Ю. С. Кан, А. И. Кибзун, Оптимальное управление линейной системой по квантильному критерию, *Автомат. и телемех.*, 1990, выпуск 1, 37–43

3. *Иоффе М. О., Катковник В. Я.* Поточечная и равномерная сходимость с вероятностью 1 непараметрических оценок регрессии // АиТ. 1989. № 12. С. 59–68.
4. *Катковник В. Я.* Непараметрическая идентификация и сглаживание данных. М.: Наука, 1985.
5. *Цыбаков А. Б.* Робастное восстановление функций методом локальной аппроксимации // Проблемы передачи информации. 1986. Т. XXII. Вып. 2. С. 69–83.
6. *Конаков В. Д.* О максимальных уклонениях эмпирической плотности и регрессии // Humbolt Univ. Berlin. Ser. Math. 1983. V. 51. P. 106–125.
7. *Stone C. J.* Optimal global rates of convergence for nonparametric regression // Ann. Statist. 1982. V. 10. № 4. P. 1040–1053.
8. *Devroye L. P.* The uniform convergence of the Nadaraya – Watson regression function estimates // Canad. J. Statist. 1978. V. 6. № 2. P. 179–191.
9. *Hardle W.* A law of the iterated logarithm for nonparametric regression function estimates // Ann. Statist. 1984. V. 12. № 2. P. 624–635.
10. *Иоффе М. О.* Закон повторного логарифма и равномерный модуль для непараметрических оценок плотности вероятности. М., 1987.– Деп. в ВИНИТИ 2.12.87, № 8436 – В87.

Поступила в редакцию 14.04.88

УДК 517.977.5

Ю. С. КАН, А. И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук

(Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПО КВАНТИЛЬНОМУ КРИТЕРИЮ

Рассматривается задача оптимального управления линейной непрерывной стохастической системой по квантильному терминальному критерию при наличии неопределенных возмущений, о которых известны лишь области их возможных величин. Предлагается метод решения такой задачи, основанной на преобразовании ее к некоторой эквивалентной. Приводятся примеры.

1. Введение

Наблюдающееся в настоящее время повышение требований к точности и надежности управления динамическими системами делает необходимым использование все более адекватных математических моделей объекта управления и внешней среды при постановке задач оптимизации. Это сопряжено с необходимостью наиболее полного учета неконтролируемых факторов различной природы, которые согласно [1, с. 17] подразделяются на случайные и неопределенные. В зависимости от информации о неконтролируемых факторах внешней среды и требований, предъявляемых к управлению, математические модели объектов управления, например летательных аппаратов (ЛА), могут включать одновременно как случайные, так и неопределенные факторы.

В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления линейной непрерывной стохастической системой при наличии неопределенных факторов в вероятностно-гарантирующей постановке, физический смысл которой состоит в оптимизации точности управления с вероятностью не ниже заданной, т. е. с вероятностью не ниже заданной оптимальное управление гарантирует оптимальную точность системы. Математическая постановка такой задачи содержит функционал квантили, по которому оптимизируется управление. Этот функционал формируется на основе функционала, характеризующего точность системы управления, и вероятностных ограничений. Функционал квантили имеет одну особенность, выделяющую его среди сложных статистических критериев [2], используемых в задачах оптимизации управления стохастическими системами. Статистические критерии, традиционно используемые в этих задачах, имеют форму математического ожидания некоторого функционала [2], заданного на траекториях стохастической системы. В такой форме может быть представлен, например, функционал вероятности, имеющий смысл вероятности достижения заданной точности системы и являющийся обратным к функционалу квантили. Сам же функционал квантили не может быть представлен в форме математического ожидания. Это обстоятельство выделяет рассматриваемую задачу среди традиционных постановок задач стохастического оптимального управления.

Задачи оптимального управления стохастическими системами по квантильному критерию рассматривались в [3], где решен ряд прикладных задач оптимального управления и фильтрации для дискретных стохастических систем, описывающих динамику движения ЛА. В этой же работе затронута проблема управления по статистическому критерию при наличии неопределенных факторов. Исследованию этой проблемы посвящены также работы [4, 5], где рассматривались минимаксно-стохастические задачи с критериями традиционного вида, указанного выше. Работы, посвященные проблеме оптимального управления по квантильному критерию для непрерывных стохастических систем, в настоящее время отсутствуют. Открытым является также вопрос корректного учета неопределенных факторов в таком критерии.

Статья посвящена распространению результатов подхода [3] на линейные непрерывные стохастические системы.

2. Терминальное управление линейной стохастической системой при наличии неопределенных возмущений

Рассматривается стохастическая система

$$(1)\qquad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\eta}(t)+\mathbf{G}(t)\boldsymbol{\xi}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ — вектор состояния, $\mathbf{u}(t)\in\mathbf{U}\subset\mathbf{R}^m$ — вектор управления, $\eta(t)\in\mathbf{N}\subset\mathbf{R}^k$ — неопределенное возмущение с компактным множеством неопределенности $\mathbf{N}$, $\boldsymbol{\xi}(t)$ — l-мерный нормальный белый шум с матрицей интенсивности $\boldsymbol{\nu}(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ — время, причем t_0, t_1 заданы. $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{G}(t)$ — матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что компоненты векторных и матричных функций $\mathbf{u}(\cdot)$, $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$, $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}(\cdot)$, $\mathbf{H}(\cdot)$, $\mathbf{G}(\cdot)$, $\boldsymbol{\nu}(\cdot)$ принадлежат пространству $\mathbf{L}_2[t_0, t_1]$. Вектор начальных условий $\mathbf{x}(t_0)$ для системы (1) распределен нормально с математическим ожиданием $\mathbf{x}_0$ и ковариационной матрицей $\mathbf{P}_0$ и не коррелирован с $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t>t_0$. Требуется построить программу управления $\mathbf{u}_\alpha(t)$, минимизирующую функционал квантили

$$(2)\qquad \Phi_\alpha(\mathbf{u})=\min\{\varphi:\mathbf{P}_\varphi(\mathbf{u})\geqslant\alpha\},$$

где $\alpha\in(0,1)$, а $\mathbf{P}_\varphi(\mathbf{u})$ — функционал вероятности вида

$$(3)\qquad \mathbf{P}_\varphi(\mathbf{u})=\mathscr{P}\{\mathbf{x}(t_1):\sup_{\boldsymbol{\eta}(\cdot)}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}(t_1))\leqslant\varphi\};$$

$\mathscr{P}$ — вероятностная мера, порожденная стохастической системой (1) в момент времени t_1 на борелевской σ-алгебре $\mathscr{F}$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n$. $\Phi(\mathbf{x}(t_1))$ — непрерывный по $\mathbf{x}$ терминальный критерий точности. Супремум в (3) берется по всем реализациям $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ неопределенного фактора с компонентами из $\mathbf{L}_2[t_0, t_1]$ и удовлетворяющим почти всюду на $[t_0, t_1]$ ограничению $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbf{N}$.

Для решения системы (1) для любых допустимых $\mathbf{u}(\cdot)$, $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ справедлива формула Коши [6, с. 159]:

$$(4)\qquad \mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(t,\tau)[\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)+\mathbf{H}(\tau)\boldsymbol{\eta}(\tau)]d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(t,\tau)\mathbf{G}(\tau)d\mathbf{w}(\tau),$$

где $\mathbf{w}(\cdot)$ — процесс с некоррелированными приращениями, отвечающий белому шуму $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$, $\mathbf{F}(t,\tau)$ — решение матричного уравнения

$$(5)\qquad \partial\mathbf{F}(t,\tau)/\partial t=\mathbf{A}(t)\mathbf{F}(t,\tau)$$

с начальным условием $\mathbf{F}(\tau,\tau)=\mathbf{I}_n$, $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка n. Поэтому имеет место принцип суперпозиции, т. е. процесс $\mathbf{x}(t)$ можно представить в виде суммы

$$(6)\qquad \mathbf{x}(t)=\mathbf{y}(t)+\mathbf{z}(t)+\mathbf{v}(t),$$

где $\mathbf{y}(t)$ является решением системы

$$(7)\qquad d\mathbf{y}(t)/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

при начальном условии $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{x}_0$. Функция $\mathbf{z}(t)$ удовлетворяет системе

$$(8)\qquad d\mathbf{z}(t)/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t)+\mathbf{H}(t)\boldsymbol{\eta}(t)$$

с нулевым начальным условием. Функция $\mathbf{v}(t)$ представляет собой случайную составляющую процесса $\mathbf{x}(t)$ и удовлетворяет стохастической системе

$$(9)\qquad d\mathbf{v}(t)/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{v}(t)+\mathbf{G}(t)\boldsymbol{\xi}(t),$$

причем начальный вектор $\mathbf{v}(t_0)$ распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{P}_0$.

Пусть $\mathbf{D}_y \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{D}_z \subset \mathbf{R}^n$ — множества достижимости [7] в момент t_1 для систем (7) и (8) соответственно, т. е. для всех $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_y$, $\mathbf{z} \in \mathbf{D}_z$ задачи о переводах системы (7) из начального состояния $\mathbf{x}_0$ в конечное $\mathbf{y}$ и системы (8) из начала координат в точку $\mathbf{z}$ в момент t_1 имеют решения в соответствующих классах допустимых $\mathbf{u}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$. И обратно, для любых допустимых $\mathbf{u}(\cdot)$, $\boldsymbol{\eta}(\cdot)$ справедливы включения: $\mathbf{y}(t_1) \in \mathbf{D}_y$, $\mathbf{z}(t_1) \in \mathbf{D}_z$. Обозначим $\mathbf{y} \overset{\Delta}{=} \mathbf{y}(t_1)$, $\mathbf{z} \overset{\Delta}{=} \mathbf{z}(t_1)$.

В силу линейности (9) и предположений относительно $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ и $\mathbf{x}(t_0)$ распределение вектора $\mathbf{v}(t_1)$ будет гауссовым с нулевым средним и матрицей ковариаций $\mathbf{R}(t_1)$, где функция $\mathbf{R}(t)$ является решением линейного матричного уравнения [6, с. 268]:

$$(10)\qquad d\mathbf{R}(t)/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{R}(t)+\mathbf{R}(t)\mathbf{A}^T(t)+\mathbf{G}(t)\boldsymbol{\nu}(t)\mathbf{G}^T(t)$$

с начальным условием $\mathbf{R}(t_0)=\mathbf{P}_0$. Обозначим $\mathbf{v}\triangleq\mathbf{v}(t_1)$.

С учетом введенных обозначений

$$\Phi(\mathbf{x}(t_1))=\Phi(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v}), \tag{11}$$

и вместо задачи минимизации по $\mathbf{u}\in\mathbf{U}$ функционала (2) можно рассматривать задачу минимизации по $\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y$ функции квантили

$$\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y})=\min\{\varphi:\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})\geqslant\alpha\}, \tag{12}$$

где $\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})$ — функция вероятности вида

$$\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})=\overline{\mathscr{P}}\{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n:\sup_{\mathbf{z}\in\mathbf{D}_z}\Phi(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v})\leqslant\varphi\}, \tag{13}$$

а $\overline{\mathscr{P}}$ — гауссова мера с моментными характеристиками $\mathbf{M}[\mathbf{v}]=0$, $\mathbf{M}[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]=\mathbf{R}(t_1)$. При этом, так как $\mathbf{D}_z$ компактно в силу компактности $\mathbf{N}$ [7, с. 178] и функция $\Phi(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v})$ непрерывна по своим аргументам, то функция максимума $\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{v})\triangleq\max\{\Phi(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v}):\mathbf{z}\in\mathbf{D}_z\}$ измерима по $\mathbf{v}$. Таким образом, функционал (3) был определен корректно.

В результате осуществленных выше преобразований исходная задача программного управления по квантильному терминальному критерию свелась к конечномерной задаче отыскания вектора $\mathbf{y}_\alpha\in\mathbf{D}_y$, минимизирующего функцию (12). Если такая задача будет решена, то в качестве оптимального управления $\mathbf{u}_\alpha(t)$ можно выбрать любую программу, переводящую систему (7) из начального состояния в конечное $\mathbf{y}(t_1)=\mathbf{y}_\alpha$.

Рассмотрим следующие задачи:

$$\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y})\to\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y}, \tag{14}$$

$$\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})\to\max_{\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y}. \tag{15}$$

Предположим, что существуют решения $\mathbf{y}_\alpha$, $\mathbf{y}_\varphi$ этих задач.

Определение. Назовем задачи (14), (15) эквивалентными, если $\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y}_\alpha)$, $\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y}_\varphi)$ являются взаимно обратными функциями параметров α, φ, $\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y}_\alpha)=\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y}_\varphi)$ при $\varphi=\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y}_\alpha)$ и $\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y}_\varphi)=\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y}_\alpha)$ при $\alpha=\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y}_\varphi)$.

Теорема. Если функция $\Phi(\mathbf{x})$ непрерывна по $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $\mathbf{U}$ компактно, и для любых $\varphi\in\mathbf{R}$, $\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y$

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n:\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{v})=\varphi\}=0, \tag{16}$$

то задачи (14), (15) эквивалентны. При этом оптимальную конечномерную стратегию $\mathbf{y}_\alpha$ можно найти из решения задачи:

$$\mathbf{y}_\alpha=\arg\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y}\Big[\inf_{E\in\varepsilon_\alpha}\sup_{\mathbf{v}\in E}\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{v})\Big], \tag{17}$$

где $\quad\varepsilon_\alpha\triangleq\{E\in\mathscr{F}:\overline{\mathscr{P}}(E)=\alpha\}.$

Доказательство приводится в приложении.

Таким образом, исходная задача управления свелась к эквивалентной конечномерной задаче оптимизации функции квантили, для решения которой, как утверждает теорема, применим обобщенный минимаксный подход [3]. В монографии [3] предложены численные процедуры решения конечномерных задач оптимизации квантильных критериев, а также найдены некоторые аналитические решения.

3. Примеры

1. Рассмотрим задачу, поставленную в разделе 2 без учета неопределенных факторов, т. е. $\mathbf{N}=\{0\}$. Тогда система (8) имеет единственное решение $\mathbf{z}(t)=0$, поэтому $\mathbf{D}_z=\{0\}$. Предположим, что ограничения на управление отсутствуют, т. е. $\mathbf{U}=\mathbf{R}^m$ и система (7) управляема на $[t_0, t_1]$. Тогда любая точка фазового пространства достижима в момент t_1, т. е. $\mathbf{D}_y=\mathbf{R}^n$. Функционал $\Phi(\cdot)$ имеет вид $\Phi(\mathbf{x}(t_1))=\|\mathbf{x}(t_1)\|_W^2$, где W — симметрическая положительно определенная матрица.

Для эквивалентной конечномерной задачи на основе использования соотношения (17) найдено [3, с. 67, 68] аналитическое решение: $\mathbf{y}_\alpha=0$ для любого $\alpha\in(0,1)$. Поэтому оптимальным управлением $\mathbf{u}_\alpha(t)$ будет программа, переводящая систему (7) из точки $\mathbf{x}_0$ в начале координат $\mathbf{y}(t_1)=0$.

2. Рассмотрим одномерный управляемый стохастический процесс

$$d\mathbf{x}(t)/dt=b\mathbf{u}(t)+h\boldsymbol{\eta}(t)+g\boldsymbol{\xi}(t), \tag{18}$$

где b, h, g — положительные константы, $\boldsymbol{\xi}(\cdot)$ — нормальный белый шум единичной интенсивности, $|\mathbf{u}(t)|\leqslant 1$, $|\boldsymbol{\eta}(t)|\leqslant 1$. Начальная позиция для (18) — гауссова случайная величина с математическим ожиданием $\mathbf{x}_0$ и дисперсией σ_0^2, не коррелированная с $\boldsymbol{\xi}(t)$ при $t>t_0$. Терминальный критерий точности имеет вид: $\Phi(\mathbf{x}(t_1))=|\mathbf{x}(t_1)|$.

Рассмотрим для этого процесса задачу управления из раздела 2. Множества достижимости в рассматриваемом случае являются отрезками: $\mathbf{D}_y=[\mathbf{d}_y^1, \mathbf{d}_y^2]$, $\mathbf{D}_z=[-\mathbf{d}_z, \mathbf{d}_z]$, где $\mathbf{d}_y^1=\mathbf{x}_0-b(t_1-t_0)$, $\mathbf{d}_y^2=\mathbf{x}_0+b(t_1-t_0)$, $\mathbf{d}_z=h(t_1-t_0)$. Решение уравнения (10) приводит к выражению $\sigma_1^2=\sigma_0^2+g^2(t_1-t_0)$ для дисперсии терминального состояния. Вычислим $\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{v})=\max\{|\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v}| : \mathbf{z}\in\mathbf{D}_z\}$. В силу выпуклости $|r|$ по $r\in\mathbf{R}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{v})=\max\{|\mathbf{y}-\mathbf{d}_z+\mathbf{v}|, |\mathbf{y}+\mathbf{d}_z+\mathbf{v}|\}=\mathbf{d}_z+|\mathbf{y}+\mathbf{v}|. \tag{19}$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы. Из (19) вытекает, что оптимальная конечномерная стратегия $\mathbf{y}_\alpha$ является оптимальной в задаче без неопределенного фактора (т. е. в случае, когда $\boldsymbol{\eta}(t)=0$ почти всюду на $[t_0, t_1]$). Попытаемся воспользоваться эквивалентностью задач (14) и (15) для построения $\mathbf{y}_\alpha$. Рассмотрим задачу

$$\overline{\mathbf{P}}_\varphi(y)=\int\limits_{|\mathbf{y}+v|\leqslant\varphi}\mathbf{p}(v)\,dv\to\max_{\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y}, \tag{20}$$

где $\varphi>0$,

$$\mathbf{p}(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma_1^2}\right\}. \tag{21}$$

Решение этой задачи имеет вид (см. приложение):

$$\mathbf{y}_\varphi\overset{\Delta}{=}\arg\max_{\mathbf{y}\in\mathbf{D}_y}\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})=\begin{cases}0, & 0\in\mathbf{D}_y,\\ \mathbf{d}_y^2, & \mathbf{d}_y^2<0,\\ \mathbf{d}_y^1, & \mathbf{d}_y^1>0\end{cases} \tag{22}$$

и не зависит от φ. Поэтому из теоремы вытекает, что $\mathbf{y}_\varphi \in \operatorname{Arg}\min \overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y})$. Управления, соответствующие второй и третьей ветвям в (22), являются экстремальными [7] и равны соответственно 1, −1. В качестве оптимального управления $\mathbf{u}_\alpha(t)$ для первой ветви можно выбрать любое допустимое, переводящее систему (7) в нуль в терминальный момент времени. Поэтому оптимальная программа $\mathbf{u}_\alpha(t)$ строится по $\mathbf{y}_\varphi$ следующим образом:

$$\text{(23)} \qquad \mathbf{u}_\alpha(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathbf{x}_0 + b(t_1 - t_0) < 0, \\ -1, \text{ если } \mathbf{x}_0 - b(t_1 - t_0) > 0, \\ \text{любая допустимая программа } \mathbf{u}(t), \text{ удовлетворяющая} \\ \text{условию: интеграл от } \mathbf{u}(t) \\ \text{по } [t_0, t_1] \text{ равен } -\mathbf{x}_0/b, \\ \text{если } |\mathbf{x}_0| \leqslant b(t_1 - t_0). \end{cases}$$

В последнем случае в качестве $\mathbf{u}_\alpha(t)$ можно выбрать постоянное управление $\mathbf{u}_\alpha(t) = -\mathbf{x}_0/(b(t_1 - t_0))$, поскольку оно приводит систему (7) в нуль при $t = t_1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) \stackrel{\triangle}{=} \sup \Phi(\mathbf{y}+\mathbf{z}+\mathbf{v})$ по $\mathbf{z} \in \mathbf{D}_z$, $\varphi_*(\mathbf{y}) \stackrel{\triangle}{=} \inf\{\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\}$, $\varphi^*(\mathbf{y}) \stackrel{\triangle}{=} \sup\{\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\}$, $\mathbf{N}(\mathbf{y}) \stackrel{\triangle}{=} (\varphi_*(\mathbf{y}), \varphi^*(\mathbf{y}))$. Из компактности $\mathbf{D}_z$ [7, с. 178] вытекает [8, с. 27] непрерывность $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ по $\mathbf{v}$, поэтому для любых $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathbf{N}(\mathbf{y})$ множество $\{\mathbf{v} : |\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) - \varphi| < \varepsilon\}$ непусто и открыто, откуда

$$\text{(П.1)} \qquad \operatorname{mes}\{\mathbf{v} : |\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) - \varphi| < \varepsilon\} > 0.$$

Из (П.1), (16), взаимной абсолютной непрерывности гауссовой и лебеговой мер имеем

$$\text{(П.2)} \qquad \overline{\mathscr{P}}\{\mathbf{v} : \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = \varphi\} = 0,$$

$$\text{(П.3)} \qquad \overline{\mathscr{P}}\{\mathbf{v} : |\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) - \varphi| < \varepsilon\} > 0.$$

Из (П.2), (П.3) и непрерывности $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ вытекает непрерывность по $\mathbf{y}$ функций $\overline{\Phi}_\alpha(\mathbf{y})$, $\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})$ [3, с. 51], а из компактности $\mathbf{U}$ – компактность $\mathbf{D}_y$ [7, с. 178]. Поэтому решения $\mathbf{y}_\alpha$, $\mathbf{y}_\varphi$ задач (14), (15) существуют и, согласно [3, с. 59], соотношения (П.2), (П.3) устанавливают эквивалентность задач (14), (15).

Далее, так как гауссова мера имеет непрерывную плотность распределения, $\mathbf{y}_\alpha$ можно найти [3, с. 82] из соотношения (17).

Оптимизация функции (20). Пусть $\varphi > 0$. Вычисляя производную по $\mathbf{y}$ функции $\overline{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})$, имеем:

$$\text{(П.4)} \qquad \overline{\mathbf{P}}_\varphi'(\mathbf{y}) = -k \int\limits_{\mathbf{y}-\varphi}^{\mathbf{y}+\varphi} \gamma(v)\,dv,$$

где $k = [\sqrt{2\pi}\sigma_1^3]^{-1}$, $\gamma(v) = v\exp\{-v^2/(2\sigma_1^2)\}$. Функция $\gamma(v)$ является нечетной по v, причем $\gamma(v) < 0$ при $v < 0$, $\gamma(v) = 0$ при $v = 0$, $\gamma(v) > 0$ при $v > 0$. Поэтому

$$\text{(П.5)} \qquad \overline{\mathbf{P}}_\varphi'(0) = 0.$$

Пусть $\mathbf{y} < 0$. Тогда возможны два варианта: $\mathbf{y} < -\varphi$, $-\varphi \leqslant \mathbf{y} < 0$. В первом случае отрезок $[\mathbf{y} - \varphi, \mathbf{y} + \varphi]$, по которому берется интеграл в (П.4), целиком лежит в области отрицательных действительных чисел. Следовательно,

$$\text{(П.6)} \qquad \overline{\mathbf{P}}_\varphi'(\mathbf{y}) > 0.$$

Пусть $-\varphi \leqslant \mathbf{y} < 0$. Тогда $\mathbf{y} + \varphi \geqslant 0$ и

$$\text{(П.7)} \qquad \overline{\mathbf{P}}_\varphi' = -k\left[\int\limits_{\mathbf{y}-\varphi}^{-\mathbf{y}-\varphi} \gamma(v)\,dv + \int\limits_{-\mathbf{y}-\varphi}^{\mathbf{y}+\varphi} \gamma(v)\,dv\right].$$

Второй интеграл в (П.7) равен нулю в силу нечетности $\gamma(v)$, а первый является отрицательной величиной, поскольку $[\mathbf{y}-\varphi, -\mathbf{y}-\varphi]$ лежит в отрицательной области. Поэтому и в этом случае справедливо неравенство (П.6). Таким образом, неравенство (П.6) справедливо для любого $\mathbf{y}<0$. Аналогично доказывается, что

$$\bar{\mathbf{P}}_\varphi'(\mathbf{y})<0 \tag{П.8}$$

для всех $\mathbf{y}>0$. Из (П.5), (П.6) и (П.8) вытекает, что функция $\bar{\mathbf{P}}_\varphi(\mathbf{y})$ строго квазивогнута по $\mathbf{y}$ и имеет глобальный максимум в нуле. Поэтому, если $0\in\mathbf{D}_z$, то $\mathbf{y}_\varphi=0$. Если $\mathbf{D}_z$ расположено левее нуля, то $\mathbf{y}_\varphi$ совпадает с правым концом $\mathbf{d}_y^2$, а если $\mathbf{D}_z$ – правее нуля, то $\mathbf{y}_\varphi=\mathbf{d}_y^1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
2. *Андреев Н. И.* Теория статистически оптимальных систем управления. М.: Наука, 1980.
3. *Малышев В. В., Кибзун А. И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
4. *Ананьев Б. И.* Минимаксные среднеквадратичные оценки в статистически-неопределенных системах // Дифференц. уравнения. 1984. Т. XX. № 8. С. 1291–1297.
5. *Кощеев А. С., Куржанский А. Б.* Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 72–93.
6. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
7. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
8. *Федоров В. В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 22.06.88

УДК 519.23

Т. Д. КОНАШЕНКОВА, В. И. ШИН, канд. физ.-мат. наук

(Институт проблем информатики АН СССР, Москва)

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предлагается метод определения моментов (семиинвариантов, квазимоментов) фазовых координат нелинейных стохастических систем, предусматривающий составление уравнений для моментов первого и второго порядков, а также определенного набора старших моментов. При этом семиинварианты, не соответствующие этому набору старших моментов, полагаются равными нулю. Такой подход позволяет существенно сократить количество уравнений для моментов по сравнению с методом моментов, моментно-семиинвариантным методом и др. [1].

1. Введение

При решении задач статистического анализа стохастических систем широкое распространение получили приближенные методы, основанные на параметризации неизвестных распределений (характеристических функций или плотностей вероятностей) вектора состояния системы. Их суть состоит в аппроксимации неизвестных характеристических функций (плотностей вероятностей) известными функциями, зависящими от конечного числа неизвестных параметров (моментов, семиинвариантов, квазимоментов), что позволяет свести решение задачи анализа к нахождению этих параметров, удовлетворяющих системе обыкновенных диффе-