Yu. K. Demjanovich, On stability of projection methods, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 23, 7–15

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Ю.К.Демьянович

Необходимые и достаточные условия устойчивости приближенных методов получил С.Г.Михлин [1]. Настоящая работа посвящена вопросу о выборе пространств, в которых удобно изучать устойчивость проекционных методов. Здесь дано обобщение построений, рассмотренных для проекционно-сеточных методов в случае эллиптических уравнений второго порядка в заметке [2].

В первом и втором пунктах изучаются вопросы об устойчивости уравнений с оператором, подчиненным некоторому условию коэрцитивности, и о разрешимости возмущенного уравнения. В третьем пункте рассмотрен вопрос о выборе пространств, в которых проекционный метод устойчив, а далее в пункте 4^0 установлено, что в случае положительно определенного оператора все ортогональные проекционные методы устойчивы в энергетической метрике.

I^0 Пусть на прямом произведении линейных пространств X_1 и X_{-1} определено внешнее скалярное произведение (v, w), $v \in X_1$, $w \in X_{-1}$. Рассмотрим банахово пространство X, норму в котором обозначим через $\|u\|$, $u \in X$. Пусть линейный оператор B действует из пространства X в пространство X_1 и имеет область определения $\mathcal{D}(B) \subset X$.

Рассмотрим линеал X^1_{-1} элементов δ пространства X_{-1} для которых

$$\sup_{v \in \mathcal{D}(B)} \frac{|(\delta, Bv)|}{\|v\|} < +\infty .$$

Через N обозначим линейное пространство элементов δ из X^1_{-1} таких, что

$$(\delta, Bv) = 0, \qquad v \in \mathcal{D}(B),$$

и рассмотрим фактор-пространство

$$X_{-1,B} = X^1_{-1} / N$$

в котором норму определим равенством

$$\|\delta\|_B = \sup_{v \in \mathcal{D}(B)} \frac{|(\delta, Bv)|}{\|v\|} . \qquad (1.1)$$

Пусть линейные операторы A и Γ действуют из пространства X в пространство X_{-1}, а элементы f и δ принадлежат пространству X_{-1}. Через $\|\Gamma\|_B$ обозначим норму оператора Γ, как оператора действующего из пространства X в $X_{-1,B}$.

Рассмотрим уравнения

$$A v = f, \tag{I.2}$$

$$(A+\Gamma) v = f + \delta . \tag{I.3}$$

Теорема I. Предположим, что справедливы неравенства

$$(Av, Bv) \geq \gamma \|v\|^2, \quad v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B), \tag{I.4}$$

$$\|\Gamma\|_B < \gamma, \tag{I.5}$$

где γ положительная постоянная. Пусть уравнения (I.2) и (I.3) имеют решения v_* и v_*' соответственно из линеала $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Тогда

$$\|v_*' - v_*\| \leq \gamma^{-1}(1-\gamma^{-1}\|\Gamma\|_B)^{-1}(\|\Gamma\|_B \|v_*\| + \|\delta\|_B). \tag{I.6}$$

Доказательство. Из соотношений (I.2) - (I.3) после скалярного умножения на $B(v_*' - v_*)$ получим

$$(A(v_*' - v_*) + \Gamma v_*', B(v_*' - v_*)) = (\delta, B(v_*' - v_*)), \tag{I.7}$$

так что в силу неравенства (I.4)

$$\|v_*' - v_*\| \leq \gamma^{-1}(\|\Gamma\|_B \|v_*'\| + \|\delta\|_B).$$

Теперь из неравенства

$$\|v_*'\| \leq \|v_*' - v_*\| + \|v_*\|$$

и из условия (I.5) получим соотношение (I.6).

Теорема доказана.

Замечание I. Пусть X_0 некоторое нормированное пространство; норму в X_0 обозначим через $\|\cdot\|_0$. Предположим, что $v'_*, v_* \in X_0$ и что справедливы неравенства

$$(Av, Bv) \geqslant \gamma \|v\| \cdot \|v\|_0 , \quad v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \cap X_0 ,$$

$$\|\Gamma\|_{0,B} < \gamma, \quad \|\Gamma\|_{0,B} \underset{def}{=} \|\Gamma\|_{[X_0 \to X_{-1,B}]} .$$

Тогда из соотношения (I.7) легко получается оценка

$$\|v'_* - v_*\|_0 \leqslant \gamma^{-1}(1-\gamma^{-1}\|\Gamma\|_{0,B})^{-1} (\|\Gamma\|_{0,B} \|v_*\| + \|\delta\|_B) .$$

2° Перейдем к вопросу о разрешимости уравнения (I.3)

Теорема 2. Пусть справедливы неравенства (I.4) и (I.5). Предположим, что уравнение (I.2) разрешимо при любом $f \in X^1_{-1}$

Тогда уравнение (I.3) однозначно разрешимо при любой правой части из пространства X_{-1} .

Доказательство. Разрешимость уравнения (I.2) при любом $f \in X^1_{-1}$ вместе с условием (I.4) означает существование оператора A^{-1} . Уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$v + A^{-1}\Gamma v = w , \quad w \underset{def}{=} A^{-1}(f+\delta) . \qquad (2.I)$$

Из неравенства (I.4) получим

$$\|A^{-1}\Gamma v\|^2 \leqslant \gamma^{-1}(\Gamma v, BA^{-1}\Gamma v),$$

так что

$$\|A^{-1}\Gamma v\| \leqslant \gamma^{-1} \|\Gamma v\|_B ,$$

откуда в виду условия (I.5)

$$\|A^{-1}\Gamma\|_{[X \to X]} < 1 .$$

Итак, уравнение (2.I), а вместе с ним и уравнение (I.3) однозначно разрешимы. Теорема доказана.

3° Пусть оператор $\mathfrak{A}$ действует из пространства X в X^1_{-1} и непрерывно обратим. Пусть уравнение

$$\mathfrak{A}u = f , \quad f \in X^1_{-1} \qquad (3.I)$$

решается проекционным методом: в пространствах X и X^1_{-1} с внешним скалярным произведением $(u,u')_0$, $u\in X$, $u'\in X^1_{-1}$, выделены подпространства $\widetilde{X}\subset \mathcal{D}(\mathfrak{A})$ и $\widetilde{X}^1_{-1}$ и задана операция проектирования P пространства X^1_{-1} на $\widetilde{X}$. Обозначим через $\theta(\mathfrak{A}\widetilde{X},\widetilde{X}'_{-1})$ раствор подпространств $\mathfrak{A}\widetilde{X}$ и $\widetilde{X}'_{-1}$ банахова пространства $X^1_{-1,B}$.

Если выполнено условие Н.И.Польского

$$\theta(\mathfrak{A}\widetilde{X},\ \widetilde{X}'_{-1})\leqslant \theta_0 < 1\ , \tag{3.2}$$

то норма решения $\widetilde{u}_*$ приближенной задачи

$$P\mathfrak{A}\widetilde{u} = Pf,\quad \widetilde{u}\in\widetilde{X}, \tag{3.3}$$

оценивается ([3] , стр.198) через $\|f\|_{-1,B}$ и θ_0,

$$\|\widetilde{u}_*\|_X\leqslant C_0\ ,\quad C_0=C_0(\|f\|_{-1,B}\ ,\ \theta_0). \tag{3.4}$$

Обычно задачу (3.3) рассматривают в паре линейных пространств $\overline{X}$ и $\overline{X}_{-1}$, изоморфных пространствам $\widetilde{X}$ и $\widetilde{X}^1_{-1}$ соответственно,

$$\Psi\overline{X}=\widetilde{X}\ ,\qquad \chi\overline{X}_{-1}=\widetilde{X}'_{-1}\ ;$$

здесь Ψ и χ заданные линейные изоморфизмы.

Если норму в пространстве $\overline{X}$ и внешнее скалярное произведение между пространствами $\overline{X}$ и $\overline{X}_{-1}$ ввести равенствами

$$\|v\|\underset{def}{=}\|\Psi v\|_X\ ,\quad v\in\overline{X}\ , \tag{3.5}$$

$$(v',v'')\underset{def}{=}(\Psi v',\chi v'')_0,\quad v'\in\overline{X},\ v''\in\overline{X}_{-1}\ , \tag{3.6}$$

то к задаче (3.3) можно применить теоремы I и 2, считая в этих теоремах, что

$$X_1= X=\overline{X},\qquad X'_{-1}=\overline{X}_{-1}\ ,$$

$$(P'\mathfrak{A}\Psi v\ ,\ \chi v_1)=(Av,v_1),\ v\in\overline{X}\ ,\ v_1\in\overline{X}_{-1}\ ,$$

и выбирая в качестве оператора B некоторый оператор, действующий в $\overline{X}$. Рассмотрим теперь семейство пар пространств $(\overline{X}\ ,\ \overline{X}'_{-1})$, зависящих от некоторого параметра h, и соответствующее семейство приближенных задач вида (3.3). В семействе соответствующих пар пространств $(\bar{X}, \bar{X}_{-1})$, получается семейство уравнений вида (I.2), которое будем называть методом приближенного решения задачи (3.I).

Определение. Пусть рассматривается семейство уравнений вида (I.2). Будем говорить, что метод приближенного решения (I.2) B - устойчив в метриках (3.5) - (3.6), если для решений v_* и v_*' уравнений (I.2) и (I.3) соответственно справедлива оценка

$$\| v_*' - v_* \| \leqslant C_1 \| \Gamma \|_B + C_2 \| \delta \|_B ,$$

где C_1 и C_2 не зависящие от h константы.

Замечание 2. Из определения ясно, что понятие B - устойчивости зависит не только от оператора B, но и от фигурирующих в рассмотрении пространств $\bar{X}$ и $\bar{X}_{-1}$.

Из предыдущего вытекает

Теорема 3. Пусть справедливы неравенства (I.4) и (3.2), а фигурирующие там числа C и θ_0 не зависят от h. Тогда приближенный метод (I.2) B - устойчив.

4° Пусть в гильбертовом пространстве H действует положительно определенный самосопряженный оператор $\mathfrak{A}$,

$$(\mathfrak{A} u, u)_0 \geqslant \gamma (u, u)_0 , \quad u \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}), \ \gamma > 0. \tag{4.I}$$

За X примем энергетическое пространство $H_{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$. Пусть $\tilde{X}$ подпространство в X, а $\bar{X}$ изоморфное ему линейное подпространство,

$$\psi \bar{X} = \tilde{X} ;$$

здесь через ψ обозначен линейный изоморфизм. Определим норму, скалярное произведение и оператор A в пространстве $\bar{X}$ равенствами

$$\| v \| \underset{\text{def}}{=} \| \psi v \|_{H_{\mathfrak{A}}} , \quad (v, v_1) \underset{\text{def}}{=} (\psi v, \psi v_1)_0 , \tag{4.2}$$

$$(A v, v)_0 \underset{\text{def}}{=} \| \psi v \|^2_{H_{\mathfrak{A}}} , \quad v, v_1 \in \bar{X} . \tag{4.3}$$

Для решения уравнения

$$\mathfrak{A} u = f , \quad f \in H , \tag{4.4}$$

построим приближенный метод вида (I.2) из задачи на минимум функционала энергии оператора $\mathfrak{A}$ на подпространстве $\tilde{X}$.

Всякий такой метод в дальнейшем будем называть ортогональным проекционным методом. Таким образом, метод Ритца, проекционно-сеточные методы [4] и различные проекционные методы прямых [4] являются ортогональными проекционными методами. Известно [5], что для решения v_* так построенного уравнения (I.2) справедливо неравенство

$$\|\Psi v_*\| \leqslant \|u_*\|,$$

где u_* - решение задачи (4.4), откуда

$$\|v_*\| \leqslant \|u_*\|_{H_\alpha} . \tag{4.5}$$

Из формул (4.2) - (4.3) имеем

$$(Av, v) = \|v\|^2 . \tag{4.6}$$

Опять рассмотрим семейство подпространств $\widetilde{X}$ и семейство соответствующих приближенных уравнений (2.I). Через I обозначим тождественный оператор в пространстве $\widetilde{X}$. Соотношения (4.5) и (4.6) в соответствии с теоремами I и 2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 4. Ортогональные проекционные методы I - устойчивы в метриках, задаваемых формулами (4.2).

Замечание 3. Для метода сеток в случае эллиптических уравнений в частных производных второго порядка этот результат установлен в заметке [2], а для сеточных методов в эллиптических задачах высшего порядка отмечен в работе [4].

Замечание 4. Можно рассмотреть устойчивость ортогональных проекционных методов для уравнений вида

$$\mathcal{A}u + Tu = f, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(T),$$

(см. [2], где это проделано для задач, упомянутых в замечании 3).

Замечание 5. Нормы, определяемые равенствами (4.2) - (4.3), обычно не удобны для практического использования. Поэтому возникает вопрос о построении удобных норм, эквивалентных нормам (4.2) - (4.3). Для случаев, указанных в замечании 3, это выполнено в работах [2] и [4].

5° Теперь рассмотрим устойчивость в задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t), \quad v(0) = v_0, \quad 0 < t \leqslant T . \tag{5.I}$$

Для краткости ограничимся случаем самосопряженного положительно определенного и независящего от переменной t оператора A в гильбертовом пространстве H; $f, v_0 \in H$.

Наряду с задачей (5.I) рассмотрим задачу с возмущениями оператора Γ, правой части δ и начального условия γ,

$$\frac{dv}{dt}+(A+\Gamma(t))v=f(t)+\delta(t), \quad v(0)=v_0+\gamma, \tag{5.2}$$

Пусть v_* и v_{**} решения задач (5.I) и (5.2) соответственно. Тогда разность $w=v_{**}-v_*$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{dw}{dt}+Aw+\Gamma(t)v_{**}=\delta, \quad w(0)=\gamma. \tag{5.3}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau,t)$ вещественных переменных τ,t заданную в полуплоскости $\{-\infty<\tau<+\infty,\ t>0\}$ формулой

$$\varphi(\tau,t) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} e^{-t} & \text{при } \tau\leqslant 0, \\ \max\{1, (\frac{\tau}{te})^{\tau}\} & \text{при } \tau>0 \end{cases} .$$

Пусть $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ — вещественные числа. При $t>0$ легко получить неравенство

$$\|A^{\alpha}w(t)\|^2\leqslant|(A^{\alpha-\alpha_1}e^{-At}A^{\alpha_1}\gamma,\ A^{\alpha}w(t))|+$$

$$+\int_0^t|(A^{\alpha-\alpha_2}e^{-(t-s)A}A^{\alpha_2}\delta,\ A^{\alpha}w(t))|ds+$$

$$+\int_0^t|(A^{\alpha+\alpha_3}e^{-(t-s)A}A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}A^{\alpha}v_{**}(s), A^{\alpha}w(t))|ds,$$

так что используя почти очевидное соотношение

$$\|A^{\tau}e^{-At}\|\leqslant\varphi(\tau,t),$$

будем иметь

$$\|A^{\alpha}w(t)\|\leqslant\varphi(\alpha-\alpha_1,t)\|A^{\alpha_1}\gamma\|+\int_0^t\varphi(\alpha-\alpha_2,t-s)\|A^{\alpha_2}\delta(s)\|ds+$$

$$+\int_0^t\varphi(\alpha+\alpha_3,t-s)\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\|\cdot\|A^{\alpha}v_{**}(s)\|ds. \tag{5.4}$$

Теперь в виду неравенства

$$\|A^{\alpha}v_{**}(s)\| \leqslant \|A^{\alpha}(v_{**}-v_{*})(s)\| + \|A^{\alpha}v_{*}(s)\|$$

из формулы (5.4) получим

$$\|A^{\alpha}w(t)\| - \int_0^t \varphi(\alpha+\alpha_3, t-s)\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\|\cdot\|A^{\alpha}w(s)\|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(\alpha-\alpha_1, t)\|A^{\alpha_1}\gamma\| + \int_0^t \varphi(\alpha-\alpha_3, t-s)\|A^{\alpha_2}\delta(s)\|\,ds +$$

$$+\int_0^t \varphi(\alpha+\alpha_3, t-s)\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\|\cdot\|A^{\alpha}v_{*}(s)\|\,ds. \qquad (5.5)$$

Пусть B_1 и B_2 банаховы пространства вещественных функций $\psi(t)$ одной переменной, определенных на промежутке $[0,T]$, причем $B_1 \subset B_2$. Норму в пространстве B_1 обозначим через $|\psi|_1$, $\psi \in B_1$, а норму в пространстве B_2 – через $|\psi|_2$, $\psi \in B_2$. Предположим, что нормы в пространствах B_1 и B_2 монотонны: если $0 \leqslant \psi_1 \leqslant \psi_2$, $\psi_s \in B_k$, $s=1,2$, то $|\psi_1|_k \leqslant |\psi_2|_k$, где $k=1,2$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$K\psi \underset{def}{=} \int_0^t \varphi(\alpha+\alpha_3, t-s)\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\|\psi(s)\,ds,$$

как оператор из пространства B_1 в пространство B_2.

Из неравенства (5.5) вытекает следующее утверждение.

<u>Теорема 5</u>. Пусть оператор $I-K$ имеет положительный [3] левый обратный. Тогда

$$\big|\|A^{\alpha}w(t)\|\big|_1 \leqslant C_0\Big\{|\varphi(\alpha-\alpha_1, t)|_2\,\|A^{\alpha_1}\gamma\| +$$

$$+\Big|\int_0^t \varphi(\alpha-\alpha_2, t-s)\|A^{\alpha_2}\delta(s)\|\,ds\Big|_2 +$$

$$+\left|\int_0^t \varphi(\alpha+\alpha_3, t-s)\,\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\|\cdot\|A^{\alpha}v_*(s)\|\,ds\right|_2 ,$$

где константа C определяется оператором K и пространствами B_1 и B_2 .

Замечание. Если $\alpha+\alpha_3 < 1$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $\|A^{-\alpha_3}\Gamma(s)A^{-\alpha}\| < \varepsilon$ условия теоремы 5 выполнены.

Литература

I Михлин С.Г. Об устойчивости некоторых вычислительных процессов, ДАН, 1964, 157, №2, 271-273.

2 Демьянович Ю.К. Устойчивость метода сеток для эллиптических задач, ДАН, 1965, 164, №1, 20-23.

3 Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений, М., "Наука", 1969.

4 Демьянович Ю.К. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений. Журн.вычисл.мат.и мат.физ.,1968,8,№1, 79-96.

5 Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов, М., "Наука", 1966.