_{b_1^1}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_4^1}^d, S_{b_1^1}^a$ , где  $a, b, c, d \in \{1, 2\}$  (Рис. 4.3).



**Рис. 4.3.** Пример карты  $\psi_z(U_z)$ , соответствующей  $su$ -циклу первого типа  
**Fig. 4.3.** Example of a  $\psi_z(U_z)$  map which corresponds to a  $su$ -cycle of the first type

Цикл второго типа:

$$\zeta_2 = \{b_1^2, b_1^2 b_2^2 = s, b_2^2, b_2^2 b_3^2 = u, b_3^2, b_3^2 b_1^2 = s, b_1^2\},$$

где вершине  $b_i^2 \in B, i = 1, 2, 3$  соответствует треугольник (пара треугольников)  $S_{b_i^2}^j$ ,  $\pi_{b_1^2}(s), \pi_{b_2^2}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_1^2}^f, S_{b_2^2}^1$ ;  $\pi_{b_2^2}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_2^2}^1, S_{b_3^2}^2$ ;  $\pi_{b_3^2}(s), \pi_{b_1^2}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_3^2}^2, S_{b_1^2}^g$ ;  $\pi_{b_3^2}(u), \pi_{b_1^2}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_3^2}^g, S_{b_1^2}^f$ , где  $f, g \in \{1, 2\}$ .

Цикл третьего типа:

$$\zeta_3 = \{b_1^3, b_1^3 b_2^3 = s, b_2^3, b_2^3 b_2^3 = u, b_2^3, b_2^3 b_1^3 = s, b_1^3, b_1^3 b_1^3 = u, b_1^3\},$$

где вершине  $b_i^3 \in B$ ,  $i = 1, 2$  соответствует пара треугольников  $S_{b_i^3}^j$ ,  $\pi_{b_i^3}(s)$ ,  $\pi_{b_i^3}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_1^3}^2, S_{b_2^3}^1$ ;  $\pi_{b_2^3}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_2^3}^1, S_{b_2^3}^2$ ;  $\pi_{b_1^3}(s)$ ,  $\pi_{b_1^3}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_1^3}^2, S_{b_1^3}^1$ ;  $\pi_{b_1^3}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_1^3}^1, S_{b_1^3}^2$ .

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^1} q(S_{b_i^1}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,1}(p_1((q|_{S_{b_i^1}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для  $\tilde{z} \in q(S_{b_i^1}^j)$ ,  $b_i^1 \in \zeta_1$ ,  $i = \overline{1,4}$ ,

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^2} q(S_{b_i^2}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,2}(p_1((q|_{S_{b_i^2}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для  $\tilde{z} \in q(S_{b_i^2}^j)$ ,  $b_i^2 \in \zeta_2$ ,  $i = \overline{1,3}$ ,

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^3} q(S_{b_i^3}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,3}(p_1((q|_{S_{b_i^3}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для  $\tilde{z} \in q(S_{b_i^3}^j)$ ,  $b_i^3 \in \zeta_3$ ,  $i = 1, 2$ ,

где

$$p_1(x, y) = (x, y - 1),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = \theta - \frac{5\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (1, a, 1), (1, f, 2), (1, 2, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = -\theta + \frac{\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (2, b, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = \theta - \frac{\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (3, c, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = -\theta + \frac{5\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (4, d, 1), (3, g, 2), (1, 1, 3).$$

Здесь функция  $p_1(x, y)$  осуществляет параллельный перенос треугольника  $S_{b_i^k}^j$  так, что вершина  $A_2$  попадает в начало координат. Функция  $\nu_{1,i,j,k}(r, \theta)$  совмещает угол при вершине  $A_2$  с координатными четвертями.

**2.** Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $s$ -цикл

$$\{b_1, b_1 b_2 = s, b_2, b_2 b_3 = s, b_3, \dots, b_{m-1}, b_{m-1} b_m = s, b_m, b_m b_1 = s, b_1\},$$

где вершине  $b_i \in B$ ,  $i = \overline{1, m}$ , соответствует пара треугольников  $S_{b_i}^j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\pi_{b_{l-1}}(s)$ ,  $\pi_{b_l}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_{l-1}}^v, S_{b_l}^1$ ;  $\pi_{b_{2l}}(s_1 u_1)$ ,  $\pi_{b_{2l}}(s_2 u_2)$  – сторона  $A_1 A_3$  в треугольниках  $S_{b_l}^1, S_{b_l}^2$ ;  $\pi_{b_l}(s)$ ,  $\pi_{b_{l+1}}(s)$  – сторона  $A_1 A_2$  в треугольниках  $S_{b_l}^2, S_{b_{l+1}}^n$ , где  $v, n \in \{1, 2\}$ ,  $l = \overline{1, m}$ .

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^m q(S_{b_i}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{2,i,j}(p_2(q|_{S_{b_i}^j})^{-1}(\tilde{z})) \quad \text{для } \tilde{z} \in q(S_{b_i}^j), i = \overline{1, m},$$

где

$$p_2(x, y) = (x - 1, y),$$

и

$$\nu_{2,i,j}(x, y) = \nu_{2,i,j}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos(\theta_{2,i,j}(\theta)), r \sin(\theta_{2,i,j}(\theta))),$$

а функция  $\theta_{2,i,j}(\theta)$  задаётся формулой

$$\theta_{2,i,j}(\theta) = \left(2i + j - 2 + (-2) \cdot \left(\frac{2i + j - 2}{2} \pmod{1}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{2i+j-3} \frac{8\theta - 6\pi}{m}.$$

Здесь функция  $p_2(x, y)$  осуществляет параллельный перенос многоугольника  $S_{b_i}^j$  так, что вершина  $A_1$  попадает в начало координат. Функции  $\nu_{2,i,j}(x, y)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = 1, 2$ , меняют величину угла при вершине  $A_1$  до  $\frac{2\pi}{m}$  и размещают многоугольники  $S_{b_i}^j$  вершинами  $A_1$  в начале координат так, чтобы их углы при вершине  $A_1$  примыкали друг к другу и заполняли полный угол, располагаясь каждый на  $i$ -м месте при обходе вокруг начала координат начиная с положительной полуоси  $Ox$  против часовой стрелки, а также организуя совпадение сторон одинакового цвета у прилегающих друг к другу многоугольников.

**3.** Рассмотрим на графе  $\Gamma$   $u$ -цикл

$$\{b_1, b_1 b_2 = u, b_2, b_2 b_3 = u, b_3, \dots, b_{m-1}, b_{m-1} b_m = u, b_m, b_m b_1 = u, b_1\},$$

где вершине  $b_i \in B$ ,  $i = \overline{1, m}$ , соответствует пара треугольников  $S_{b_i}^j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\pi_{b_{l-1}}(u)$ ,  $\pi_{b_l}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_{l-1}}^e$ ,  $S_{b_l}^1$ ;  $\pi_{b_{2l}}(s_1 u_1)$ ,  $\pi_{b_{2l}}(s_2 u_2)$  – сторона  $A_1 A_3$  в треугольниках  $S_{b_l}^1$ ,  $S_{b_l}^2$ ;  $\pi_{b_l}(u)$ ,  $\pi_{b_{l+1}}(u)$  – сторона  $A_2 A_3$  в треугольниках  $S_{b_l}^2$ ,  $S_{b_{l+1}}^w$ , где  $e, w \in \{1, 2\}$ ,  $l = \overline{1, m}$ .

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^m q(S_{b_i}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{3,i,j}(p_3(q|_{S_{b_i}^j})^{-1}(\tilde{z})) \quad \text{для } \tilde{z} \in q(S_{b_i}^j), i = \overline{1, m},$$

где

$$p_3(x, y) = (x + 1, y),$$

и

$$\nu_{3,i,j}(x, y) = \nu_{3,i,j}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos(\theta_{3,i,j}(\theta)), r \sin(\theta_{3,i,j}(\theta))),$$

а функция  $\theta_{3,i,j}(\theta)$  задаётся формулой

$$\theta_{3,i,j}(\theta) = \left(2i + j - 2 + (-2) \cdot \left(\frac{2i + j - 2}{2} \pmod{1}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{2i+j-3} \frac{8\theta}{5m}.$$

Здесь функция  $p_3(x, y)$  осуществляет параллельный перенос многоугольника  $S_{b_i}^j$  так, что вершина  $A_3$  попадает в начало координат. Функции  $\nu_{3,i,j}(x, y)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = 1, 2$ ,

меняют величину угла при вершине  $A_3$  до  $\frac{2\pi}{m}$  и размещают многоугольники  $S_{b_i}^j$  вершинами  $A_3$  в начале координат так, чтобы их углы при вершине  $A_3$  примыкали друг к другу и заполняли полный угол, располагаясь каждый на  $i$ -м месте при обходе вокруг начала координат начиная с положительной полуоси  $Ox$  против часовой стрелки, а также организуя совпадение сторон одинакового цвета у прилегающих друг к другу многоугольников.

Для введённых карт отображения перехода являются композициями гладких отображений, построенных в 1-3, и обратных к ним, в силу чего эти карты задают гладкую структуру на поверхности  $S$ .

Из вышесказанного следует, что граф является обобщённым графом Вонга  $\Gamma_{ft}$  тогда и только тогда, когда этот граф *допустимый*. **II.** Докажем пункты i) и ii) теоремы 1.2.

i) Докажем, что эйлерова характеристика поверхности  $S$  вычисляется по формуле  $\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$ , где  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – число всех  $u$ -,  $su$ - и  $s$ -циклов графа  $\Gamma_{ft}$  соответственно. Из предложения 4.2 следует, что число всех стоков, седел и источников равно, соответственно,  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Отсюда следует доказываемое утверждение, поскольку приведённая формула является формулой для суммы индексов особых точек потока  $f^t$ .

ii) Докажем, что поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma_{ft}$  содержит хотя бы один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.

Для доказательства рассмотрим трёхцветный граф Ошемкова-Шарко  $\Gamma_{ft}^{OS}$  [14]. Данный граф получается из обобщённого графа Вонга заменой каждой вершины на две вершины, соединённые ребром цвета  $t$ , которые инцидентны, помимо  $t$ -ребра,  $s$ - и  $u$ -рёбрам, состоящим в паре, а также удалением дуг между рёбрами (см. Рис. 4.1).

Напомним критерий неориентируемости поверхности  $S$  для графа  $\Gamma_{ft}^{OS}$  (Предложение 4.1). Пусть трёхцветный граф  $\Gamma_{ft}^{OS}$  – инвариант градиентно-подобного потока  $f^t$ , заданного на поверхности  $S$ , тогда поверхность  $S$  является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф  $\Gamma_{ft}^{OS}$  содержит хотя бы один цикл нечётной длины.

Рассмотрим все возможные циклы графа  $\Gamma_{ft}^{OS}$ .

1. Пусть цикл не содержит  $s$ - и  $u$ -ребра, исходящие из одной и той же вершины, тогда этот цикл чётный, ввиду чередования  $t$ - и  $s$ - ( $u$ -) рёбер.

2. Пусть цикл содержит одну вершину, вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из неё (Рис. 4.4, *b*), тогда этот цикл содержит  $n$  рёбер цвета  $s(u)$  и  $n - 1$  рёбер цвета  $t$ , где  $n \in \{2, \dots, n\}$ , следовательно, цикл нечётный.

3. Пусть цикл содержит две вершины вместе с различными  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них, тогда  $t$ - рёбер на одно меньше, чем в цикле из пункта 2), следовательно, цикл чётный.

4. Пусть цикл содержит три вершины вместе с различными  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них (Рис. 4.4, *e*), в этом случае, очевидно, цикл будет нечётным.

5. Пункты 3) и 4) также верны для случая, где вершины содержатся вместе с различными  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них, одно из которых соединяет обе вершины (Рис. 4.4, *d, f*)

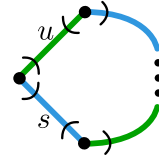
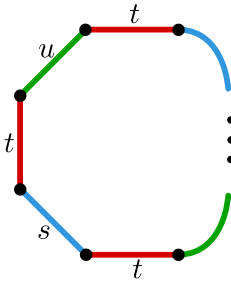
6. При увеличении количества вершин, содержащихся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них, будет происходить чередование чётности цикла, а именно, когда количество таких вершин нечётное, цикл нечётный и наоборот.

7. Рассмотрим цикл с четырьмя вершинами и  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них, которые, в свою очередь, соединяют только эти четыре вершины. Данный цикл явля-

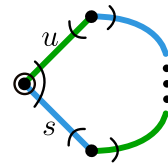
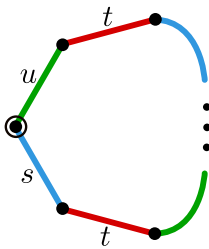
ется  $su$  циклом, длина которого фиксирована и равна 4 (Рис. 4.4,  $g$ ).

$\Gamma_{ft}^{OS}$

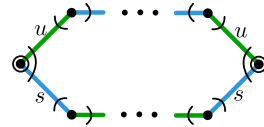
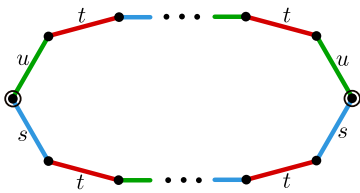
$\Gamma_{ft}$



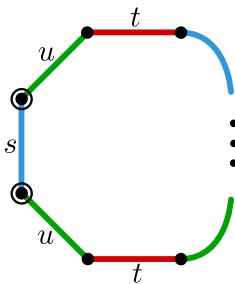
a)



b)

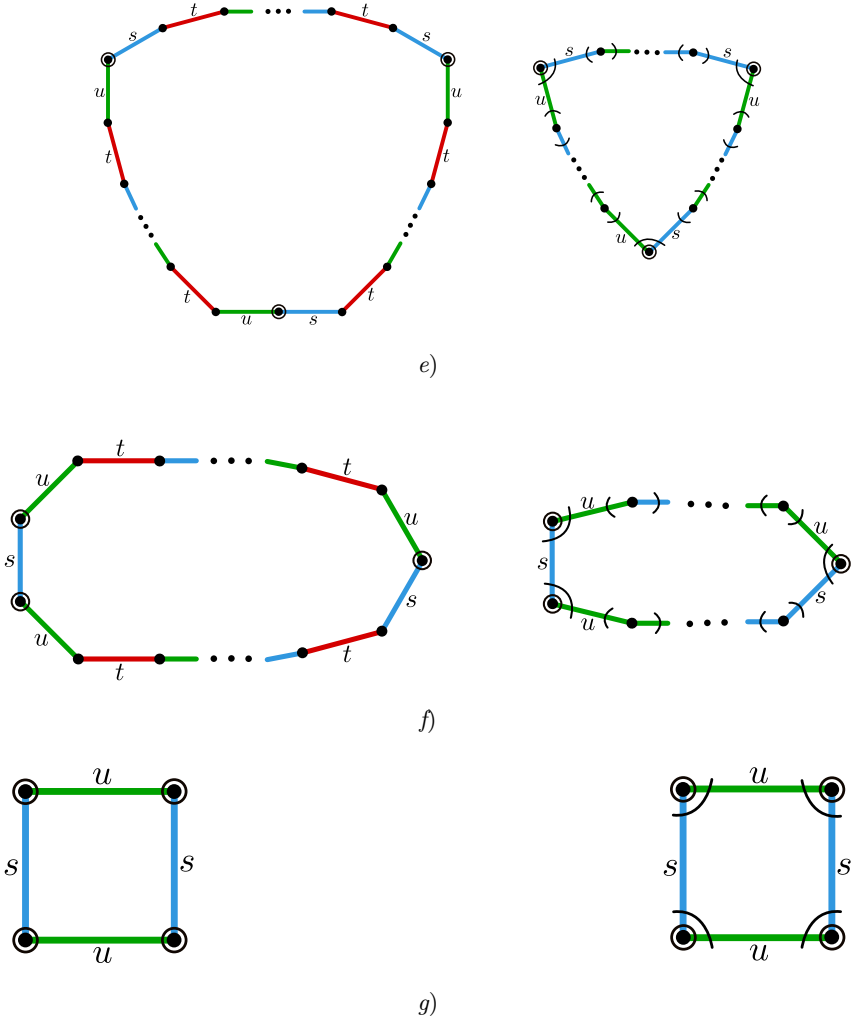


c)



d)





**Рис. 4.4.** Циклы графа  $\Gamma_{ft}^{OS}$  (слева) и соответствующие циклы графа  $\Gamma_{ft}$  (справа): а) цикл без рёбер, объединённых в пару; б) цикл с двумя рёбрами в паре; в) цикл с двумя непересекающимися парами; д) цикл с двумя пересекающимися парами; е) цикл с тремя непересекающимися парами; ф) цикл с двумя парами, пересекающимися друг с другом, но не пересекающимися с третьей парой; г)  $su$ -цикл

**Fig 4.4.** Cycles of a graph  $\Gamma_{ft}^{OS}$  (to the left) and corresponding cycles of the graph  $\Gamma_{ft}$  (to the right): а) a cycle without couples; б) a cycle with one couple; в) a cycle with two uncrossed couples; д) a cycle with two crossed couples; е) a cycle with three uncrossed couples; ф) a cycle with two couples crossed with each other but uncrossed with a third couple; г)  $su$ -cycle

Поскольку вершины, содержащиеся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них, графа  $\Gamma_{ft}^{OS}$ , соответствуют вершинам графа  $\Gamma_{ft}$ , содержащимся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре (Рис. 4.4), то из предложения 1.3. следует, что поверхность  $S$  неориентируема тогда и только тогда, когда  $\Gamma_{ft}$  содержит хотя бы

один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с  $s$ - и  $u$ -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. С. 113–185.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
4. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
5. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical Systems: Proc. New York: Academic Press, 1973. pp. 389–419. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3>
6. Wang X. The  $C^*$ -algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1990. Vol. 10. pp. 565–597.
7. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Починка О. В. Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1(445). С. 41–116.
8. Nikolaev I., Zhuzhoma E. Flows on 2-dimensional manifolds. // Lect. Notes in Math. 1999. Vol. 1705.
9. Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. London: Tokyo CRC Press, 1995. pp. xii+467.
10. Kruglov V. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // Динамические системы. 2018. Т. 8, № 1. С. 15–21.
11. Kruglov V. E., Malyshev D. S., Pochinka O. V. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces // Arnold Mathematical Journal. 2018. Vol. 4. pp. 483–504.
12. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение / пер. с англ. В. Н. Колокольцова. М.: Мир, 1986. С. 302.
13. Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 1. С. 100–126.

14. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 93–140.

*Поступила 07.05.2023; доработана после рецензирования 21.07.2023;  
принята к публикации 25.08.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Rough systems”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).
2. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
3. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “On trajectories that determine the qualitative structure of sphere partitioning into trajectories”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 251–257 (In Russ.).
4. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “About the scheme defining the topological structure of partitioning into trajectories”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **103**:4 (1955), 557–560 (In Russ.).
5. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical Systems*, 1973, 389–419.
6. X. Wang, “The C\*-algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **10** (1990), 565–597.
7. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse-Smale systems and topological structure of the carrying manifolds”, *Uspehi matematicheskikh nauk*, **74**:1(445) (2019), 41–116 (in Russ.).
8. I. Nikolaev, E. Zhuzhoma, “Flows on 2-dimensional manifolds”, *Lect. Notes in Math.*, **1705** (1999).
9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Tokyo CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, 1995, xii+467 p.
10. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces”, *Dinamicheskii sistemnyy*, **8**:1 (2018), 15–21.
11. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “On Algorithms that Effectively Distinguish Gradient-Like Dynamics on Surfaces”, *Arnold Mathematical Journal*, **4** (2018), 483–504.
12. J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction.*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1982.

13. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “Multicolor graph as a complete topological invariant for  $\Omega$ -stable flows without periodic trajectories on surfaces”, *Matem. sb.*, **209**:1 (2018), 100–126 (In Russ.).
14. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Matematicheskij sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140 (In Russ.).

*Submitted 07.05.2023; Revised 23.07.2023; Accepted 25.08.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.