



Общероссийский математический портал

В. И. Арнаутков, К. М. Филиппов, О максимальных цепях в решетке модульных топологий, *Сиб. матем. журн.*, 2001, том 42, номер 3, 491–506

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

10 февраля 2025 г., 06:33:10



УДК 512.556.5

## О МАКСИМАЛЬНЫХ ЦЕПЯХ В РЕШЕТКЕ МОДУЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЙ

В. И. Арнаутв, К. М. Филиппов

**Аннотация:** Пусть  $(R, \tau_R)$  — топологическое кольцо и  ${}_R M$  — некоторый левый унитарный  $R$ -модуль. Известно, что множество  $\mathcal{L}(M)$  всех  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий на  ${}_R M$  образует полную модулярную решетку. Топологию  $\tau \in \mathcal{L}(M)$  будем называть  $n$ -предмаксимальной, если в  $\mathcal{L}(M)$  существует максимальная по включению цепь  $\tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n$  такая, что  $\tau_0$  — наибольший элемент в  $\mathcal{L}(M)$  и  $\tau_n = \tau$ . В §1 получены условия, каждое из которых обеспечивает либо наличие, либо отсутствие 1-предмаксимальных хаусдорфовых топологий на  ${}_R M$ ; §2 содержит описание всех  $n$ -предмаксимальных топологий в случае, когда  $(R, \tau_R)$  — топологическое тело, топология которого определяется вещественной абсолютной величиной. Библиогр. 5.

### Введение

Пусть  $(R, \tau_R)$  — отделимое топологическое кольцо с единицей и  ${}_R M$  — левый унитарный  $R$ -модуль. Настоящая статья посвящена изучению следующих вопросов.

Допускает ли  ${}_R M$  (отделимую)  $n$ -предмаксимальную (см. 1.1, п. (7))  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию для произвольного  $n \in \mathbb{N}$ , в частности, допускает ли он отделимую предмаксимальную (см. 1.1, п. (8))  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию?

Как устроены  $n$ -предмаксимальные топологии на  ${}_R M$ , если они существуют?

Если  ${}_R M$  допускает две  $(R, \tau_R)$ -модульные отделимые топологии  $\tau_0$  и  $\tau_1$ , причем  $\tau_0 \neq \tau_1$  и  $\tau_0$  дискретна, то существование отделимых предмаксимальных топологий легко доказывается с помощью леммы Цорна. Кроме того, в §1 указаны условия, при которых вопрос о существовании предмаксимальных топологий имеет положительное (см. теоремы 1.4 и 1.7) и отрицательное (см. теорему 1.12, частный случай которой доказан в [1]) решения.

В §2 содержится описание строения  $n$ -предмаксимальных топологий для случая, когда кольцо  $R$  является телом, а топология  $\tau_R$  определяется вещественной абсолютной величиной (см. теорему 2.8).

### § 1. Существование отделимых предмаксимальных топологий

#### 1.1. Предварительные замечания и определения.

(1) Считается, что все кольца содержат единицу и что все модули унитарны.

(2) Обозначим через  $\bigoplus_{x \in X} {}_R M_x$  прямую сумму множества модулей  $\{ {}_R M_x \mid x \in X \}$ ; через  $\pi_y : \bigoplus_{x \in X} {}_R M_x \rightarrow {}_R M_y$  — естественную проекцию; через  $\rho_y :$

${}_R M_y \rightarrow \bigoplus_{x \in X} {}_R M_x$  — естественное вложение, т. е.  $\pi_x(\rho_y)$  является тождественным отображением при  $x = y$  и нулевым в противном случае.

(3) Выражение «окрестность нуля» заменим аббревиатурой о.н., а «базис окрестностей нуля» — аббревиатурой б.о.н.

(4) Зафиксируем отделимое топологическое кольцо  $(R, \tau_R)$  с б.о.н.  $\mathcal{B}_R$ , его пополнение  $(\hat{R}, \tau_{\hat{R}})$  и естественное вложение  $i_R : (R, \tau_R) \rightarrow (\hat{R}, \tau_{\hat{R}})$ .

(5) Пусть  ${}_R M$  — некоторый  $R$ -модуль. Через  $\tau(M)$  будем обозначать сильнейшую  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию на  ${}_R M$ . Заметим, что топология  $\tau(M)$  всегда существует.

(6) Дадим следующие определения.

Пусть  $\tau_1, \tau_2$  — две  $(R, \tau_R)$ -модульные топологии на  $R$ -модуле  ${}_R M$ . Будем говорить, что  $\tau_1$  покрывает  $\tau_2$ , если  $\tau_1 > \tau_2$  и не существует  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau$  такой, что  $\tau_1 > \tau > \tau_2$ ;

Цепь  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий  $\tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n$  на  $R$ -модуле  ${}_R M$  называется максимальной, если  $\tau_{i-1}$  покрывает  $\tau_i$  для любого  $1 \leq i \leq n$ .

$(R, \tau_R)$ -модульная топология  $\tau$  на  $R$ -модуле  ${}_R M$  называется  $n$ -предмаксимальной, если существует максимальная цепь  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий такая, что  $\tau(M) = \tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n = \tau$ .

(7) Заметим, что в силу того, что решетка  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий на  ${}_R M$  модулярна, число  $n$  в последнем определении не зависит от выбора максимальной цепи  $\tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n$  (см. [2, гл. III, § 2, теорема 1]).

(8) Будем называть 1-предмаксимальные топологии предмаксимальными.

(9) Пусть  $S_1, S_2$  — два множества и  $f : S_1 \rightarrow S_2$  — отображение. Пусть  $\tau_2$  — некоторая топология на  $S_2$ . Существует слабейшая топология на  $S_1$  такая, что отображение  $f$  непрерывно. Будем называть ее прообразом топологии  $\tau_2$  по отображению  $f$  и обозначать через  $f^{-1}(\tau_2)$ . Очевидно, что  $f^{-1}(\tau_2) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \tau_2\}$ .

Если  $S_1, S_2$  являются  $R$ -модулями,  $f$  — модульным гомоморфизмом, а  $(S_2, \tau_2)$  — топологическим  $(R, \tau_R)$ -модулем, то топология  $f^{-1}(\tau_2)$   $(R, \tau_R)$ -модульна.

Если  $\tau_1$  — некоторая топология на  $S_1$ , то существует сильнейшая топология на  $S_2$  такая, что отображение  $f$  непрерывно. Будем называть ее фактор-топологией топологии  $\tau_1$  по отображению  $f$  и обозначать через  $\tau_1/f$ .

Если  $S_1, S_2$  являются  $R$ -модулями,  $f$  — модульным сюръективным гомоморфизмом, а  $(S_1, \tau_1)$  — топологическим  $(R, \tau_R)$ -модулем, то топология  $\tau_1/f$   $(R, \tau_R)$ -модульна и отображение  $f : (S_1, \tau_1) \rightarrow (S_2, \tau_1/f)$  открыто.

**1.2. Теорема.** Пусть  $(G, \tau_G)$  — топологическая абелева группа с б.о.н.  $\mathcal{B}_G$ ,  $X$  — некоторое непустое множество и  $\{G_x \mid x \in X\}$  — множество изоморфных копий группы  $G$ . Пусть  $F = \bigoplus_{x \in X} G_x$  и  $\tau_{\oplus}$  — финальная групповая топология на  $F$  относительно вложений  $\rho_x : (G, \tau_G) \rightarrow F$ , т. е.  $\tau_{\oplus}$  является точной верхней границей множества всех групповых топологий  $\tau$  на  $F$  таких, что отображение  $\rho_y : (G, \tau_G) \rightarrow (F, \tau)$  непрерывно для каждого  $y \in X$ . Тогда множество  $\mathcal{B} = \{W(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_G\}$  является б.о.н. топологической группы  $(F, \tau_{\oplus})$ , где  $W(\mathcal{F})$  — множество всех элементов  $v \in F$  таких, что  $v$  может быть представлен в виде  $\sum_{i=1}^n \rho_{x_i}(r_i)$ , где все  $x_i$  попарно различны и  $r_i \in \mathcal{F}(x_i, i)$  для любого  $1 \leq i \leq n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [3, следствие 4.22] множество  $\mathcal{B}' = \{V(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_G\}$  является б.о.н. в  $(F, \tau_{\oplus})$ , где

$$V(\mathcal{F}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=1}^n \left( \bigcup_{x \in X} \rho_x(\mathcal{F}(x, i)) \right) \right). \quad (1.2.1)$$

Проверим, что  $\mathcal{B}$  — б.о.н. в  $(F, \tau_{\oplus})$ . Очевидно, что базис фильтра  $\mathcal{B}$  сильнее, чем  $\mathcal{B}'$ .

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно проверить обратное соотношение. В самом деле, пусть  $\mathcal{F} : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_G$ . Не ограничивая общности, предположим, что для каждого  $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$  выполнено включение  $\mathcal{F}(x, i+1) + \mathcal{F}(x, i+1) \subseteq \mathcal{F}(x, i)$ . Определим отображение  $\mathcal{F}' : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_G$  так, что  $\mathcal{F}'(x, i) = \mathcal{F}(x, i+1)$ , и проверим, что  $V(\mathcal{F}') \subseteq W(\mathcal{F})$ .

Легко проверяется, что для любых  $x \in X$  и  $n \in \mathbb{N}$  верно включение

$$\sum_{j=i}^n \mathcal{F}'(x, j) \subseteq \mathcal{F}(x, i). \quad (1.2.2)$$

Пусть теперь  $v \in V(\mathcal{F}')$ . Тогда  $v$  представим в виде  $\sum_{k=1}^n \rho_{x_k}(r_k)$ , где для любого  $1 \leq k \leq n$  выполнено  $r_k \in \mathcal{F}'(x_k, k)$  и элементы  $x_i$ , вообще говоря, могут не быть попарно различными.

Определим отношение эквивалентности  $\sim$  на множестве  $\{1, \dots, n\}$  следующим образом:  $i \sim j$  тогда и только тогда, когда  $x_i = x_j$ . Пусть  $\{\{k_{i1}, \dots, k_{il_i}\} \mid 1 \leq i \leq m\}$  — множество всех классов эквивалентности по этому отношению.

Не ограничивая общности, считаем, что  $k_{i1} < k_{i2} < \dots < k_{il_i}$  для любого  $1 \leq i \leq m$ . Считаем также, что  $1 = k_{11} < k_{21} < \dots < k_{m1}$ . Из последнего предположения следует, что для любого  $1 \leq i \leq m$  верно неравенство  $k_{i1} \geq i$ , т. е.  $\{k_{ij} \mid 1 \leq j \leq l_i\} \subseteq \{i, \dots, n\}$ . Пользуясь последним включением и формулой (1.2.2), получаем, что для каждого  $i$  такого, что  $1 \leq i \leq m$ , выполнено включение

$$\sum_{j=1}^{l_i} \mathcal{F}'(x_i, k_{ij}) \subseteq \sum_{j=i}^n \mathcal{F}'(x_i, j) \subseteq \mathcal{F}(x_i, i). \quad (1.2.3)$$

Тогда

$$v = \sum_{k=1}^n \rho_{x_k}(r_k) = \sum_{i=1}^m \rho_{x_i} \left( \sum_{j=1}^{l_i} r_{k_{ij}} \right),$$

где  $r_{k_{ij}} \in \mathcal{F}'(x_i, k_{ij})$ . Тогда в силу (1.2.3)

$$v \in \sum_{i=1}^m \rho_{x_i} \left( \sum_{j=1}^{l_i} \mathcal{F}'(x_i, k_{ij}) \right) \subseteq \sum_{i=1}^m \rho_{x_i} \left( \sum_{j=i}^n \mathcal{F}'(x_i, j) \right) \subseteq \sum_{i=1}^m \rho_{x_i} (\mathcal{F}(x_i, i)),$$

что и требовалось.

**1.3. Предложение.** Пусть  $M_1, M_2$  — модули над  $R$  и  $\tau$  —  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  $M_2$ . Тогда топология тихоновского произведения топологических модулей  $(M_1, \tau(M_1))$  и  $(M_2, \tau)$  является:

1) сильнейшей  $(R, \tau_R)$ -модульной топологией на  $M_1 \oplus M_2$  тогда и только тогда, когда  $\tau = \tau(M_2)$ ;

2) предмаксимальной тогда и только тогда, когда  $\tau$  предмаксимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения очевидно.

**1.4. Теорема.** Пусть  $R$  — тело и  $\tau_R$  — кольцевая топология на  $R$  такая, что пересечение любой счетной совокупности множеств, открытых в  $(R, \tau_R)$ , открыто в  $(R, \tau_R)$ , и такая, что  $(R, \tau_R)$  является локально ограниченным слева топологическим кольцом (такое топологическое кольцо существует). Тогда бесконечномерное линейное пространство  ${}_R M$  над  $R$  допускает предмаксимальную отделимую  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Не ограничивая общности, предполагаем, что  $(R, \tau_R)$  — недискретное топологическое кольцо (см. введение). Пусть  $X$  — некоторый базис линейного пространства  ${}_R M$ . Отождествим  ${}_R M$  с  ${}_R M = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$ .

1. Рассмотрим сначала случай, когда  $|X| = \aleph_0$ .

(а) Докажем, что  $\tau(M)$  совпадает с кубиковой топологией  $\tau_c$ , т. е. с топологией с б.о.н.

$$\{W_U \mid U \in \mathcal{B}_R\}, \text{ где } W_U = \{w \mid \pi_x(w) \in U \text{ для любого } x \in X\}.$$

Очевидно, что  $\tau_c$  является  $(R, \tau_R)$ -модульной топологией и, следовательно,  $\tau_c \leq \tau(M)$ .

Проверим обратное соотношение. В самом деле, пусть  $\tau_\oplus$  — финальная групповая топология на  ${}_R M$  относительно естественных вложений  $\rho_x : (R, \tau_R) \rightarrow {}_R M$  (см 1.2). Из тождества  $rx = \rho_x(r)$  и непрерывности алгебраических операций в  $({}_R M, \tau(M))$  следует неравенство  $\tau(M) \leq \tau_\oplus$ . Для завершения доказательства п. (а) достаточно доказать, что  $\tau_\oplus \leq \tau_c$ .

Пусть  $W$  — о.н. в  $({}_R M, \tau_\oplus)$ . В силу теоремы 1.2 можно считать, что  $W = W(\mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F} : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_R$ . Пусть  $\mathcal{O} = \bigcap_{x \in X} \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(x, i)$ . Из равенства  $|X \times \mathbb{N}| =$

$\aleph_0$  и условия теоремы следует, что множество  $\mathcal{O}$  является о.н. в  $(R, \tau_R)$ . Легко видеть, что  $W_{\mathcal{O}} \subseteq W(\mathcal{F})$ . Это завершает доказательство п. (а).

(b) Зафиксируем ограниченную слева окрестность нуля  $U_0 \in \mathcal{B}_R$ . Докажем, что  $(R, \tau_R)$ -модульная топология  $\tau$  на  ${}_R M$  равна  $\tau(M)$  тогда и только тогда, когда  $W_{U_0}$  является о.н. в  $({}_R M, \tau)$ .

Необходимость этого условия очевидна.

Докажем его достаточность. Пусть  $W_{U_0}$  — о.н. в некоторой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau$  на  ${}_R M$ . Так как  $R$  — тело, то для любого  $r \in R$ ,  $r \neq 0$ , множество  $rU_0$  — о.н. в  $(R, \tau_R)$  и множество  $r \cdot W_{U_0}$  — о.н. в  $({}_R M, \tau)$ . Поскольку  $(R, \tau_R)$  недискретно и  $U_0$  ограничено слева, для любого  $U \in \mathcal{B}_R$  существует  $r \neq 0$  такой, что  $rU_0 \subseteq U$ . Тогда для любого  $U \in \mathcal{B}_R$  существует  $r \neq 0$  такой, что  $r \cdot W_{U_0} = W_{rU_0} \subseteq W_U$ . Учитывая п. (а) настоящего доказательства, завершаем доказательство п. (b).

(с) Пусть теперь  $\mathfrak{T}$  — множество всех отделимых  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий  $\tau$  на  $M$  таких, что  $\tau \neq \tau(M)$ . Заметим, что  $\mathfrak{T} \neq \emptyset$  благодаря тихоновской топологии на прямой сумме  ${}_R M = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$  бесконечного множества топологических модулей  $\{({}_R R_x, \tau_R) \mid x \in X\}$ . В силу п. (b) настоящего доказательства  $\mathfrak{T}$  является множеством всех отделимых  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий  $\tau$  на  ${}_R M$  таких, что  $W_{U_0}$  не о.н. в  $({}_R M, \tau)$ . Следовательно,  $\mathfrak{T}$  — индуктивное множество. По лемме Цорна оно содержит максимальный элемент  $\tau_1$ , который и является предмаксимальной топологией на  ${}_R M$ . Доказательство п. 1 завершено.

2. Чтобы доказать теорему для случая  $|X| > \aleph_0$ , достаточно взять подмножество  $Y \subseteq X$  такое, что  $|Y| = \aleph_0$ , рассмотреть разложение

$${}_R M = \left( \bigoplus_{y \in Y} {}_R R_y \right) \oplus \left( \bigoplus_{z \in X \setminus Y} {}_R R_z \right)$$

и воспользоваться предложением 1.3.

**1.5. Лемма.** Пусть  $M_1, M_2$  —  $R$ -модули и  $\tau_0, \tau_1$  —  $(R, \tau_R)$ -модульные топологии на  $M = M_1 \oplus M_2$  такие, что  $\tau_0 \geq \tau_1$ . Если  $\tau_0|_{M_1} = \tau_1|_{M_1}$  и  $\tau_0/\pi_2 = \tau_1/\pi_2$ , где  $\pi_2 : M \rightarrow M_2$  — естественная проекция, то  $\tau_0 = \tau_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\mathcal{B}_i$  — б.о.н. в  $(M, \tau_i)$ ,  $i = 0, 1$ . Докажем, что для любого  $U \in \mathcal{B}_0$  существует  $V \in \mathcal{B}_1$  такое, что  $V \subseteq U$ . Пусть  $U_0 \in \mathcal{B}$  и  $U_1 \in \mathcal{B}_0$  таково, что  $U_1 + U_1 \subseteq U_0$ . Заметим, что множество  $\{U - V \mid U \in \mathcal{B}_0, V \in \mathcal{B}_1\}$  является б.о.н. в  $(M, \tau_1)$ . Тогда по условию леммы существуют  $U_2 \in \mathcal{B}_0$  и  $V \in \mathcal{B}_1$  такие, что  $U_2 \subseteq U_1$ ,  $(U_2 - V) \cap M_1 \subseteq U_1 \cap M_1$  и  $\pi_2(V) \subseteq \pi_2(U_2)$ .

Докажем, что  $V \subseteq U_0$ . В самом деле, пусть  $m \in V$ . Тогда существует  $m' \in U_2$  такой, что  $\pi_2(m) = \pi_2(m')$ . Следовательно,  $m - m' = \pi_1(m) - \pi_1(m') \in (U_2 - V) \cap M_1 \subseteq U_1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} m &= \pi_1(m) + \pi_2(m) = (\pi_1(m') + \pi_2(m')) + (\pi_1(m) - \pi_1(m')) \\ &= m' + (\pi_1(m) - \pi_1(m')) \in U_2 + U_1 \subseteq U_1 + U_1 \subseteq U_0. \end{aligned}$$

**1.6. Следствие.** Пусть  $M_1, M_2$  — модули над  $R$ ,  $M = M_1 \oplus M_2$ . Если  $\tau$  —  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  $M$  такая, что  $\tau|_{M_1} = \tau(M_1)$  и  $\tau/\pi_2$  — предмаксимальная  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  $M_2$ , то  $\tau$  — предмаксимальная  $(R, \tau_R)$ -модульная топология.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\tau_0$  — некоторая  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  $M$  и  $\tau_0 \geq \tau$ . По условию следствия  $\tau_0|_{M_1} = \tau(M_1)$  и  $\tau_0/\pi_2 \geq \tau/\pi_2$ . Если  $\tau_0/\pi_2 = \tau/\pi_2$ , то  $\tau_0 = \tau$  по 1.5. Если  $\tau_0/\pi_2 > \tau/\pi_2$ , то  $\tau_0/\pi_2 = \tau(M_2)$  в силу предмаксимальности  $\tau/\pi_2$ . Тогда  $\tau_0 = \tau(M)$  ввиду 1.3 и 1.5. Следовательно,  $\tau$  — предмаксимальная топология.

**1.7. Теорема.** Пусть  $R$  — тело и  $\tau_R$  — топология на  $R$  такая, что  $(R, \tau_R)$  — неполное топологическое кольцо и линейное пространство  ${}_R R$  над  $R$  допускает некоторую, не обязательно отделимую предмаксимальную  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию  $\tau_p$ . Тогда линейное пространство  ${}_R M = {}_R R \oplus {}_R R$  над  $R$  допускает отделимую предмаксимальную  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как  $(R, \tau_R)$  неполно, существует  $\theta \in \widehat{R} \setminus R$ . В силу того, что  $R$  — тело, линейное пространство  ${}_R M$  можно отождествить с  $R + R \cdot \theta \subseteq \widehat{R}$ .

Пусть  $\mathcal{B}_R$  (соответственно  $\mathcal{B}_{\widehat{R}}$  и  $\mathcal{B}_p$ ) — некоторый б.о.н. в  $(R, \tau_R)$  (соответственно  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  и  $(R, \tau_p)$ ). Легко видеть, что  $\mathcal{B} = \{\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U) \mid \widehat{V} \in \mathcal{B}_{\widehat{R}}, U \in \mathcal{B}_p\}$  является б.о.н. в некоторой отделимой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau$  на  $M$ . Очевидно, что  $\tau|_R = \tau_R = \tau(R)$ .

Чтобы завершить доказательство, достаточно в силу следствия 1.6 проверить, что топология  $\tau/\pi_2$ , где  $\pi_2 : M \rightarrow R$  — естественная проекция, совпадает с  $\tau_p$ .

В самом деле, пусть  $\widehat{V} \in \mathcal{B}_{\widehat{R}}$  и  $U \in \mathcal{B}_p$ . Тогда  $\pi_2(\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U)) = \{r \in U \mid \text{существует } t \in R \text{ такой, что } t + r\theta \in \widehat{V}\} = \{r \in U \mid R \cap (-r\theta + \widehat{V}) \neq \emptyset\}$ . Так как  $R$  плотно в  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ , для любого  $r \in R$  выполнено  $R \cap (-r\theta + \widehat{V}) \neq \emptyset$ . Тем самым  $\pi_2(\widehat{V} \cap \pi_2^{-1}(U)) = U$ , что завершает доказательство.

**1.8. Следствие.** Пусть  $(R, \tau_R)$  — неполное локально ограниченное слева топологическое кольцо такое, что  $R$  — тело. Тогда линейное пространство  $M =$

${}_R R \oplus {}_R R$  над  $R$  допускает отделимую предмаксимальную  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу теоремы 1.7 достаточно построить некоторую, не обязательно отделимую, предмаксимальную  $(R, \tau_R)$ -модульную топологию на линейном пространстве  ${}_R R$ .

Возьмем множество  $X = \{x\}$  и отождествим линейное пространство  ${}_R R$  с  ${}_R R_x = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$ . Рассмотрим множество  $\mathfrak{T}$  всех  $(R, \tau_R)$ -модульных, не обязательно отделимых топологий на  ${}_R R$ , отличных от  $\tau_R$ . Благодаря антидискретной топологии  $\mathfrak{T} \neq \emptyset$ . Аналогично пп. (b) и (c) доказательства теоремы 1.4 доказываются индуктивность множества  $\mathfrak{T}$  и существование в нем максимального элемента, т. е. предмаксимальной топологии.

**1.9. Следствие.** Если  ${}_R M = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$ , где  $(R, \tau_R)$  — топологическое кольцо, удовлетворяющее условию теоремы 1.7 и  $X$  — множество такое, что  $|X| \geq 2$ , то  ${}_R M$  допускает отделимую предмаксимальную топологию.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $x_1, x_2 \in X$  и  $Y = X \setminus \{x_1, x_2\}$ . Если  ${}_R M_1 = \bigoplus_{x \in Y} {}_R R_x$  и  ${}_R M_2 = {}_R R \oplus {}_R R$ , то по теореме 1.7 существует отделимая предмаксимальная топология на  ${}_R M_2$ . Применение леммы 1.3 завершает доказательство.

**1.10. Предложение.** Пусть  $(R, \tau_R)$  — топологическое кольцо и  $X$  — некоторое множество. Если  ${}_R M = \bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$  и  $(R, \tau_R)$  локально ограничено справа, то множество  $\mathcal{B} = \{W(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}_R\}$  (см. теорему 1.2) является б.о.н. топологического модуля  $({}_R M, \tau(M))$ ,

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу 1.2 достаточно проверить, что  $\tau_{\oplus} = \tau(M)$ .

Неравенство  $\tau(M) \leq \tau_{\oplus}$  проверяется аналогично тому, как это делается в доказательстве теоремы 1.4.

В силу того, что  $\tau_{\oplus}$  — групповая топология, для доказательства неравенства  $\tau(M) \geq \tau_{\oplus}$  достаточно проверить, что  $({}_R M, \tau_{\oplus})$  является топологическим  $(R, \tau_R)$ -модулем, т. е. проверить выполнение следующих свойств (см. [4, 1.2.6]):

BN 5') для любого  $W \in \mathcal{B}$  существуют  $U \in \mathcal{B}_R$  и  $W' \in \mathcal{B}$  такие, что  $U \cdot W' \subseteq W$ ;

BN 6') для любых  $r \in R$  и  $W \in \mathcal{B}$  существует  $W' \in \mathcal{B}$  такой, что  $r \cdot W' \subseteq W$ ;

BN 6'') для любых  $v \in {}_R M$  и  $W \in \mathcal{B}$  существует  $V \in \mathcal{B}_R$  такой, что  $V \cdot v \subseteq W$ .

В самом деле, чтобы проверить BN 5', достаточно положить  $W = W(\mathcal{F})$ , взять о.н.  $V \in \mathcal{B}$ , ограниченную справа, и  $W' = W(\mathcal{F}')$ , где  $\mathcal{F}' : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $V \cdot \mathcal{F}'(x, i) \subseteq \mathcal{F}(x, i)$  для каждого  $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$ .

Чтобы проверить BN 6', достаточно положить  $W = W(\mathcal{F})$  и взять  $W' = W(\mathcal{F}')$ , где  $r \cdot \mathcal{F}'(x, i) \subseteq \mathcal{F}(x, i)$  для каждого  $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$ .

Чтобы проверить BN 6''), достаточно предположить, что  $v = \sum_{i=1}^n r_i x_i$ , и взять такое  $V \in \mathcal{B}_R$ , что  $V \cdot r_i \subseteq \mathcal{F}(x_i, i)$  для любого  $1 \leq i \leq n$ .

**1.11. Следствие.** Если топологическое кольцо  $(R, \tau_R)$  в условии предложения 1.10 полно, то и топологический модуль  $({}_R M, \tau(M))$  полон.

Доказательство следствия легко вытекает из равенства  $\tau_{\oplus} = \tau(M)$  (см. доказательство предложения 1.10) и теоремы 8.20 из [3].

**1.12. Теорема.** Пусть  $(R, \tau_R)$  — топологическое кольцо, причем  $R$  — тело; топология  $\tau_R$  определяется вещественной абсолютной величиной  $\|\cdot\|$ ;  $(R, \tau_R)$  полно и не дискретно. Если  ${}_R M$  — линейное пространство над  $R$ , то оно не допускает отделимой предмаксимальной  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии.

Доказательству предположим несколько замечаний.

(а) Так как  $\tau_R$  не дискретно, существует элемент  $s \in R$  такой, что  $0 < \|s\| < 1/2$ . Если для  $n \in \mathbb{N}$  мы обозначим через  $U_n$  множество  $\{r \in R \mid \|r\| < \|s^n\|\}$ , то очевидно, что  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  — б.о.н. в  $(R, \tau_R)$ .

(б) Зафиксируем базис  $X$  в линейном пространстве  ${}_R M$  и отождествим  ${}_R M$  с  $\bigoplus_{x \in X} {}_R R_x$ .

(в) Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  и  $W(f) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid r_i \in U_{f(x_i)} \right\}$ . Тогда очевидно, что  $\{W(f) \mid f : X \rightarrow \mathbb{N}\}$  является б.о.н. в некоторой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau_b$  на  ${}_R M$ , которая называется ящичной (см. [4, 4.1.24]).

(д) Пусть  $F : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — отображение. Обозначим через  $W(F)$  множество всех элементов  $v \in {}_R M$ , которые могут быть представлены в виде  $\sum_{i=1}^n r_i x_i$ , где все  $x_i$  попарно различны и  $r_i \in U_{F(x_i, i)}$  для каждого  $1 \leq i \leq n$ .

В силу 1.10 множество  $\{W(F) \mid F : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  — б.о.н. в  $({}_R M, \tau(M))$ . Не ограничивая общности, считаем, что для каждого  $(x, i) \in X \times \mathbb{N}$  выполнено неравенство

$$F(x, i+1) > F(x, i). \tag{1.12.1}$$

(е) Если  $\tau$  — некоторая  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  ${}_R M$ , то существует б.о.н.  $\mathcal{B}$  такой, что для любых  $r \in R$ ,  $\|r\| < 1$ , и  $W \in \mathcal{B}$  выполнено

$$r \cdot W \subseteq W. \tag{1.12.2}$$

В самом деле, пусть  $\mathcal{N}$  — некоторый б.о.н. в  $({}_R M, \tau)$ . Тогда для любого  $W \in \mathcal{N}$  существуют  $n \in \mathbb{N}$  и  $W' \in \mathcal{N}$  такие, что  $U_n \cdot W' \subseteq W$ . Так как  $\tau_R$  не дискретно и  $R$  — тело, то  $U_n \cdot W'$  является о.н.  $({}_R M, \tau)$ . Следовательно,  $\mathcal{B} = \{U_n \cdot W \mid n \in \mathbb{N}, W \in \mathcal{N}\}$  также б.о.н. в  $({}_R M, \tau)$ . Вложение  $r \cdot U_n \subseteq U_n$  для любого  $r \in R$ ,  $\|r\| < 1$ , завершает доказательство п. (е).

Приступим к доказательству теоремы.

Предположим противное, т. е. что существует отделимая  $(R, \tau_R)$ -модульная предмаксимальная топология  $\tau$  на  ${}_R M$ . Зафиксируем некоторый б.о.н.  $\mathcal{B}$  в  $({}_R M, \tau)$ .

1. Докажем сперва, что  $\tau$  сильнее тихоновской топологии, т. е. что для любого  $x \in X$  естественная проекция  $\pi_x : ({}_R M, \tau) \rightarrow (R_x, \tau_R)$  непрерывна.

Предположим противное, т. е. существует  $y \in X$  такой, что отображение  $\pi_y : ({}_R M, \tau) \rightarrow (R_y, \tau_R)$  разрывно. Так как  $\tau_R$  — сильнейшая  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  $R_y$ , то  $\tau/\pi_y < \tau_R$ . Поскольку топология  $\tau_R$  определяется вещественной абсолютной величиной, из доказательства теоремы 1.1.10 в [4] легко следует, что  $\tau_R$  является минимальной отделимой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологией на  $R_y$ . Следовательно,  $\tau/\pi_y$  неотделима, т. е.  $\ker \pi_y$  незамкнуто в  $({}_R M, \tau)$ . Заметим, что  $\ker \pi_y = \bigoplus_{x \in X \setminus \{y\}} {}_R R_x$ , и обозначим его через  ${}_R M_1$ .

Так как топологическое кольцо  $(R, \tau_R)$  полно и локально ограничено, в силу следствия 1.11 топологическое линейное пространство  $({}_R M_1, \tau(M_1))$  полно. Топология  $\tau$  отделима, так что топологическое линейное пространство  $({}_R M_1, \tau|_{M_1})$  неполно, иначе оно было бы замкнуто в  $({}_R M, \tau)$ . Следовательно,  $\tau|_{M_1} < \tau(M_1)$ .



Отождествим  ${}_R M$  с  ${}_R R \oplus {}_R M_1$  и снабдим его топологией  $\tau^\times$  тихоновского произведения топологических модулей  $({}_R R, \tau_R)$  и  $({}_R M_1, \tau|_{M_1})$ . Очевидно, что  $\tau(M) > \tau^\times > \tau$ , что противоречит предмаксимальности топологии  $\tau$ .

2. Докажем теперь, что  $\tau \geq \tau_b$  (см. п. (с) настоящего доказательства). Предположим противное, т. е.  $\tau \not\geq \tau_b$ . Тогда существует отображение  $f : X \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $W \not\subseteq W(f)$  для любого  $W \in \mathcal{B}$ .

Легко проверить, что множество  $\{s^i \cdot W(f) \mid i \in \mathbb{N}\}$  — б.о.н. в некоторой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau_f$  на  ${}_R M$ . Так как  $W(f)$  — о.н. в  $({}_R M, \tau_f)$  и не является о.н. в  $({}_R M, \tau)$ , то  $\tau \not\geq \tau_f$ . Тогда в силу предмаксимальности  $\tau$

$$\sup\{\tau, \tau_f\} = \tau(M). \quad (1.12.3)$$

Пусть теперь

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i x_i \mid \sum_{i=1}^m \|s^{-f(x_i)}\| \|r_i\| < 1 \right\} \quad (1.12.4)$$

(определение элемента  $s$  см. в п. (а)).

Непосредственно проверяется, что  $W(F) \subseteq V$ , где отображение  $F : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  определено по правилу  $F(x, i) = f(x) + i$ , т. е.  $V$  является о.н. в  $({}_R M, \tau(M))$ . В силу (1.12.3) существуют  $W \in \mathcal{B}$  и  $n \in \mathbb{N}$  такие, что

$$W \cap s^n \cdot W(f) \subseteq V. \quad (1.12.5)$$

Так как  $\|s\| < 1/2$ , имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|s^i\| < 1. \quad (1.12.6)$$

Пусть теперь  $W_1 \in \mathcal{B}$  таково, что  $W_1 + W_1 \subseteq W$ , и  $w_1$  — произвольный элемент из  $W_1 \setminus W(f)$ . Определим по индукции множества  $\{W_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$  и  $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq {}_R M$  так, что  $W_i + W_i \subseteq W_{i-1}$  для любого  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i > 1$ ,

$$\text{для любого } x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \text{supp } w_j \text{ выполняется } \pi_x(W_i) \subseteq s^{(i+2)} \cdot U_{f(x)} \quad (1.12.7)$$

(это возможно в силу п. 1 настоящего доказательства) и  $w_i \in W_i \setminus W(f)$ .

Для любого  $i \in \mathbb{N}$  существует  $y_i \in \text{supp } w_i$  такой, что

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \max \left\{ \frac{\|\pi_x(w_i)\|}{\|s^{f(x)}\|} \mid x \in \text{supp } w_i \right\}.$$

В силу выбора элемента  $w_i$  справедливо неравенство

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} \geq 1. \quad (1.12.8)$$

Заметим, что в силу (1.12.7) для всех  $x \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \text{supp } w_j$  имеем

$$\|\pi_x(w_i)\| < \|s^{(i+2+f(x))}\| < \|s^{f(x)}\|. \quad (1.12.9)$$

Тогда согласно (1.12.8)

$$y_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} \text{supp } w_j. \quad (1.12.10)$$

Для любого  $i \in \mathbb{N}$  положим  $w'_i = s^{(f(y_i)+1)} \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1} \cdot w_i$ . Легко проверяется, что  $\pi_{y_i}(w'_i) = s^{(f(y_i)+1)}$  и

$$\frac{\|\pi_{y_i}(w'_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \max \left\{ \frac{\|\pi_x(w'_i)\|}{\|s^{f(x)}\|} \mid x \in \text{supp } w'_i \right\}. \quad (1.12.11)$$

Из (1.12.11) следует, что для любого  $x \in \text{supp } w_i$  верно

$$\frac{\|\pi_x(w'_i)\|}{\|s^{f(x)}\|} \leq \frac{\|\pi_{y_i}(w'_i)\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \frac{\|s^{(f(y_i)+1)}\|}{\|s^{f(y_i)}\|} = \|s\| < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е.  $w'_i \in W(f)$ .

Из (1.12.8) вытекает, что  $\|(\pi_{y_i}(w_i)) \cdot (s^{f(y_i)})^{-1}\| \geq 1$ . Тогда

$$\|(s^{f(y_i)}) \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1}\| = \|(\pi_{y_i}(w_i)) \cdot (s^{f(y_i)})^{-1}\|^{-1} \leq 1$$

и тем самым  $\|(s^{(f(y_i)+1)}) \cdot (\pi_{y_i}(w_i))^{-1}\| < 1$ . В силу (1.12.2)  $w'_i \in W_i$  (см. определение  $W_i$ ,  $w_i$  и  $w'_i$ ).

Возьмем  $t \in \mathbb{N}$  такое, что  $t > 1/\|s^{(n+2)}\|$  (определение числа  $n$  см. в (1.12.5)), и обозначим  $\sum_{i=1}^t w'_i$  через  $a$ . Докажем, что  $a \in W(f)$ . В самом деле, пусть

$x \in \bigcup_{i=1}^t \text{supp } w'_i$ . Проверим, что  $\|\pi_x(a)\| < \|s^{f(x)}\|$ . Пусть  $x \in \text{supp } w'_k$  и  $x \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} \text{supp } w'_i$  (полагаем  $\bigcup_{i=1}^0 \text{supp } w'_i = \emptyset$ ). Тогда

$$\|\pi_x(a)\| = \left\| \sum_{i=1}^t \pi_x(w'_i) \right\| = \left\| \sum_{i=k}^t \pi_x(w'_i) \right\| \leq \|\pi_x(w_k)\| + \sum_{i=k+1}^t \|\pi_x(w'_i)\|.$$

В силу (1.12.11)

$$\frac{\|\pi_x(w'_k)\|}{\|s^{f(x)}\|} \leq \frac{\|\pi_{y_k}(w'_k)\|}{\|s^{f(y_k)}\|} = \frac{\|s^{(f(y_k)+1)}\|}{\|s^{f(y_k)}\|} = \|s\|,$$

т. е.  $\|\pi_x(w'_k)\| \leq \|s^{(f(x)+1)}\|$ . Заметим также, что в соответствии с (1.12.7) для любого  $i$  такого, что  $k+1 \leq i \leq t$ , выполняется  $\|\pi_x(w'_i)\| \leq \|s^{(i+2)}\| \|s^{f(x)}\|$ . Поэтому вследствие (1.12.6)

$$\begin{aligned} \|\pi_x(a)\| &\leq \|s^{(f(x)+1)}\| + \sum_{i=k+1}^t \|s^{(i+2)}\| \|s^{f(x)}\| \\ &\leq \|s^{(f(x)+1)}\| + \|s^{(f(x)+2)}\| \sum_{i=k+1}^t \|s^i\| \leq \|s^{(f(x)+1)}\| + \|s^{(f(x)+2)}\| \\ &< 2\|s^{(f(x)+1)}\| < \|s^{-1}\| \|s^{(f(x)+1)}\| = \|s^{f(x)}\|, \end{aligned}$$

т. е.  $a \in W(f)$ .

Докажем теперь, что  $s^n \cdot a \in V$ . В самом деле,

$$a = \sum_{i=1}^t w'_i \in \sum_{i=1}^t W_i \subseteq W.$$

Следовательно,  $a \in W$  и в силу (1.12.2)  $s^n \cdot a \in W$ . Из соотношений  $s^n \cdot a \in s^n \cdot W(f)$  и (1.12.5) следует, что  $s^n \cdot a \in V$ . Тогда ввиду (1.12.10)  $\pi_{y_k}(a) = \sum_{i=k}^t \pi_{y_k}(w'_i)$  и, значит,

$$\begin{aligned} \|\pi_{y_k}(a)\| &\geq \|\pi_{y_k}(w'_k)\| - \sum_{i=k+1}^t \|\pi_{y_k}(w'_i)\| \geq \|s^{(f(y_k)+1)}\| - \sum_{i=k+1}^t \|s^{(i+2)}\| \|s^{f(y_k)}\| \\ &= \|s^{(f(y_k)+1)}\| \left(1 - \sum_{i=k+1}^t \|s^{(i+1)}\|\right) > \|s^{(f(y_k)+1)}\| (1 - \|s\|) \\ &> \|s^{(f(y_k)+1)}\| \|s\| = \|s^{(f(y_k)+2)}\|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что  $y_k \in \text{supp } s^n \cdot a$  и что  $\|\pi_{y_k}(s^n \cdot a)\| \geq \|s^{(f(y_k)+n+2)}\|$  для любого  $1 \leq k \leq t$ .

Так как  $s^n \cdot a \in V$ , в силу (1.12.4)

$$\begin{aligned} 1 &> \sum_{x \in \text{supp } a} \|s^{-f(x)}\| \|\pi_x(s^n \cdot a)\| \geq \sum_{k=1}^t \|s^{-f(y_k)}\| \|\pi_{y_k}(s^n \cdot a)\| \\ &\geq \sum_{k=1}^t \|s^{-f(y_k)}\| \|s^{(f(y_k)+n+2)}\| \geq t \|s^{(n+2)}\| \geq 1. \end{aligned}$$

Это противоречие завершает доказательство п. 2.

3. Поскольку  $\tau(M) > \tau$ , по предложению 1.10 существует отображение  $F : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $W \not\subseteq W(F)$  для любого  $W \in \mathcal{B}$ .

Легко доказать, что множество  $\{s^i \cdot W(F) \mid i \in \mathbb{N}\}$  является б.о.н. в некоторой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau_F$  на  ${}_R M$  и  $\tau_F \not\leq \tau$ . В силу предмаксимальности  $\tau$

$$\sup\{\tau, \tau_F\} = \tau(M). \quad (1.12.12)$$

Определим отображение  $H : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  следующим образом:  $H(x, i) = F(x, i) + i$ . Ввиду (1.12.12) существуют  $W \in \mathcal{B}$  и  $n \in \mathbb{N}$  такие, что

$$W \cap s^n \cdot W(F) \subseteq W(H). \quad (1.12.13)$$

Согласно п. 2 настоящего доказательства мы требуем, не ограничивая общности, чтобы для любого  $x \in X$  выполнялось включение  $\pi_x(W) \subseteq U_{F(x, n)+n+1}$ , т. е. для любого  $w \in W$

$$\|\pi_x(w)\| < \|s^{(F(x, n)+n+1)}\|. \quad (1.12.14)$$

Пусть  $w \in W \setminus W(F)$ . Из равенства  $\lim_{j \rightarrow \infty} s^j = 0$  и определения множества  $W(F)$  следует, что  $\{j \in \mathbb{N} \mid s^j \cdot w \in s^n \cdot W(F)\} \neq \emptyset$ . Пусть

$$k = \min\{j \in \mathbb{N} \mid s^j \cdot w \in s^n \cdot W(F)\}.$$

Заметим, что  $k > n$ . В самом деле, предположим противное, т. е. что  $k \leq n$ . Тогда  $n - k \geq 0$ . По определению числа  $k$  верно соотношение  $s^{(k-n)} \cdot w \in W(F)$ . Поэтому по (1.12.2)  $w = s^{(n-k)} \cdot s^{(k-n)} \cdot w \in W(F)$ , что противоречит выбору  $w$ .

В силу (1.12.2)  $s^k \cdot w \in W$ . Тогда по (1.12.13)  $s^k \cdot w \in W(H)$ .

Пусть теперь  $w = \sum_{i=1}^t r_i x_i$ , где все  $x_i$  различны. Не ограничивая общности, считаем, что все слагаемые в этой сумме расположены в таком порядке, что (см. теорему 1.2) для любого  $1 \leq i \leq t$

$$\|s^k \cdot r_i\| < \|s^{H(x_i, i)}\| = \|s^{(F(x_i, i)+i)}\|. \quad (1.12.15)$$

В силу выбора числа  $k$  выполнено  $s^{k-1} \cdot w \notin s^n \cdot W(F)$ . Тогда существует число  $j$  такое, что  $1 \leq j \leq t$  и  $s^{k-1} \cdot r_j \notin s^n \cdot U_{F(x_j, j)}$ . Следовательно,

$$\|s^k \cdot r_j\| \geq \|s^{(F(x_j, j)+n+1)}\|. \quad (1.12.16)$$

Из неравенств (1.12.15) и (1.12.16) получаем, что

$$\|s^{F(x_j, j)+n+1}\| \leq \|s^k \cdot r_j\| < \|s^{(F(x_j, j)+j)}\|,$$

т. е.  $n + 1 > j$ . Значит,  $j \leq n$ .

Так как  $k > 1$ , из неравенств (1.12.14) и (1.12.16) получаем, что

$$\|s^{(F(x_j, n)+n+1)}\| > \|r_j\| > \|s^k \cdot r_j\| \geq \|s^{F(x_j, j)+n+1}\|$$

и тем самым  $F(x_j, n) < F(x_j, j)$ . Это противоречит (1.12.1). Следовательно, топология  $\tau$  не является предмаксимальной.

**1.13. Следствие.** Если  $R$  — тело,  $\tau_R$  — кольцевая топология на  $R$ , которая определяется некоторой вещественной абсолютной величиной, то линейное пространство  ${}_R M$  над  $R$  допускает отделимую предмаксимальную топологию тогда и только тогда, когда либо  $\dim_R M \geq 2$  и  $(R, \tau_R)$  неполно, либо  $(R, \tau_R)$  дискретно и  ${}_R M$  бесконечно.

Доказательство немедленно следует из следствия 1.9 и теоремы 1.12.

## § 2. $n$ -Предмаксимальные топологии на линейном пространстве

**2.1. Замечание.** Зафиксируем непустое множество  $X$ ; отделимое недискретное топологическое кольцо  $(R, \tau_R)$ , являющееся телом, топология которого определяется вещественной абсолютной величиной, и его пополнение  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ ; естественное вложение  $i_R : (R, \tau_R) \rightarrow (\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  (заметим, что  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  является телом с вещественной абсолютной величиной (см. [5, 13.10]); линейное пространство  ${}_R M$  над  $R$  с базисом  $X$ , линейное пространство  ${}_{\widehat{R}} \widehat{M}$  над  $\widehat{R}$  с базисом  $X$  и естественное вложение  $i_M : {}_R M \rightarrow {}_{\widehat{R}} \widehat{M}$ , где  $i_M \left( \sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n i_R(r_i) x_i$ .

Пусть  $\tau$  — некоторая, не обязательно отделимая  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  ${}_R M$ . Обозначим замыкание нулевого подпространства в  $({}_R M, \tau)$  через  $N(\tau)$ ; фактор-пространство линейного пространства  $M$  по подпространству  $N(\tau)$  через  $\dot{M}(\tau)$ ; естественный гомоморфизм с  $M$  на  $\dot{M}(\tau)$  через  $\omega_\tau$ ; топологию  $\tau/\omega_\tau$  через  $\dot{\tau}$ ; пополнение  $(\dot{M}(\tau), \dot{\tau})$  через  $(\overline{\dot{M}}(\tau), \overline{\dot{\tau}})$  (заметим, см. [4, 3.2.31], что  $(\overline{\dot{M}}(\tau), \overline{\dot{\tau}})$  является топологическим линейным пространством над  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ ; каноническое вложение  $(\dot{M}(\tau), \dot{\tau})$  в  $(\overline{\dot{M}}(\tau), \overline{\dot{\tau}})$  через  $i_\tau$ ; суперпозицию отображений  $i_\tau \omega_\tau$  через  $\mu_\tau$ . Очевидно, что  $\mu_\tau = i_\tau \omega_\tau : ({}_R M, \tau) \rightarrow ({}_{\widehat{R}} \overline{\dot{M}}(\tau), \overline{\dot{\tau}})$  — непрерывный гомоморфизм топологических линейных пространств над  $(R, \tau_R)$ . Линейную оболочку множества  $\mu_\tau(M)$  в линейном пространстве  ${}_{\widehat{R}} \overline{\dot{M}}(\tau)$  обозначим через  $\widetilde{M}(\tau)$ ; топологию, индуцированную топологией  $\overline{\dot{\tau}}$  на  $\widetilde{M}(\tau)$ , — через  $\tilde{\tau}$ .

**2.2. Предложение.** Если  $\tau_1, \tau_2$  — некоторые  $(R, \tau_R)$ -модульные топологии на  ${}_R M$  и  $\tau_1 \geq \tau_2$ , то существует единственный непрерывный гомоморфизм  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau_2} : ({}_{\widehat{R}} \widetilde{M}(\tau_1), \tilde{\tau}_1) \rightarrow ({}_{\widehat{R}} \widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$  такой, что  $\mu_{\tau_2} = \tilde{\sigma} \mu_{\tau_1}$ .

**Доказательство. Существование.** Пусть  $N_i = N(\tau_i)$  (см. 2.1) для  $i = 1, 2$ . Так как  $\tau_1 \geq \tau_2$ , то  $N_1 \subseteq N_2$ . Тогда существует единственный гомоморфизм

$\dot{\sigma}$ , который замыкает левый квадрат коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} ({}_R M, \tau_1) & \xrightarrow{\omega_{\tau_1}} & ({}_R \dot{M}(\tau_1), \dot{\tau}_1) & \xrightarrow{i_{\tau_1}} & (\widehat{R} \overline{M}(\tau_1), \bar{\tau}_1) \\ id_M \downarrow & & \dot{\sigma} \downarrow & & \bar{\sigma} \downarrow \\ ({}_R M, \tau_2) & \xrightarrow{\omega_{\tau_2}} & ({}_R \dot{M}(\tau_2), \dot{\tau}_2) & \xrightarrow{i_{\tau_2}} & (\widehat{R} \overline{M}(\tau_2), \bar{\tau}_2). \end{array}$$

Заметим, что  $\dot{\sigma}$  непрерывен. Поскольку  $i_{\tau_1}(\dot{M}(\tau_1))$  плотно в  $(\widehat{R} \overline{M}(\tau_1), \bar{\tau}_1)$  и  $(\widehat{R} \overline{M}(\tau_2), \bar{\tau}_2)$  полно и отделимо, существует единственный непрерывный гомоморфизм  $\bar{\sigma}$ , замыкающий правый квадрат этой диаграммы. Таким образом,  $\mu_{\tau_2} = \bar{\sigma} \mu_{\tau_1}$ .

Из равенства  $\bar{\sigma} \mu_{\tau_1}({}_R M) = \mu_{\tau_2}({}_R M)$  и определения линейных пространств  $\widetilde{M}(\tau_i)$  для  $i \in \{1, 2\}$  следует, что  $\bar{\sigma}(\widetilde{M}(\tau_1)) \subseteq \widetilde{M}(\tau_2)$ . Очевидно, что  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}|_{\widetilde{M}(\tau_1)}$  является искомым отображением.

Его единственность вытекает из единственности гомоморфизма  $\bar{\sigma}$  и того, что  $\widetilde{M}(\tau_1)$  плотен в  $(\widehat{R} \overline{M}(\tau_1), \bar{\tau}_1)$ .

**2.3. Следствие.** Если  $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$  — некоторые  $(R, \tau_R)$ -модульные топологии на  ${}_R M$ , то  $\bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_3} = \bar{\sigma}_{\tau_2, \tau_3} \bar{\sigma}_{\tau_1, \tau_2}$ .

Доказательство немедленно следует из 2.2.

**2.4. Замечание.** Пусть  $Z$  — некоторое множество,  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$  — топологии на  $Z$  такие, что  $(Z, \tau_i)$  — регулярное пространство для  $i \in \{0, 1, 2\}$ , причем  $\tau_i \leq \tau_0$  для  $i \in \{1, 2\}$ . Если  $Y$  — некоторое плотное подмножество в  $(Z, \tau_0)$ , то  $\tau_1 = \tau_2$  тогда и только тогда, когда  $\tau_1|_Y = \tau_2|_Y$ .

Доказательство замечания очевидно.

**2.5. Предложение.** Пусть  $\tau$  — некоторая  $(R, \tau_R)$ -модульная топология на  ${}_R M$  и  $\tau_1, \tau_2$  — две  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульные топологии на  $\widehat{M}(\tau)$ . Тогда  $\mu_{\tau}^{-1}(\tau_1) = \mu_{\tau}^{-1}(\tau_2)$ , если и только если  $\tau_1 = \tau_2$ .

Доказательство. Пусть  $i_M$  — естественное вложение,  $i_M : {}_R M \rightarrow \widehat{R} \widehat{M}$  (см. 2.1). Так как  $X$  — базис линейного пространства  $\widehat{M}$ , существует единственный  $\widehat{R}$ -модульный гомоморфизм  $\nu : \widehat{R} \widehat{M} \rightarrow \widehat{R} \widehat{M}(\tau)$  такой, что  $\mu_{\tau}|_X = \nu i_M|_X$ . Заметим, что поскольку множество  $\mu_{\tau}(X)$  является базисом в линейном пространстве  $\widehat{M}(\tau)$ , отображение  $\nu$  сюръективно.

Докажем необходимость. Предположим противное, т. е. что  $\mu_{\tau}^{-1}(\tau_1) = \mu_{\tau}^{-1}(\tau_2)$  и  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Тогда  $\nu^{-1}(\tau_1) \neq \nu^{-1}(\tau_2)$ . Так как  $R$  является плотным подкольцом в  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ , множество  $i_M({}_R M)$  плотно в  $(\widehat{R} \widehat{M}, \tau(\widehat{M}))$ . В силу замечания 2.4  $i_M^{-1} \nu^{-1}(\tau_1) \neq i_M^{-1} \nu^{-1}(\tau_2)$ . По определению отображения  $\nu$  верно равенство  $\mu_{\tau} = \nu i_M$ . Тогда  $\mu_{\tau}^{-1}(\tau_i) = i_M^{-1} \nu^{-1}(\tau_i)$  для  $i \in \{1, 2\}$ . Следовательно,  $\mu_{\tau}^{-1}(\tau_1) \neq \mu_{\tau}^{-1}(\tau_2)$ , что противоречит условию предложения.

Достаточность очевидна.

**2.6. Лемма.** Пусть  $\tau_1 > \tau_2$  — некоторые  $(R, \tau_R)$ -модульные топологии на  ${}_R M$  такие, что  $\tilde{\tau}_1$  (см. 2.1) является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{M}(\tau_1)$ . Тогда  $\tau_1$  покрывает  $\tau_2$ , если и только если выполняются следующие два условия:

- 1)  $\tilde{\tau}_2$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{M}(\tau_2)$ ;

2)  $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau_2} = 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ.** Докажем сначала условие 1 леммы. Предположим противное: пусть  $\tau_1$  покрывает  $\tau_2$ , но условие 1 не выполнено, т. е.  $\tilde{\tau}_2$  не сильнейшая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология на  $\widetilde{M}(\tau_2)$ .

Обозначим  $\tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau_2}$  через  $\tilde{\sigma}$ . Так как  $\tilde{\tau}_1$  по условию теоремы является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widetilde{M}(\tau_1)$ , то и  $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$  — сильнейшая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная на  $\widetilde{M}(\tau_2)$ , ибо операция взятия фактор-топологии сохраняет порядок на множестве топологий.

Заметим, что  $\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \leq \tilde{\tau}_1$ . Пользуясь равенством  $\tilde{\sigma}\mu_{\tau_1} = \mu_{\tau_2}$ , получаем, что  $\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) = \mu_{\tau_1}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \leq \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \tau_1$ , т. е.

$$\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) \leq \tau_1. \quad (2.6.1)$$

Так как  $\tilde{\tau}_2$  — отделимая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология, по теореме 1.12 она не является предмаксимальной. С учетом того, что  $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$  — сильнейшая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология на  $\widetilde{M}(\tau_2)$ , верно неравенство  $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma} > \tau > \tilde{\tau}_2$  для некоторой  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологии  $\tau$ . В силу предложения 2.5

$$\mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}) > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tau) > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2. \quad (2.6.2)$$

Из неравенств (2.6.1) и (2.6.2) следует, что  $\tau_1 > \mu_{\tau_2}^{-1}(\tau) > \tau_2$ ; противоречие. Таким образом, выполняется условие 1.

Предположим теперь, что не выполнено условие 2, т. е.  $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma} \neq 1$ .

Предположим сначала, что  $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma} > 1$ . Тогда существуют  $S$  — линейное пространство над  $\widehat{R}$  — и сюръективные гомоморфизмы  $\xi : \widetilde{M}(\tau_1) \rightarrow S$  и  $\eta : S \rightarrow \widetilde{M}(\tau_2)$  такие, что  $\tilde{\sigma} = \eta\xi$ , причем  $\dim_{\widehat{R}} \xi \geq 1$  и  $\dim_{\widehat{R}} \eta \geq 1$ . Следовательно, как  $\xi$ , так и  $\eta$  не являются инъективными. Отсюда

$$\tilde{\tau}_1 > \xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi) \quad (2.6.3)$$

и

$$\tilde{\tau}_1/\xi > \eta^{-1}((\tilde{\tau}_1/\xi)/\eta). \quad (2.6.4)$$

Так как  $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$  — сильнейшая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология на  $\widetilde{M}(\tau_2)$ , то  $\tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma} = (\tilde{\tau}_1/\xi)/\eta \geq \tilde{\tau}_2$ . Тогда из (2.6.4) следует, что  $\tilde{\tau}_1/\xi > \eta^{-1}(\tilde{\tau}_2)$ . Из (2.6.3) и последнего неравенства получаем, что  $\tilde{\tau}_1 > \xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi) > \xi^{-1}(\eta^{-1}(\tilde{\tau}_2)) = \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2)$ . В силу последнего неравенства и леммы 2.5  $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) > \mu_{\tau_1}^{-1}(\xi^{-1}(\tilde{\tau}_1/\xi)) > \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2)) = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2$ ; противоречие с предположением, что  $\tau_1$  покрывает  $\tau_2$ .

Предположим теперь, что  $\ker \tilde{\sigma} = \{0\}$ . В силу того, что необходимость условия 1 теоремы уже доказана,  $\tilde{\tau}_2$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widetilde{M}(\tau_2)$ . Тогда  $\tilde{\tau}_2 = \tilde{\tau}_1/\tilde{\sigma}$ . Таким образом,  $\tilde{\sigma}$  является топологическим изоморфизмом и поэтому  $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \mu_{\tau_1}^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \tau_2$ ; противоречие с тем, что  $\tau_1 > \tau_2$ .

**ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Предположим противное, т. е. что условия 1 и 2 выполнены, но  $\tau_1$  не покрывает  $\tau_2$ . Тогда  $\tau_1 > \tau > \tau_2$  для некоторой  $(R, \tau_R)$ -модульной топологии  $\tau$  на  ${}_R M$ . В силу следствия 2.3  $\tilde{\sigma}_{\tau, \tau_2}\tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau} = \tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau_2}$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} ({}_R M, \tau_1) & \xrightarrow{id_M} & ({}_R M, \tau) & \xrightarrow{id_M} & ({}_R M, \tau_2) \\ \mu_{\tau_1} \downarrow & & \mu_{\tau} \downarrow & & \mu_{\tau_2} \downarrow \\ (\widehat{R}\widetilde{M}(\tau_1), \tilde{\tau}_1) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} & (\widehat{R}\widetilde{M}(\tau), \tilde{\tau}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_2} & (\widehat{R}\widetilde{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2), \end{array}$$

где  $\tilde{\sigma}_1 = \tilde{\sigma}_{\tau_1, \tau}$  и  $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_{\tau, \tau_2}$ . По условию 2 либо  $\tilde{\sigma}_2$ , либо  $\tilde{\sigma}_1$  — изоморфизм линейных пространств.

Рассмотрим сначала случай, когда  $\tilde{\sigma}_2$  является таковым. По условию 1  $\tilde{\tau}_2$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{M}(\tau_2)$  и, следовательно,  $\tilde{\tau}$  также сильнейшая на  $\widehat{M}(\tau)$ . Тогда  $\tilde{\sigma}_2$  является топологическим изоморфизмом и, значит,  $\tau_2 = \mu_{\tau_2}^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}_2^{-1}(\tilde{\tau}_2) = \mu_{\tau}^{-1}(\tilde{\tau}) = \tau$ .

Пусть теперь  $\tilde{\sigma}_1$  — изоморфизм. Проверим, что  $\tau_1 = \tau$ .

В самом деле, отождествим  $\ker \tilde{\sigma}_2$  с  $\widehat{R}\widehat{R}$ ,  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau)$  с  $\widehat{R}\widehat{R} \oplus \widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$  и  $\tilde{\sigma}_2$  с естественной проекцией  $\widehat{R}\widehat{R} \oplus \widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$  на  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$ . Поскольку отображение  $\tilde{\sigma}_2 : (\widehat{R}\widehat{R} \oplus \widehat{R}\widehat{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \rightarrow (\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$  непрерывно и  $\tilde{\tau}_2$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$ , то выполняется равенство  $\tilde{\tau}|_{\widehat{M}(\tau_2)} = \tilde{\tau}_2$  и, значит, в силу 1.11  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$  — полное линейное подпространство в  $(\widehat{R}\widehat{M}(\tau), \tilde{\tau})$ . Так как топология  $\tilde{\tau}$  отделима,  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2)$  замкнуто в  $(\widehat{R}\widehat{M}(\tau), \tilde{\tau})$ .

Докажем теперь, что отображение  $\pi : (\widehat{R}\widehat{R} \oplus \widehat{R}\widehat{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \rightarrow (\widehat{R}\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  непрерывно. В самом деле,  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2) = \ker \pi$  замкнуто в  $(\widehat{R}\widehat{M}(\tau), \tilde{\tau})$ , так что топология на  $\widehat{R}\widehat{R}$ , которая является фактор-топологией топологии  $\tilde{\tau}$  по  $\pi$ , отделима. Так как  $\tau_{\widehat{R}}$  — минимальная отделимая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология на  $\widehat{R}\widehat{R}$  (см. доказательство теоремы 1.12, п. 1), то  $\tilde{\tau}/\pi = \tau_{\widehat{R}}$ . Тогда топология  $\tilde{\tau}$  сильнее или равна топологии тихоновского произведения топологических линейных пространств  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  и  $(\widehat{R}\widehat{M}(\tau_2), \tilde{\tau}_2)$  и, значит, отображение  $\pi : (\widehat{R}\widehat{R} \oplus \widehat{R}\widehat{M}(\tau_2), \tilde{\tau}) \rightarrow (\widehat{R}\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$  непрерывно. В силу п. 1 из 1.3  $\tilde{\tau}$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{R}\widehat{M}(\tau)$ . Следовательно,  $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{\tau})$  и  $\tau_1 = \mu_{\tau_1}^{-1}(\tilde{\tau}_1) = \mu_{\tau_1}^{-1}\tilde{\sigma}_1^{-1}(\tilde{\tau}) = \mu_{\tau}^{-1}(\tilde{\tau}) = \tau$ .

**2.7. Лемма.** Пусть  $\widehat{R}N$  — подпространство линейного пространства  $\widehat{R}\widehat{M}$ ,  $\alpha_N : \widehat{R}\widehat{M} \rightarrow \widehat{R}\widehat{M}/N$  — естественное отображение,  $\omega_N = \alpha_N|_{RM}$ . Если  $\hat{\tau}$  — сильнейшая  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульная топология на  $\widehat{R}\widehat{M}$ ,  $\hat{\tau}_N = \hat{\tau}/\alpha_N$ ,  $\tau_N = \hat{\tau}_N|_{\omega_N(RM)}$  и  $\tau = \omega_N^{-1}(\hat{\tau}_N)$ , то существует топологический изоморфизм  $\lambda$ , замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (RM, \tau) & \xrightarrow{\mu_{\tau}} & (\widehat{R}\widehat{M}(\tau), \tilde{\tau}) \\ id_M \downarrow & & \lambda \downarrow \\ (RM, \tau) & \xrightarrow{\omega_N} & (\widehat{R}\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N). \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим  $\hat{\tau}_N|_{\omega_N(M)}$  через  $\tau_N$ . Очевидно, что

$$\tau/\omega_N = (\omega_N^{-1}(\hat{\tau}_N))/\omega_N = \hat{\tau}_N|_{\omega_N(M)} = \tau_N. \quad (2.7.1)$$

Заметим, что  $\hat{\tau}_N$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widehat{M}/N$ , так что топологическое линейное пространство  $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$  отделимо (см. 1.2 и 1.10) и полно (см. 1.11). Так как оно отделимо, то  $\bigcap_{V \in \widehat{\mathcal{B}}_N} V = \{0\}$ , где  $\widehat{\mathcal{B}}_N$  —

некоторый б.о.н. в  $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$ . Тогда

$$[\{0\}]_{(M, \tau)} = \bigcap_{V \in \widehat{\mathcal{B}}_N} \omega_N^{-1}(V) = \omega_N^{-1}\left(\bigcap_{V \in \widehat{\mathcal{B}}_N} V\right) = \omega_N^{-1}\{0\}.$$

Следовательно,

$$\ker \omega_\tau = [\{0\}]_{(M, \tau)} = \ker \omega_N \tag{2.7.2}$$

(определение  $\omega_\tau$  см. в 2.1).

В силу (2.7.1) и (2.7.2) существует топологический изоморфизм  $\varkappa$ , замыкающий левый квадрат следующей коммутативной диаграммы (через  $i_N$  обозначено естественное вложение):

$$\begin{array}{ccccc} ({}_R M, \tau) & \xrightarrow{\omega_\tau} & ({}_R \widehat{M}(\tau), \hat{\tau}) & \xrightarrow{i_\tau} & ({}_{\widehat{R}} \overline{M}(\tau), \bar{\tau}) \\ id_M \downarrow & & \varkappa \downarrow & & \lambda \downarrow \\ ({}_R M, \tau) & \xrightarrow{\omega_N} & (\omega_N(M), \tau_N) & \xrightarrow{i_N} & ({}_{\widehat{R}} \widehat{M}/N, \hat{\tau}_N). \end{array}$$

Поскольку  $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$  полон и  $i_N \omega_N(M)$  плотно в  $(\widehat{M}/N, \hat{\tau}_N)$ , существует топологический изоморфизм  $\lambda$ , замыкающий правый квадрат упомянутой диаграммы.

Заметим, что поскольку линейное пространство  ${}_{\widehat{R}} \widehat{M}/N$  является линейной оболочкой множества  $i_N \omega_N(X)$ , то и  ${}_{\widehat{R}} \overline{M}$  — линейная оболочка множества  $i_\tau \omega_\tau(X)$ . Следовательно,  $\overline{M} = \widehat{M}$ , что завершает доказательство.

**2.8. Теорема.** Пусть  ${}_R M$  и  ${}_{\widehat{R}} \widehat{M}$  — линейные пространства, введенные в 2.1. Зафиксируем некоторый б.о.н.  $\widehat{\mathcal{B}}$  в сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологии  $\hat{\tau}$  на  ${}_{\widehat{R}} \widehat{M}$ . отождествим  ${}_R M$  с его образом в  ${}_{\widehat{R}} \widehat{M}$  относительно естественного вложения  $i_M$ . Тогда  $(R, \tau_R)$ -модульная топология  $\tau$  на  ${}_R M$   $n$ -предмаксимальна, если и только если существует  $n$ -мерное линейное подпространство  ${}_{\widehat{R}} N \subseteq {}_{\widehat{R}} M$  такое, что множество  $\{(N + W) \cap M \mid W \in \widehat{\mathcal{B}}\}$  является б.о.н. в топологическом линейном пространстве  $({}_R M, \tau)$ .

**Доказательство.** **Необходимость.** Если  $\tau$  является  $n$ -предмаксимальной топологией, то существует максимальная цепь  $(R, \tau_R)$ -модульных топологий  $\tau(M) = \tau_0 > \tau_1 > \dots > \tau_n = \tau$ . Для каждого  $i \in \{1, \dots, n\}$  рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} ({}_R M, \tau_{i-1}) & \xrightarrow{id_M} & ({}_R M, \tau_i) \\ \mu_{\tau_{i-1}} \downarrow & & \mu_{\tau_i} \downarrow \\ ({}_{\widehat{R}} \widetilde{M}(\tau_{i-1}), \tilde{\tau}_{i-1}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_i} & ({}_{\widehat{R}} \widetilde{M}(\tau_i), \tilde{\tau}_i), \end{array}$$

где  $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{\tau_{i-1}, \tau_i}$  (см 2.2).

Очевидно, что  $({}_{\widehat{R}} \widetilde{M}(\tau_0), \tilde{\tau}_0)$  можно отождествить с  $({}_{\widehat{R}} \widehat{M}, \hat{\tau})$ , а  $\mu_{\tau_0}$  — с  $i_M$ . Индукцией по  $i$  с использованием леммы 2.6 получаем, что  $\tilde{\tau}_i$  является сильнейшей  $(\widehat{R}, \tau_{\widehat{R}})$ -модульной топологией на  $\widetilde{M}_{\tau_i}$ ,  $\tilde{\sigma}_i$  — непрерывным и открытым гомоморфизмом топологических линейных пространств и  $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma}_i = 1$ . Из коммутативности вышеуказанной диаграммы следует, что  $\tau = \tau_n = \mu_{\tau_n}^{-1}(\tilde{\tau}_n) = i_M^{-1} \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{\tau}_n)$ , где  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_n \tilde{\sigma}_{n-1} \dots \tilde{\sigma}_1$ . Заметим, что  $\dim_{\widehat{R}} \ker \tilde{\sigma} = n$ . Так как отображение  $\tilde{\sigma}$  непрерывно и открыто, то  $\{(\ker \tilde{\sigma} + W) \cap M \mid W \in \widehat{\mathcal{B}}\}$  является б.о.н. в  $({}_R M, \tau)$ .

**Достаточность.** Пусть  $\{(N + W) \cap M \mid W \in \widehat{\mathcal{B}}\}$  является б.о.н. в  $({}_R M, \tau)$ , где  $\dim_{\widehat{R}} N = n$ . Возьмем такие подпространства  $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_n = N$  в



линейном пространстве  $\widehat{R}\widehat{M}$ , что  $\dim_{\widehat{R}} N_i = i$  для  $1 \leq i \leq n$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} ({}_R M, \tau_{i-1}) & \xrightarrow{id_M} & ({}_R M, \tau_i) \\ \omega_{i-1} \downarrow & & \omega_i \downarrow \\ (\widehat{R}\widehat{M}/N_{i-1}, \hat{\tau}_{N_{i-1}}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}_i} & (\widehat{R}\widehat{M}/N_i, \hat{\tau}_{N_i}), \end{array}$$

где  $\omega_i = \omega_{N_i}$ , топологии  $\hat{\tau}_{N_i}$  введены в лемме 2.7,  $\tau_i = \omega_i^{-1}(\hat{\tau}_{N_i})$ , и  $\tilde{\sigma}_i : \widehat{M}/N_{i-1} \rightarrow \widehat{M}/N_i$  — естественные гомоморфизмы. В силу леммы 2.7 все гомоморфизмы  $\omega_i : ({}_R M, \tau_i) \rightarrow (\widehat{R}\widehat{M}/N_i, \hat{\tau}_{N_i})$  в вышеназванной диаграмме могут быть заменены гомоморфизмами  $\mu_{\tau_i} : ({}_R M, \tau_i) \rightarrow (\widehat{R}\widehat{M}(\tau_i), \hat{\tau}_i)$  для  $0 \leq i \leq n$ . Так как топологии  $\hat{\tau}_{N_i}$  и отображения  $\tilde{\sigma}_i$  удовлетворяют условиям 1 и 2 леммы 2.6, то  $\tau_{i-1}$  покрывает  $\tau_i$  для любого  $1 \leq i \leq n$ .

**2.9. Следствие.** Пусть  $\tau$  —  $n$ -предмаксимальная топология на  ${}_R M$ . Тогда существует такое конечномерное топологическое линейное пространство  $({}_R M_1, \tau_1)$  над  $(R, \tau_R)$ , что  $({}_R M, \tau)$  топологически изоморфно тихоновскому произведению топологических линейных пространств  $({}_R M_1, \tau_1)$  и  $({}_R M_2, \tau_2)$ , где  $\tau_1$  является  $n$ -предмаксимальной на  ${}_R M_1$  и  $\tau_2$  — сильнейшей  $(R, \tau_R)$ -модульной топологией на  ${}_R M_2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу теоремы 2.8  $({}_R M, \tau)$  допускает б.о.н.  $\{(N + W(F)) \cap {}_R M \mid F : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$  (см. доказательство теоремы 1.12, п. (d)) для некоторого  $n$ -мерного подпространства  $N$  в  $\widehat{R}\widehat{M}$ . Тогда  $N$  содержится в подпространстве  $\widehat{R}\widehat{M}_1 \subseteq \widehat{R}\widehat{M}$ , являющемся линейной оболочкой некоторого конечного множества  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . Обозначим через  $\widehat{R}\widehat{M}_2$  линейную оболочку множества  $X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ . Тогда  $\widehat{R}\widehat{M} = \widehat{R}\widehat{M}_1 \oplus \widehat{R}\widehat{M}_2$  и, следовательно,  $(N + W(F)) \cap \widehat{R}\widehat{M} = (N + (W(F) \cap \widehat{R}\widehat{M}_1)) + (W(F) \cap \widehat{R}\widehat{M}_2)$ . Утверждение теоремы следует из последнего равенства.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арнаутков В. И., Филиппов К. М. О предмаксимальных топологиях на векторных пространствах // Bul. Acad. Ştiinţ. Republicii Moldova. Matematica. 1996. V. 1. P. 96–105.
2. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
3. Roelcke W., Dierolf S. Uniform structures of topological groups and their quotients. New York: McGraw Hill inc, 1981.
4. Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the theory of topological rings and modules. New York; Basel; Honh Kong: Marcel Dekker inc, 1996.
5. Warner S. Topological rings. Amsterdam; London; New York; Tokyo: North-Holland, 1993.

Статья поступила 13 мая 1998 г.

Арнаутков Владимир Иванович  
Институт математики Академии наук республики Молдова  
ул. Академией 5, Кишинев, MD-2028, Молдова  
arnautov@math.md

Филиппов Кирилл Михайлович  
Институт математики Академии наук республики Молдова  
ул. Академией 5, Кишинев, MD-2028, Молдова  
filippov@math.md