А. Н. Шерстнев, Меры на идеалах ортопроекторов алгебры Неймана,
Изв. вузов. Матем., 1978, номер 10, 108–109

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 10 (197)

УДК 517.98

А. Н. Шерстнев

МЕРЫ НА ИДЕАЛАХ ОРТОПРОЕКТОРОВ АЛГЕБРЫ НЕЙМАНА

Теория меры на проекторах алгебры Неймана сложнее теории, основанной на уже готовом „интеграле“ (след, вес). Сложнее дело обстоит с неограниченными мерами.

В данном сообщении охарактеризован широкий класс неограниченных мер на проекторах полуконечной алгебры Неймана. По существу, получен аналог теоремы Радона — Никодима для мер на проекторах. Роль плотностей этих мер относительно точного нормального полуконечного следа играют положительные билинейные формы. Полученные здесь результаты обобщают основные теоремы работы [1].

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана, $\mathcal{M}^{\text{п}}$ — множество всех ортопроекторов из алгебры $\mathcal{M}$. Множество $\mathfrak{m} \subset \mathcal{M}^{\text{п}}$ назовем *идеалом в* $\mathcal{M}^{\text{п}}$, если

(а) $q \in \mathcal{M}^{\text{п}}$, $q \leqslant p \in \mathfrak{m}$ влечет $q \in \mathfrak{m}$,

(б) существует возрастающая к 1 сеть $p_\alpha \in \mathfrak{m}$ такая, что $p = \bigvee_\alpha (p \wedge p_\alpha)$ для любого $p \in \mathfrak{m}$.

Отображение $\mu : \mathfrak{m} \to \mathbf{R}^+$ назовем *мерой на идеале* $\mathfrak{m}$, если $p = p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots$ $\ldots (p, p_i \in \mathfrak{m})$ влечет $\mu(p) = \sum_i \mu(p_i)$ (значком $\oplus$ обозначена сумма попарно ортогональных проекторов).

Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H, и p—проектор из $\mathfrak{m}_\tau^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ \mid \tau(x) < +\infty\}$. Тогда равенство $\tau_p(x_p) \equiv \tau(pxp)$ $(x \in \mathcal{M})$, $x_p = px \mid pH$, определяет точный нормальный конечный след τ_p на редуцированной алгебре $\mathcal{M}_p$. Пусть $\mathfrak{m} \subset \mathcal{M}^{\text{п}}$ — идеал. Меру $\mu : \mathfrak{m} \to \mathbf{R}^+$ назовем *редуктивной*, если для каждого $p \in \mathfrak{m}$ существует оператор $a(p) \in \mathcal{M}^+$ такой, что

$$\mu(r) = \tau_p(a(p)\, r_p) \quad (r \leqslant p, \quad r \in \mathfrak{m}).$$

Оператор $a(p)$ определен однозначно; при этом $a(p)(p)\,p \in \mathcal{M}^+$.

Пусть $t(\cdot, \cdot)$ — положительная билинейная форма (п. б. ф.), заданная на плотном в H линеале $D(t)$. Если $k \geqslant 0$ — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, то через $t \circ k$ будем обозначать билинейную форму

$$t \circ k(f, g) \equiv t(k^{1/2} f, k^{1/2} g) \quad (f, g \in D(t \circ k)),$$

где $D(t \circ k) = \{ f \in D(k^{1/2}) \mid k^{1/2} f \in D(t)\}$.

Будем говорить, что б. ф. t присоединена к алгебре $\mathcal{M}$, если линеал $D(t)$ инвариантен относительно коммутанта $\mathcal{M}'$, причем для любого унитарного оператора $u' \in \mathcal{M}'$:

$$t(u'f, u'g) = t(f, g) \quad (f, g \in D(t)).$$

Скажем далее, что п. б. ф. t, присоединенная к $\mathcal{M}$, *τ-измерима*, если существует возрастающая к 1 сеть $p_\alpha \in \mathcal{M}^{\text{п}}$ такая, что

(a) $\bigcup\limits_\alpha p_\alpha H = D(t)$,

(b) для каждого α п. б. ф. $t \circ p_\alpha$ определяется некоторым оператором $x_\alpha \in \mathfrak{m}_\tau^+$.

При этом считается, что п. б. ф. s определяется оператор $x \in \mathfrak{m}_\tau^+$, если $s(f, g) = (xf, g)$ $(f, g \in D(s))$. В этом случае по определению $\tau(s) \equiv \tau(x)$.

Теорема 1. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $\mathcal{M}$, $\mathscr{M}$ — идеал в $\mathcal{M}^{\text{п}}$ и $\mu : \mathscr{M} \to \mathrm{R}^+$ — редуктивная мера. Тогда существует τ-измеримая п. б. ф. t такая, что*

$$\mu(p) = \tau(t \circ p) \quad (p \in \mathscr{M}).$$

Теорема 2. *Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре Неймана $\mathcal{M}$ и t — τ-измеримая п. б. ф. Тогда семейство $\mathscr{M}_{t,\tau}$, образованное ортопроекторами $p \in \mathcal{M}^{\text{п}}$ такими, что*

(a) $pH \subset D(t)$,

(b) *б. ф. $t \circ p$ определяется оператором из $\mathfrak{m}_\tau^+$, — является идеалом в $\mathcal{M}^{\text{п}}$, а отображение $\mu : \mathscr{M}_{t,\tau} \to \mathrm{R}^+$, заданное равенством*

$$\mu(p) = \tau(t \circ p) \quad (p \in \mathscr{M}_{t,\tau}),$$

есть редуктивная мера.

Идеалы, являющиеся областями задания мер, определяемых τ-измеримыми б. ф., обладают усиленными структурными свойствами.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{M}_{t,\tau}$ — идеал в $\mathcal{M}^{\text{п}}$, определяемый условиями теоремы 2. Тогда $p \vee q \in \mathscr{M}_{t,\tau}$ всякий раз, когда $\|p \vee q - p - q\| < 1$ $(p, q \in \mathscr{M}_{t,\tau})$.*

Проиллюстрируем сказанное на алгебре B всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H.

Пусть D — линеал, плотный в H. Тогда $\mathscr{M} = \{p \in B^{\text{п}} \mid pH \subset D\}$ — идеал в $B^{\text{п}}$ (сеть p_α всех конечномерных проекторов, проектирующих внутрь D, удовлетворяет нужным свойствам). Пусть $k \geqslant 0$ — произвольный оператор, плотно заданный в H. П. б. ф.

$$t(f, g) \equiv (k^{1/2} f, k^{1/2} g) \quad (f, g \in D(k^{1/2}))$$

является τ_0-измеримой (здесь τ_0 — стандартный след на B^+). Идеал $\mathscr{M}_{t,\tau_0}$ в данном случае состоит из проекторов $p \in B^{\text{п}}$, проектирующих внутрь $D(k^{1/2})$, причем оператор $\overline{pkp}$ — ядерный. Функция $\mu : \mathscr{M}_{t,\tau_0} \to \mathrm{R}^+$, заданная равенством

$$\mu(p) = \tau_0(\overline{pkp}) \quad (p \in \mathscr{M}_{t,\tau_0}),$$

является редуктивной мерой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерстнев А. Н. О представлении мер, заданных на ортопроекторах пространства Гильберта, билинейными формами. Изв. вузов. Матем., 1970, № 9, с. 90—97.

г. Казань

Поступила
2 II 1978