



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Венков, Об акцессорных коэффициентах  
в уравнении Шварца, *Докл. АН СССР*, 1983,  
том 270, номер 5, 1042–1045

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

18 января 2025 г., 07:10:05



коэффициентами. При этом несколько конкретизируются требования к форме  $a(u, v)$  (см. (13), (14)). Во-вторых, на основании оценок из [6] в теореме о повышении гладкости ослаблены требования к коэффициентам уравнения. Наконец, неоднородная краевая задача изучена для более общих уравнений.

В работах [1, 2] не изучался вопрос о зависимости гладкости решения от гладкости граничных условий. В данной работе введено пространство  $W^{r, \sigma}$  и доказан изоморфизм (20).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. П.И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

Математический институт им. В.А. Стеклова  
Академии наук СССР, Москва

Поступило  
1 XI 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Тр. МИАН, 1979, т. 150, с. 212–238.
2. Лизоркин П.И., Никольский С.М. – Там же, 1981, т. 157, с. 90–118.
3. Лизоркин П.И., Никольский С.М. – ДАН, 1981, т. 259, № 1, с. 21–23.
4. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.
5. Лионс Ж., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
6. Agmon S. Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton, 1965. 291 p.

УДК 517.941

МАТЕМАТИКА

А.Б. ВЕНКОВ

### ОБ АКЦЕССОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В УРАВНЕНИИ ШВАРЦА

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 14 X 1982)

Дифференциальное уравнение Шварца появляется при изучении конформного отображения верхней полуплоскости  $H \subset C$  на многоугольник  $M$ , ограниченный дугами окружностей. Если  $z$  – отображающая функция, то

$$(1) \quad \{z, J\} = Q_M(J),$$

где  $\{z, J\}$  – производная Шварца,  $\{z, J\} = z'^{-1}z'' - \frac{3}{2}z''^2z'^{-2}$ ,  $Q_M$  – рациональная

функция, однозначно определяемая  $M$  и имеющая полюсы второго порядка в точках  $a_k$ , которые соответствуют вершинам  $M$ . Коэффициенты при этих полюсах выражаются простыми формулами через величины внутренних углов  $M$  (см. [1–4]). Однако, насколько нам известно, до настоящего времени нет точных формул для  $n - 2$  коэффициентов  $X_k$  (акцессорных коэффициентов) при полюсах первого порядка в точках  $a_k$ , которые выражали бы эти коэффициенты в терминах  $M$  или группы монодромии  $\Gamma_M$  соответствующего линейного уравнения Фукса.

В настоящей заметке мы приводим некоторые формулы для искомым акцессорных коэффициентов  $X_k$  в предположении, что группа  $\Gamma_M$  является фуксовой группой первого рода и  $M$  имеет по крайней мере один нулевой внутренний угол. Вывод формул проводится в два этапа. Сначала мы выражаем  $X_k$  через коэффициенты Фурье  $A_k$  соответствующего инварианта Клейна  $J_M(z)$ . Затем вычисляем все коэффициенты  $A_k$  (за исключением постоянного члена) в терминах взвешен-

ных рядов Дирихле с общими суммами Кластермана. При этом используются методы спектральной теории автоморфных функций (см. [5]), так как круговой метод Харди–Радемахера–Ленера (см. [6]) не дает здесь, вообще говоря, достаточной точности.

Переходим к формулировкам строгих утверждений. Пусть  $M$  – односвязный круговой многоугольник с  $n + 1$  вершинами  $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$  и внутренними углами  $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \dots, \pi\alpha_{n+1}$  соответственно,  $n \geq 2$  фиксировано. Наложим на  $M$  две группы ограничений. Ограничения из первой группы являются принципиальными, из второй – приняты лишь для технического удобства.

1а)  $M$  является геодезическим многоугольником на плоскости Лобачевского;

б) каждое число  $\alpha_k$  имеет вид  $\alpha_k = m_k^{-1}$ ,  $m_k \geq 2$ ,  $m_k \in \mathbf{Z}$  или  $m_k = \infty$ ;

в) по крайней мере одно из  $\alpha_k$  равно нулю.

2а) Пусть плоскость Лобачевского, содержащая  $M$ , реализована как верхняя полуплоскость  $\{z \in \mathbf{C}, z = x + iy \mid y = \text{Im } z > 0\}$ ;

б)  $b_{n+1} = i\infty$ ;

в) для достаточно большого  $a > 0$   $\{z \in M \mid y \geq a\} = [0, \frac{1}{2}] \times [a, \infty)$ .

Пусть теперь  $z(J)$  – конформное отображение  $H = \{\text{Im } J > 0\}$  на внутренность  $M$ . Положим  $b_j = z(a_j)$ ;  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ ;  $a_j \in \mathbf{R}$ ,  $a_{n+1} = \infty$ . Из конформности  $z(J)$  следует уравнение (1) и формула (см. [2, 4])

$$(2) \quad Q_M(J) = \prod_{k=1}^n (J - a_k)^{-1} \left[ E_{n-2}(J) + \sum_{k=1}^n N_k (J - a_k)^{-1} \right],$$

$$N_k = \frac{1}{2}(1 - \alpha_k^2) \prod_{l=1}^n (a_k - a_l),$$

где штрих означает, что произведение берется по всем  $l$ , кроме  $l = k$ ;  $E_{n-2}(J)$  – многочлен,

$$E_{n-2}(J) = \sum_{k=0}^{n-2} X_k J^k, \quad X_{n-2} = \frac{1}{2}.$$

Задача состоит в отыскании  $n - 2$  коэффициентов  $X_k$  этого многочлена.

Л е м м а 1. *Справедливо соотношение*

$$(3) \quad \{z, J\} = J'^{-2}(z) \{J, z\}.$$

Лемма доказывается последовательным дифференцированием тождества  $z(J(z)) = z$ , где  $J(z)$  обратно к  $z(J)$ .  $J(z) = J_M(z)$  – абсолютный инвариант Клейна.

Введем обозначения:

$$J(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} A_k \exp(2\pi i k z), \quad \prod_{k=1}^n (J - a_k) = \sum_{k=0}^n B_k J^k, \quad B_n = 1;$$

$$\Phi_p(r) = \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_p + s_1 + \dots + s_4 = r \\ -1 \leq t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_4 < \infty}} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_p} A_{s_1} A_{s_2} A_{s_3} A_{s_4} s_1 s_2 s_3 s_4,$$

$$\Psi(r) = \sum_{k=0}^n B_k \sum_{l_1 + \dots + l_k + m_1 + m_2 = r} A_{l_1} A_{l_2} \dots A_{l_k} A_{m_1} A_{m_2} m_1^2 m_2^2 \left( \frac{3}{2} m_2 - m_1 \right),$$

где все индексы – целые числа.

Т е о р е м а 1. *Для коэффициентов  $X_p$  справедливы формулы*

$$X_p = \sum_{r=-4}^{-n-2} \Phi_p^{-1}(r) \Psi(r), \quad \{\Phi_p(r)\} \{\Phi_p^{-1}(r)\} = \delta_{-4-r,p},$$

где  $\delta_{\alpha,\beta}$  – символ Кронекера.

Приведем кратко идею доказательства теоремы. Из формул (1), (2), (3) получаем уравнение для  $J$ :

$$(4) \quad \prod_{k=1}^n (J(z) - a_k) \left( \frac{3}{2} J''^2(z) - J'''(z) J'(z) \right) = J'^4(z) E_{n-2}(J(z)) + O(|J(z)|^3).$$

Подставляя в (4) разложение для  $J(z)$  в ряд Фурье, получаем

$$\sum_{r=-n-2}^{\infty} \exp(-2\pi r y) \sum_{p=0}^{n-2} X_p \Phi_p(r) = \sum_{r=-n-2}^{\infty} \exp(-2\pi r y) \Psi(r) + O(\exp 6\pi y),$$

откуда следует линейная система

$$\sum_{p=0}^{n-2} X_p \Phi_p(r) = \Psi(r), \quad r = -n-2, \dots, -4.$$

Нетрудно доказать, что матрица  $\{\varphi_p(r)\}$  треугольная, а ее определитель равен  $\exp\left(\frac{n^2 + 5n - 6}{2} \ln A_{-1}\right) > 0$ , что и доказывает теорему.

Таким образом, для определения  $X_k$  достаточно найти коэффициенты Фурье  $A_k$ ,  $k = -1, 0, \dots$ . Воспользуемся связью между конформным отображением односвязной области  $\Omega$  на верхнюю полуплоскость и функцией Грина краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа на  $\Omega$  (см. [7]). Пусть  $G_M(z, z')$  — указанная функция Грина для многоугольника  $M$ .

*Л е м м а 2. Справедлива формула*

$$G_M(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln \{ |J_M(z) - J_M(z')| \cdot |J_M(z) - \overline{J_M(z')}|^{-1} \}.$$

Пусть  $\tilde{\Gamma}_M$  — группа, порожденная отражениями относительно всех сторон  $M$ . Рассматривая ее как абстрактную группу, выберем в ней подгруппу  $\Gamma_M$ , состоящую из всех слов, имеющих четную длину.  $\Gamma_M$  — фуксова группа первого рода (см. [5], § 6.4). Обозначим через  $r(z, z'; s; \Gamma_M)$  ядро резольвенты в точке  $s(1-s)$  автоморфного лапласиана, порожденного оператором Лапласа—Бельтрами плоскости Лобачевского (см. [5]).

*Т е о р е м а 2. Справедлива формула  $G_M(z, z') = \lim_{s \rightarrow 1+0} [r(z, z'; s; \Gamma_M) - r(-\bar{z}, z'; s; \Gamma_M)]$ , где черта означает комплексное сопряжение.*

Данная теорема следует из теоремы 6.4.3 работы [5], в которой устанавливается связь между спектральной теорией автоморфных функций и краевыми задачами Дирихле и Неймана для оператора Лапласа—Бельтрами.

Для формулировки дальнейших утверждений введем ряд Зигеля—Сельберга (см. [8])  $F_n(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_M} \exp(2\pi i n x(\gamma z)) \sqrt{y(\gamma z)} I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |n| y(\gamma z))$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$z = x(z) + iy(z)$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ ,  $\Gamma_\infty$  — подгруппа  $\Gamma_M$ , порожденная сдвигами  $z \rightarrow z + 1$ ,  $I_s(z)$  — функция Бесселя мнимого аргумента. Из теоремы 1 статьи [8] следует

*Л е м м а 3. 1) Пусть  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \neq 0$ ,  $m \neq n$ . Тогда  $m$ -й коэффициент Фурье ряда  $F_n(z, s)$  равен*

$$(5) \quad 2\sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |m| y) \sum_{c>0} c^{-1} S(-m, -n; c) M_{2s-1}(c^{-1} \cdot 4\pi \sqrt{-mn}),$$

где

$$M_{2s-1}(a\sqrt{-mn}) = \begin{cases} I_{2s-1}(a\sqrt{|mn|}), & \text{если } mn < 0, \\ J_{2s-1}(a\sqrt{mn}), & \text{если } mn > 0. \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения:  $J_s(z)$  – функция Бесселя,  $K_s(z)$  – модифицированная функция Бесселя,  $S(m, n; c)$  – общая сумма Клоостермана,

$$S(m, n; c) = \sum_{0 \leq d < c} \exp 2\pi i c^{-1}(ma + nd);$$

$\gamma z = (az + b)(cz + d)^{-1}$ ,  $\gamma$  берется в классе  $\Gamma_\infty \setminus \Gamma_M / \Gamma_\infty$ .

2) Для  $m = n$  в выражении (5) следует добавить еще слагаемое, равное  $\sqrt{y} I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)$ .

Перейдем к формулировкам заключительных утверждений работы, дающих искомые формулы для коэффициентов  $A_k$ .

**Теорема 3.** Справедлива формула  $\text{Im } J(z) A_{-1}^{-1} = \pi i \lim_{s \rightarrow 1+0} (F_1(z, s) - F_{-1}(z, s))$ , где  $\text{Im } z$  – мнимая часть  $z$ .

Для доказательства теоремы достаточно найти главный член асимптотического разложения функции Грина  $G_M(z, z')$  при больших значениях  $\text{Im } z$  двумя различными способами в соответствии с леммой 2 и теоремой 2. Во втором случае надо воспользоваться разложением Фурье для ядра резольвенты  $r(z, z'; s; \Gamma_M)$  (см. [9]; [5] § 2.1; [10], следствие 3.5).

**Теорема 4.** Справедливы следующие формулы для коэффициентов Фурье инварианта Клейна  $J(z)$ :

$$A_k A_{-1}^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sum_{c > 0} c^{-1} S(-k, 1; c) I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k}}{c}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sum_{c > 0} c^{-1} S(-k, -1; c) \times \\ \times J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k}}{c}\right), \quad k \geq 2,$$

$$A_1 A_{-1}^{-1} = 2\pi \sum_{c > 0} c^{-1} S(-1, 1; c) I_1\left(\frac{4\pi}{c}\right) - 2\pi \sum_{c > 0} c^{-1} S(-1, -1; c) J_1\left(\frac{4\pi}{c}\right) + 1.$$

Утверждение теоремы следует из утверждений теоремы 3 и леммы 3.

Автор признателен А.М. Полякову, обратившему его внимание на этот круг вопросов, и Л.А. Тахтаджяну за полезные замечания к теореме 4.

Ленинградское отделение  
Математического института им. В.А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
24 X 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schwarz H.A. Gesammelte mathematische Abhandlungen. В.: Springer, 1890, В. II, S. 370.
2. Klein F., Fricke R. Automorphen functionen. Leipzig: Teibner, 1901, В. II, S. 282.
3. Гурец А., Курант Р. Теория функций. Наука, 1968, с. 646.
4. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950, с. 436.
5. Венков А.Б. Тр. МИАН, 1981, т. 153.
6. Lehner J. Mathematical surveys. Amer. Math. Soc., 1964, № 8.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: ГИТИ, 1933, т. 1, с. 525.
8. Niebur D. – Nagoya Math. J., 1973, vol. 52, p. 133.
9. Фаддеев Л.Д. Тр. ММО, 1967, т. 17, с. 323.
10. Fay J.D., Reine J. – Angew. Math., 1977, Bd. 293/294, S. 143.