Д. Е. МЕНЬШОВ

О ПРЕДЕЛАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЧАСТНЫХ СУММ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Введение

Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

называется универсальным (см. [1]), если всякой измеримой функции $f(x)$, имеющей почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ определенное значение *, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, что

$$\lim_{i\to\infty} S_{n_i}(x)=f(x) \tag{2}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, где

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{3}$$

Введем теперь определение универсального тригонометрического ряда относительно пары функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Пусть даны две измеримые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные почти всюду на $[-\pi, \pi]$** и удовлетворяющие неравенству

$$F_1(x)\leqslant F_2(x) \tag{4}$$

почти всюду на этом сегменте.

Определение А. Тригонометрический ряд (1) будем называть универсальным относительно функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, если всякой измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющей неравенству

$$F_1(x)\leqslant f(x)\leqslant F_2(x) \tag{5}$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, что равенство (2) выполняется почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

---

* $f(x)$ может быть равна $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры.

** $F_1(x)$ и $F_2(x)$ могут принимать бесконечные значения на множествах положительной меры.

Тригонометрический ряд, универсальный относительно функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$, будем называть рядом типа $A(F_1, F_2)$. Если $F_1(x) = -\infty$ и $F_2(x) = +\infty$ для всех x на $[-\pi, \pi]$, то ясно, что ряд типа $A(F_1, F_2)$ будет универсальным тригонометрическим рядом в первоначальном смысле.

В настоящей работе мы будем изучать пределы неопределенности по мере и пределы неопределенности в обычном смысле универсальных тригонометрических рядов. Прежде всего напомним определение пределов неопределенности по мере.

Возьмем последовательность измеримых функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x),\ \ldots, \tag{6}$$

определенных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$ *, есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (6), если $F(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

a^0.

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0 \tag{7}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

b^0.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) > \chi(x)] \cdot E[F(x) > \chi(x)]\} > 0 \tag{8}$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \chi(x)] > 0$ **.

Функцию $G(x)$, определенную почти всюду на $[a, b]$, мы будем называть нижним пределом по мере на $[a, b]$ последовательности (6), если $G(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

α^0.

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < G(x)]\} = 0 \tag{9}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$;

β^0.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) < \chi(x)] \cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0 \tag{10}$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Можно доказать, что верхний и нижний пределы по мере определяются однозначно с точностью до множества меры нуль и обладают многими свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных верхних и нижних пределов ***.

Введем теперь следующее определение.

Определение B. Пусть функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ удовлетворяют прежним условиям. Тригонометрический ряд (1) будем называть рядом типа $B(F_1, F_2)$,

---

* $f_k(x)$ и $F(x)$ могут принимать бесконечные значения на множестве положительной меры.

** [2], § 2 и 3, стр. 6—30. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

*** В работе [2] мы предполагали, что функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, конечны почти всюду на $[a, b]$; но определения верхнего и нижнего пределов по мере имеют смысл и без этого ограничения. При этом теоремы A, B, C, D, E ([2], § 2) также справедливы без этого ограничения и их доказательства остаются без изменения.

если любым четырем измеримым функциям $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$, определенным почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющим неравенствам

$$F_1(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant F_2(x) \tag{11}$$

почти всюду на этом сегменте, соответствует такая возрастающая последовательность натуральных чисел n_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $S_{n_i}(x)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и, кроме того, выполняются равенства

$$\underline{\lim_{i\to\infty}} S_{n_i}(x) = \varphi_1(x), \quad \overline{\lim_{i\to\infty}} S_{n_i} = \varphi_2(x) \tag{12}$$

почти всюду на том же сегменте.

Если $F_1(x) = -\infty$ и $F_2(x) = +\infty$, то тригонометрический ряд типа $B(F_1, F_2)$ будем называть рядом типа B.

Мы получим непосредственное определение ряда типа B, если заменим в определении B цепь неравенств (11) неравенствами

$$\varphi_1(x) \leqslant \psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant \varphi_2(x). \tag{13}$$

Мы докажем следующую теорему.

Теорема I. *Каковы бы ни были измеримые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, определенные почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие неравенству* (4) *почти всюду на этом сегменте, классы тригонометрических рядов типа $A(F_1, F_2)$ и типа $B(F_1, F_2)$ совпадают.*

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема II. *Класс универсальных тригонометрических рядов совпадает с классом рядов типа B.*

Ясно, что всякий тригонометрический ряд типа $B(F_1, F_2)$ является рядом типа $A(F_1, F_2)$. В таком случае, для доказательства теоремы I достаточно доказать следующую теорему.

Теорема III. *Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ удовлетворяют упомянутым выше условиям, то всякий тригонометрический ряд типа $A(F_1, F_2)$ является в то же время рядом типа $B(F_1, F_2)$.*

§ 1. Предварительные леммы

Для доказательства теоремы III, формулированной во введении, нам понадобится несколько определений и лемм.

Возьмем две последовательности чисел

$$U_1, U_2, \ldots, U_m, \ldots \tag{1.1}$$

и

$$V_1, V_2, \ldots, V_m, \ldots, \tag{1.2}$$

причем будем предполагать, что каждое из чисел U_m и V_m или равно конечной величине, или равно $+\infty$, или равно $-\infty$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательности (1.1) и (1.2) являются равностепенно сходящимися, если выполняются следующие условия:

a⁰. $U_m - V_m$ стремится к нулю, когда m неограниченно возрастает, принимая значения, для которых оба числа U_m и V_m конечны.

b⁰. U_m и V_m стремятся к $+\infty$, когда m неограниченно возрастает, принимая значения, для каждого из которых хотя бы одно из чисел U_m или V_m равно $+\infty$.

c^0. U_m и V_m стремятся к $-\infty$, когда m неограниченно возрастает, принимая значения, для каждого из которых хотя бы одно из чисел U_m или V_m равно $-\infty$ *.

Предположим теперь, что две последовательности функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x),\ \ldots \tag{1.3}$$

и

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_m(x),\ \ldots \tag{1.4}$$

определены почти всюду ** на некотором множестве E. Мы будем говорить, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на E, если они являются равностепенно сходящимися в каждой точке этого множества, за исключением, быть может, множества точек меры нуль ***.

Легко доказать следующие утверждения.

Лемма A. *Если последовательности* (1.1) *и* (1.2) *являются равностепенно сходящимися и если для некоторой неубывающей последовательности натуральных чисел* p_k, $k=1, 2, \ldots$, *удовлетворяющих условию* $\lim\limits_{k\to\infty} p_k=\infty$, *одна из двух последовательностей* U_{p_k}, $k=1, 2, \ldots$, *или* V_{p_k}, $k=1, 2, \ldots$, *сходится к определенному пределу* L, *то другая из этих двух последовательностей сходится к тому же пределу* ****.

Лемма B. *Если последовательности* (1.1) *и* (1.2) *являются равностепенно сходящимися, то множества их предельных точек совпадают.*

Лемма C. *Если последовательности* (1.1) *и* (1.2) *являются равностепенно сходящимися, то*

$$\varliminf_{m\to\infty} U_m = \varliminf_{m\to\infty} V_m,$$

$$\varlimsup_{m\to\infty} U_m = \varlimsup_{m\to\infty} V_m.$$

Лемма D. *Возьмем последовательность чисел*

$$W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_m,\ \ldots \tag{1.5}$$

и предположим, что, с одной стороны, две последовательности (1.1) *и* (1.5) *являются равностепенно равносходящимися и, с другой стороны, две последовательности* (1.2) *и* (1.5) *являются равностепенно сходящимися. В таком случае две последовательности* (1.1) *и* (1.2) *обладают тем же свойством.*

Определение 2. Пусть функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$, $m=1, 2, \ldots$, определены во всех точках некоторого множества M. Будем говорить, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M, если для любого положительного числа ε можно определить такое натуральное число N, что для всех $m>N$ и для всех $x\in M$ выполняются условия:

α^0.

$$|f_m(x)-g_m(x)|<\varepsilon,$$

---

* Когда мы говорим, что U_m стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ при $m\to\infty$, то мы не исключаем возможности того, что для некоторых значений m $U_m=+\infty$ или $V_m=-\infty$.

** Функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ могут равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

*** Определение последовательностей функций, равностепенно сходящихся почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$, было дано в [2] (стр. 27).

**** Число L может равняться бесконечности определенного знака.

когда обе функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ конечны;

β^0.

$$f_m(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad g_m(x) > \frac{1}{\varepsilon},$$

когда хотя бы одна из функций $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $+\infty$;

γ^0.

$$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad g_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon},$$

когда хотя бы одна из функций $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $-\infty$.

Лемма Е. *Возьмем функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, определенные почти всюду на некотором измеримом множестве E и измеримые на этом множестве. Предположим, что последовательности* (1.3) *и* (1.4) *являются равностепенно сходящимися почти всюду на E.*

В таком случае, для любого положительного числа σ можно определить измеримое множество M, удовлетворяющее условиям

$$M \subset E, \quad \operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E - \sigma \tag{1.6}$$

и такое, что последовательности (1.3) *и* (1.4) *являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M* *.

Доказательство. Обозначим через E' множество всех точек $x \in E$, в каждой из которых все функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, определены и последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися. Тогда, по условию леммы,

$$E' \subset E, \quad \operatorname{mes} E' = \operatorname{mes} E. \tag{1.7}$$

На множестве E' определим функции $\Delta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, при помощи равенств:

I) $$\Delta_m(x) = f_m(x) - g_m(x), \tag{1.8}$$

если

$$-\infty < f_m(x) < +\infty, \quad -\infty < g_m(x) < +\infty. \tag{1.9}$$

II) $$\Delta_m(x) = \frac{1}{f_m(x)}, \tag{1.10}$$

если

$$0 < f_m(x) < +\infty, \quad g_m(x) = +\infty \tag{1.11}$$

или

$$-\infty < f_m(x) < 0, \quad g_m(x) = -\infty. \tag{1.12}$$

III) $$\Delta_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}, \tag{1.13}$$

если

$$f_m(x) = +\infty, \quad 0 < g_m(x) < +\infty \tag{1.14}$$

или

$$f_m(x) = -\infty, \quad -\infty < g_m(x) < 0. \tag{1.15}$$

IV) $$\Delta_m(x) = 0, \tag{1.16}$$

если

$$f_m(x) = +\infty, \quad g_m(x) = +\infty \tag{1.17}$$

или

$$f_m(x) = -\infty, \quad g_m(x) = -\infty. \tag{1.18}$$

V) $$\Delta_m(x) = m, \tag{1.19}$$

---

* Лемма Е представляет интерес только в том случае, когда $\operatorname{mes} E > 0$, но в ее формулировке мы можем не вводить этого условия.

если не выполняется ни одно из условий (1.9), (1.11), (1.12), (1.14), (1.15), (1.17) и (1.18).

В этом последнем случае должно выполняться одно из следующих четырех условий:

$$f_m(x) = -\infty, \quad 0 \leqslant g_m(x) \leqslant +\infty, \tag{1.20}$$

$$-\infty < f_m(x) \leqslant 0, \qquad g_m(x) = +\infty, \tag{1.21}$$

$$0 \leqslant f_m(x) \leqslant +\infty, \qquad g_m(x) = -\infty \tag{1.22}$$

или

$$f_m(x) = +\infty, \quad -\infty < g_m(x) \leqslant 0. \tag{1.23}$$

По определению множества E', в каждой его точке последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися и, следовательно, в силу леммы A, в каждой точке $x \in E'$ ни одно из условий (1.20), (1.21), (1.22) или (1.23) не выполняется для бесчисленного множества значений m. Отсюда следует, что для каждой точки x множества E' можно определить такое натуральное число m_x, что для любого $m > m_x$ выполняется одно из условий (1.9), (1.11), (1.12), (1.14), (1.15), (1.17) или (1.18) и, следовательно, одно из равенств (1.8), (1.10), (1.13) или (1.16).

Докажем, что

$$\lim_{m \to \infty} \Delta_m(x) = 0 \tag{1.24}$$

для любой точки x множества E'.

В самом деле, как мы уже знаем, последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися в каждой точке множества E'. В таком случае, если m неограниченно возрастает, принимая значения, для которых выполняется условие (1.9), то, в силу равенства (1.8), $\Delta_m(x) \to 0$ *.

Далее, если m неограниченно возрастает, принимая значения, для которых выполняется условие (1.11) или условие (1.12), то $f_m(x) \to +\infty$ или $f_m(x) \to -\infty$ ** и, следовательно, в силу равенства (1.10), $\Delta_m(x)$ стремится к нулю. По той же причине $\Delta_m(x) \to 0$, когда m неограниченно возрастает, принимая значения, для которых выполняется одно из условий (1.14) или (1.15). Наконец, в силу равенства (1.16), $\Delta_m(x) \to 0$, когда m неограниченно возрастает, принимая значения, для которых выполняется одно из условий (1.17) или (1.18).

Как мы уже видели, для $x \in E'$ и для $m > m_x$ обязательно выполняется одно из условий (1.9), (1.11), (1.12), (1.14), (1.15), (1.17) или (1.18); следовательно, равенство (1.24) выполняется для любого x на множестве E'. В таком случае, принимая во внимание (1.7), мы можем определить для любого $\sigma > 0$ измеримое множество M, удовлетворяющее условиям (1.6), на котором $\Delta_m(x)$ сходится равномерно к нулю.

Докажем, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M. В самом деле, возьмем произвольное положительное число ε. Так как последовательность функций $\Delta_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно к нулю на множестве M, то мы можем подобрать такое натуральное число N, что

$$|\Delta_m(x)| < \varepsilon \qquad (m > N, \ x \in M). \tag{1.25}$$

---

* См. условие a) в определении 1 равностепенно сходящихся последовательностей.

** См. условия b) и c) в том же определении равностепенно сходящихся последовательностей.

Не уменьшая общности рассуждения, мы можем предположить, что $\varepsilon < 1$, откуда, следует, что

$$|\Delta_m(x)| < m \qquad (m > N,\ x \in M),$$

а тогда, в силу V [см. равенство (1.19)], при $m > N$ и при $x \in M$ должно выполняться одно из условий (1.9), (1.11), (1.12), (1.14), (1.15), (1.17) или (1.18). Если выполняется условие (1.9), т. е. если обе функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ конечны для рассматриваемых значений m и x, то на основании (1.8) и (1.25)

$$|f_m(x) - g_m(x)| < \varepsilon. \tag{1.26}$$

Далее, если для рассматриваемых значений m и x хотя бы одна из функций $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $+\infty$, то выполняется одно из условий (1.11), (1.14) или (1.17) *, и, следовательно, принимая во внимание (1.10), (1.13) и (1.25), получаем

$$0 < \frac{1}{f_m(x)} < \varepsilon, \quad g_m(x) = +\infty,$$

или

$$f_m(x) = +\infty, \quad 0 < \frac{1}{g_m(x)} < \varepsilon,$$

или

$$f_m(x) = +\infty, \quad g_m(x) = +\infty,$$

откуда

$$f_m(x) > \frac{1}{\varepsilon}, \quad g_m(x) > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.27}$$

Наконец, если для рассматриваемых значений m и x хотя бы одна из функций $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $-\infty$, то выполняется одно из условий (1.12), (1.15) или (1.18), и, следовательно, в силу (1.10), (1.13) и (1.25), будем иметь

$$-\varepsilon < \frac{1}{f_m(x)} < 0, \quad g_m(x) = -\infty,$$

или

$$f_m(x) = -\infty, \quad -\varepsilon < \frac{1}{g_m(x)} < 0,$$

или

$$f_m(x) = -\infty, \quad g_m(x) = -\infty,$$

откуда

$$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon}, \quad g_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.28}$$

Итак, для любого положительного числа $\varepsilon < 1$ можно подобрать такое натуральное число N, что для всех $x \in M$ и для всех $m > N$ выполняется одно из неравенств (1.26), (1.27) или (1.28) в зависимости от того, будут ли обе функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ конечны, или одна из них равна $+\infty$, или одна из них равна $-\infty$, а это означает, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M (см. определение 2).

Так как измеримое множество M удовлетворяет условиям (1.6), где σ может быть любым положительным числом, то лемма E доказана.

Лемма F. *Возьмем функции* $\gamma(x)$, $f_m(x)$ *и* $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, *определенные почти всюду на некотором сегменте* $[a, b]$ *и измеримые на этом сегменте. Предположим, что последовательности* (1.3) *и* (1.4) *являются равностепенно сходящимися почти всюду на* $[a, b]$, *и определим функции* $\gamma_\alpha(x)$ *и* $\gamma_{-\alpha}(x)$ *из условий*

$$\gamma_\alpha(x) = \gamma(x) + \alpha, \quad \gamma_{-\alpha}(x) = \gamma(x) - \alpha, \tag{1.29}$$

* Когда $f_m(x) = +\infty$ или $g_m(x) = +\infty$, то не может выполняться ни одно из условий (1.9), (1.12), (1.15) и (1.18).

если $\gamma(x)$ *конечна,*

$$\gamma_\alpha(x) = \gamma(x), \quad \gamma_{-\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}, \tag{1.30}$$

если $\gamma(x) = +\infty$, *и*

$$\gamma_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha}, \quad \gamma_{-\alpha}(x) = \gamma(x), \tag{1.31}$$

если $\gamma(x) = -\infty$, *где* α *есть произвольное положительное число.*

В таком случае, для любого положительного числа ε *можно подобрать такое натуральное число* N, *что*

$$\left.\begin{aligned} &E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)] - e \subset E[g_m(x) > \gamma(x)], \\ &\{E[g_m(x) > \gamma(x)] \cdot E[\gamma(x) > -\infty]\} \subset E[f_m(x) > \gamma_{-\varepsilon}(x)] + e \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

для всех $m > N$, *где* e *не зависит от* m *и*

$$\operatorname{mes} e < \varepsilon. \tag{1.33}$$

Доказательство. Обозначим через M множество всех точек на $[a, b]$, в которых все функции $\gamma(x)$, $f_m(x)$ и $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, определены. Тогда

$$M \subset [a, b], \quad \operatorname{mes} M = b - a. \tag{1.34}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &E_1 = \{M \cdot E[-\infty < \gamma(x) < +\infty]\}, \\ &E_2 = \{M \cdot E[\gamma(x) = +\infty]\}, \quad E_3 = \{M \cdot E[\gamma(x) = -\infty]\}, \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

откуда следует, что

$$M = E_1 + E_2 + E_3, \tag{1.36}$$

$$(E_1 \cdot E_2) = 0, \quad (E_1 \cdot E_3) = 0, \quad (E_2 \cdot E_3) = 0 \tag{1.37}$$

и, кроме того, на основании (1.29), (1.30), (1.31) и (1.35),

$$\gamma_\varepsilon(x) = \gamma(x) + \varepsilon, \quad \gamma_{-\varepsilon}(x) = \gamma(x) - \varepsilon \qquad (x \in E_1), \tag{1.38}$$

$$\gamma_\varepsilon(x) = +\infty, \qquad \gamma_{-\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \qquad (x \in E_2), \tag{1.39}$$

$$\gamma_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \gamma_{-\varepsilon}(x) = -\infty \qquad (x \in E_3), \tag{1.40}$$

где ε есть какое-нибудь фиксированное положительное число.

Так как $\gamma(x)$ конечна в каждой точке множества E_1, то мы можем определить измеримое множество Ω и положительное число ε', которые удовлетворяют условиям

$$\Omega \subset E_1, \quad \operatorname{mes} \Omega > \operatorname{mes} E_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.41}$$

$$\varepsilon' < \varepsilon, \quad \gamma(x) + \varepsilon < \frac{1}{\varepsilon'}, \quad \gamma(x) - \varepsilon > -\frac{1}{\varepsilon'} \qquad (x \in \Omega), \tag{1.42}$$

откуда, в силу (1.38),

$$-\frac{1}{\varepsilon'} < \gamma_{-\varepsilon}(x) < \gamma(x) < \gamma_\varepsilon(x) < \frac{1}{\varepsilon'} \qquad (x \in \Omega). \tag{1.43}$$

Кроме того, принимая во внимание (1.35), (1.39) и (1.40), получаем

$$+\infty = \gamma(x) = \gamma_\varepsilon(x) > \gamma_{-\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \qquad (x \in E_2), \tag{1.44}$$

$$-\infty = \gamma(x) = \gamma_{-\varepsilon}(x) < \gamma_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \qquad (x \in E_3). \tag{1.45}$$

Полагая

$$\Omega' = \Omega + E_2 + E_3, \tag{1.46}$$

будем иметь на основании (1.34), (1.36) и (1.41),

$$\Omega' \subset M, \quad \operatorname{mes}\Omega' > b - a - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.47}$$

По условию леммы, последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на сегменте $[a, b]$, и, следовательно, в силу (1.34) и (1.47), являются равностепенно сходящимися почти всюду на множестве Ω'. В таком случае, на основании леммы Е, можно определить измеримое множество Ω'', которое удовлетворяет условиям

$$\Omega'' \subset \Omega', \quad \operatorname{mes}\Omega'' > \operatorname{mes}\Omega' - \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.48}$$

и на котором последовательности (1.3) и (1.4) являются равномерно равностепенно сходящимися.

Сопоставляя (1.34), (1.47) и (1.48), получаем

$$\Omega'' \subset [a, b], \quad \operatorname{mes}\Omega'' > b - a - \varepsilon, \tag{1.49}$$

причем Ω'' не зависит от m.

Так как последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве Ω'', то, в силу определения 2, мы можем определить такое натуральное число N, что будут выполняться условия:

α^0. $$|f_m(x) - g_m(x)| < \varepsilon' \qquad (m > N,\ x \in \Omega''), \tag{1.50}$$

если $f_m(x)$ и $g_m(x)$ конечны,

β^0. $$f_m(x) > \frac{1}{\varepsilon'}, \quad g_m(x) > \frac{1}{\varepsilon'} \quad (m > N,\ x \in \Omega''), \tag{1.51}$$

если $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $+\infty$,

γ^0. $$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'}, \quad g_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'} \quad (m > N,\ x \in \Omega''), \tag{1.52}$$

если $f_m(x)$ или $g_m(x)$ равна $-\infty$.

В этих условиях ε' есть положительное число, удовлетворяющее неравенствам (1.42), которое было определено выше.

Полагая

$$\left.\begin{aligned} H'_m &= \{\Omega \cdot \Omega'' \cdot E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]\}, \\ H''_m &= \{E_2 \cdot \Omega'' \cdot E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]\}, \\ H'''_m &= \{E_3 \cdot \Omega'' \cdot E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]\} \\ &(m = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

и принимая во внимание (1.46) и (1.48), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \{\Omega'' \cdot E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]\} &= H'_m + H''_m + H'''_m \\ &(m = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

Кроме того, ясно, что

$$\left.\begin{aligned} H'_m \subset [a, b],\ H''_m \subset [a, b],\ H'''_m \subset [a, b] \\ (m = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

Предположим теперь, что для некоторого $m > N$

$$x \in H'_m. \tag{1.56}$$

Тогда, на основании (1.41) и первого равенства (1.53),

$$x \in \Omega,\ x \in E_1,\ x \in \Omega'' \tag{1.57}$$

и, следовательно, в силу (1.43),

$$-\frac{1}{\varepsilon'} < \gamma_\varepsilon(x). \tag{1.58}$$

Кроме того, из первого равенства (1.35) и из второго соотношения (1.57) мы видим, что $\gamma(x)$ конечна в рассматриваемой точке x.

Докажем теперь, что для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство

$$g_m(x) > -\infty. \tag{1.59}$$

В самом деле, если бы для этих значений x и m выполнялось равенство $g_m(x) = -\infty$, то из условия γ [см. (1.52)], неравенства $m > N$ и соотношения $x \in \Omega''$ [см. (1.57)] следовало бы, что

$$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'},$$

откуда, на основании (1.58),

$$f_m(x) < \gamma_\varepsilon(x)$$

и, следовательно, в силу первого равенства (1.53),

$$x \overline{\in} H'_m,$$

что противоречит соотношению (1.56). Итак, для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство (1.59).

Предположим теперь, что для тех же x и m функция $g_m(x)$ конечна. Тогда, если $f_m(x)$ также конечна, то, на основании условия α [см. (1.50)], третьего соотношения (1.57) и неравенства $m > N$, будем иметь

$$g_m(x) > f_m(x) - \varepsilon', \tag{1.60}$$

откуда, принимая во внимание (1.56), первое равенство (1.53) и неравенство $\varepsilon' < \varepsilon$ [см. (1.42)], получаем

$$g_m(x) > \gamma_\varepsilon(x) - \varepsilon,$$

и, следовательно, в силу второго соотношения (1.57) и первого равенства (1.38),

$$g_m(x) > \gamma(x). \tag{1.61}$$

Итак, если для рассматриваемых x и m обе функции $f_m(x)$ и $g_m(x)$ конечны, то выполняется неравенство (1.61).

Предположим теперь, что для рассматриваемых x и m $g_m(x)$ конечна и $f_m(x) = +\infty$. Тогда из условия β [см. (1.51)], третьего соотношения (1.57) и неравенства $m > N$ следует, что

$$g_m(x) > \frac{1}{\varepsilon'}, \tag{1.62}$$

откуда, принимая во внимание первое соотношение (1.57) и второе неравенство (1.42), получаем опять неравенство (1.61). Так как при выполнении условия (1.56) $f_m(x)$ не может равняться $-\infty$ [см. первое равенство (1.53)], то из условия (1.56) для некоторого x и некоторого $m > N$ следует неравенство (1.61), если $g_m(x)$ конечна.

Рассмотрим теперь случай, когда для взятых нами значений x и m выполняется равенство

$$g_m(x) = +\infty.$$

Мы уже видели, что для рассматриваемого значения x функция $\gamma(x)$ конечна, а в таком случае мы опять получаем неравенство (1.61) Итак,

если x удовлетворяет условию (1.56) для какого-нибудь $m > N$, то во всех возможных случаях выполняется неравенство (1.61)*.

Так как $H'_m \subset [a, b]$, $m = 1, 2, \ldots$ [см. (1.55)], то отсюда следует, что

$$H'_m \subset E[g_m(x) > \gamma(x)]. \tag{1.63}$$

Предположим теперь, что для некоторого $m > N$

$$x \in H'''_m. \tag{1.64}$$

Тогда, на основании третьего равенства (1.53),

$$x \in E_3, \quad x \in \Omega'' \tag{1.65}$$

и, следовательно, в силу (1.45) и неравенства $\varepsilon' < \varepsilon$ [см. (1.42)],

$$\gamma_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon} > -\frac{1}{\varepsilon'}. \tag{1.66}$$

Кроме того, мы видим из третьего равенства (1.35) и из первого соотношения (1.65), что в рассматриваемой точке x

$$\gamma(x) = -\infty. \tag{1.67}$$

Докажем, что для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство (1.59). В самом деле, если бы для этих значений x и m выполнялось равенство $g_m(x) = -\infty$, то из условия γ [см. (1.52)] и второго соотношения (1.65) следовало бы, что

$$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'},$$

откуда, на основании (1.66) и третьего равенства (1.53),

$$f_m(x) < \gamma_\varepsilon(x), \quad x \in H'''_m,$$

что противоречит соотношению (1.64). Итак, для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство (1.59).

Сопоставляя (1.59) и (1.67), мы видим, что для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство (1.61), т. е. это неравенство выполняется для всех $m > N$ и для всех x, удовлетворяющих условию (1.64). Так как $H'''_m \subset [a, b]$ [см. (1.55)], то

$$H'''_m \subset E[g_m(x) > \gamma(x)], \quad (m > N). \tag{1.68}$$

Если $x \in E_2$, то, на основании (1.39), $\gamma_\varepsilon(x) = +\infty$ и, следовательно, множества E_2 и $E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]$ не имеют общих точек при любом натуральном m, а тогда, в силу второго равенства (1.53),

$$H''_m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{1.69}$$

Сопоставляя (1.54), (1.63), (1.68) и (1.69), получаем

$$\left.\begin{gathered}\{\Omega'' \cdot E[f_m(x) > \gamma_\varepsilon(x)]\} \subset E[g_m(x) > \gamma(x)] \\ (m > N).\end{gathered}\right\} \tag{1.70}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} G'_m &= \{\Omega \cdot \Omega'' \cdot E[g_m(x) > \gamma(x)]\}, \\ G''_m &= \{E_2 \cdot \Omega'' \cdot E[g_m(x) > \gamma(x)]\}, \\ G'''_m &= \{E_3 \cdot \Omega'' \cdot E[g_m(x) > \gamma(x)]\} \\ &(m = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{1.71}$$

---

* Напомним, что для рассматриваемых значений x и m не может выполняться равенство $g_m(x) = -\infty$ [см. (1.59)].

откуда, принимая во внимание (1.46) и (1.48), будем иметь

$$\left.\begin{array}{c}\{\Omega'' \cdot E[g_m(x) > \gamma(x)]\} = G'_m + G''_m + G'''_m, \\ (m = 1, 2, \ldots).\end{array}\right\} \tag{1.72}$$

Кроме того, ясно, что

$$\left.\begin{array}{c}G'_m \subset [a, b],\ G''_m \subset [a, b],\ G'''_m \subset [a, b], \\ (m = 1, 2, \ldots).\end{array}\right\} \tag{1.73}$$

Предположим теперь, что для некоторого $m > N$

$$x \in G'_m. \tag{1.74}$$

Тогда, на основании (1.41) и первого равенства (1.71), будут выполняться соотношения (1.57) и, следовательно, в силу (1.43), будет выполняться неравенство (1.58). Кроме того, из первого равенства (1.35) и из второго соотношения (1.57) мы видим, что $\gamma(x)$ конечна в рассматриваемой точке x.

Докажем, что для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство

$$f_m(x) > -\infty. \tag{1.75}$$

В самом деле, если бы для этих значений x и m выполнялось равенство $f_m(x) = -\infty$, то из условия γ [см. (1.52)], неравенства $m > N$ и соотношения $x \in \Omega''$ [см. (1.57)] следовало бы, что

$$g_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'},$$

откуда, на основании (1.43) и из первого соотношения (1.57),

$$g_m(x) < \gamma(x)$$

и, следовательно, в силу первого равенства (1.71),

$$x \overline{\in} G'_m,$$

что противоречит соотношению (1.74). Итак, для рассматриваемых значений x и m выполняется неравенство (1.75).

Предположим теперь, что для тех же x и m функция $f_m(x)$ конечна. Тогда, если $g_m(x)$ также конечна, то на основании условия α [см. (1.50)], третьего соотношения (1.57) и неравенства $m > N$, будем иметь

$$f_m(x) > g_m(x) - \varepsilon', \tag{1.76}$$

откуда, принимая во внимание (1.74), первое равенство (1.71) и неравенство $\varepsilon' < \varepsilon$ [см. (1.42)], получаем

$$f_m(x) > \gamma(x) - \varepsilon \tag{1.77}$$

и, следовательно, в силу второго соотношения (1.57) и второго равенства (1.38)

$$f_m(x) > \gamma_{-\varepsilon}(x). \tag{1.78}$$

Итак, если для рассматриваемых x и m обе функции $g_m(x)$ и $f_m(x)$ конечны, то выполняется неравенство (1.78).

Предположим теперь, что для рассматриваемых x и m функция $f_m(x)$ конечна и $g_m(x) = +\infty$. Тогда из условия β [см. (1.51)], третьего соотношения (1.57) и неравенства $m > N$ следует, что

$$f_m(x) > \frac{1}{\varepsilon'},$$

откуда, принимая во внимание первое соотношение (1.57) и неравенства (1.43), получаем опять неравенство (1.78). Так как при выполнении условия (1.74) функция $g_m(x)$ не может равняться $-\infty$ [см. первое равенство (1.71)], то из условия (1.74) для некоторого x и некоторого $m > N$ следует неравенство (1.78), если $f_m(x)$ конечна.

Рассмотрим теперь случай, когда для взятых нами значений x и m выполняется равенство

$$f_m(x) = +\infty.$$

Мы уже видели, что для рассматриваемого значения x функция $\gamma(x)$ конечна, а в таком случае, в силу второго равенства (1.38) и второго соотношения (1.57), мы опять получаем неравенство (1.78). Итак, если x удовлетворяет условию (1.74) для какого-нибудь $m > N$, то во всех возможных случаях выполняется неравенство (1.78)*.

Так как $G'_m \subset [a, b]$, $m = 1, 2, \ldots$, [см. (1.73)], то отсюда следует, что

$$G'_m \subset E[f_m(x) > \gamma_{-\varepsilon}(x)] \quad (m > N). \tag{1.79}$$

Принимая во внимание второе и третье равенства (1.71) и определение множеств E_2, E_3 [см. (1.35)], получаем

$$G''_m = 0, \quad \{G'''_m \cdot E[\gamma(x) > -\infty]\} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

откуда, на основании (1.72) и (1.79),

$$\left.\begin{gathered}\{\Omega'' \cdot E[g_m(x) > \gamma(x)] \cdot E[\gamma(x) > -\infty]\} \subset E[f_m(x) > \gamma_{-\varepsilon}(x)] \\ (m > N).\end{gathered}\right\} \tag{1.80}$$

Полагая

$$e = [a, b] - \Omega''$$

и принимая во внимание (1.49), (1.70) и (1.80), получаем неравенство (1.33) и соотношения (1.32) для $m > N$. При этом e, так же как и Ω'', не зависит от m. Так как ε есть произвольное положительное число и N определено в зависимости только от ε и от функций $\gamma(x)$, $f_m(x)$, $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, то лемма F доказана.

Лемма G. *Пусть функции $F(x)$, $G(x)$, $f_m(x)$ и $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, определены почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$ и измеримы на этом сегменте. Предположим, что неравенство*

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{1.81}$$

выполняется почти всюду на $[a, b]$ и последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на том же сегменте.

В таком случае, если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ последовательности (1.3), то те же функции являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ последовательности (1.4).

Доказательство. Возьмем произвольную измеримую функцию $\varphi(x)$, определенную почти всюду на сегменте $[a, b]$. Для любого положительного числа α определим функцию $\varphi_{-\alpha}(x)$ из условий

$$\varphi_{-\alpha}(x) = \varphi(x) - \alpha, \tag{1.82}$$

если $\varphi(x)$ конечна,

$$\varphi_{-\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}, \tag{1.83}$$

---

* Напомним, что для рассматриваемых значений x и m не может выполняться равенство $f_m(x) = -\infty$ [см. (1.75)].

если $\varphi(x) = +\infty$, и

$$\varphi_{-\alpha}(x) = \varphi(x), \tag{1.84}$$

если $\varphi(x) = -\infty$.

Тогда функция $\varphi_{-\alpha}(x)$ будет измерима и определена почти всюду на $[a, b]$. Возьмем последовательность положительных чисел α_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \alpha_n > \alpha_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.85}$$

Из равенств (1.82) (1.83) и (1.84) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{-\alpha_n}(x) = \varphi(x), \quad \varphi_{-\alpha_n}(x) \leqslant \varphi_{-\alpha_{n+1}}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

для всех x на $[a, b]$, для которых функция $\varphi(x)$ определена, а в таком случае

$$E[\varphi(x) > F(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[\varphi_{-\alpha_n}(x) > F(x)], \tag{1.86}$$

$$\left.\begin{aligned} E[\varphi_{-\alpha_n}(x) > F(x)] \subset E[\varphi_{-\alpha_{n+1}}(x) > F(x)] \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{1.87}$$

Из этих соотношений получаем

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E[\varphi_{-\alpha_n}(x) > F(x)] = \operatorname{mes} E[\varphi(x) > F(x)]. \tag{1.88}$$

Возьмем произвольное положительное число σ. Принимая во внимание (1.86), (1.87) и (1.88), мы можем определить такое положительное число ε, что будет выполняться равенство

$$E[\varphi_{-\varepsilon}(x) > F(x)] + R = E[\varphi(x) > F(x)], \tag{1.89}$$

где множество R удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes} R < \sigma. \tag{1.90}$$

Кроме того, мы можем предположить, что

$$\varepsilon < \sigma. \tag{1.91}$$

Из сравнения равенств (1.29), (1.30) и (1.31) (см. формулировку леммы F) с равенствами (1.82), (1.83) и (1.84) мы видим, что функция $\varphi_{-\alpha}(x)$ получается из функции $\varphi(x)$ совершенно так же, как функция $\gamma_{-\alpha}(x)$ получалась из функции $\gamma(x)$. Так как, по условию леммы G, последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на сегменте $[a, b]$, то, на основании леммы F, в которой берем $\varphi(x)$ вместо $\gamma(x)$, мы можем подобрать такое натуральное число N, что

$$\{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > -\infty]\} \subset E[f_m(x) > \varphi_{-\varepsilon}(x)] + e \tag{1.92}$$

для всех $m > N$, где e не зависит от m и

$$\operatorname{mes} e < \varepsilon.$$

Следовательно, на основании (1.91),

$$\operatorname{mes} e < \sigma. \tag{1.93}$$

Из соотношения (1.92) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > -\infty] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} \subset \\ \subset \{E[f_m(x) > \varphi_{-\varepsilon}(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} + e \\ (m > N). \end{aligned}\right\} \tag{1.94}$$

Кроме того, ясно, что

$$\{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > -\infty] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = \{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\}$$
$$(m = 1, 2, \ldots),$$

откуда, в силу (1.89) и (1.94),

$$\left.\begin{array}{c} \{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} \subset \\ \subset \{E[f_m(x) > \varphi_{-\varepsilon}(x)] \cdot E[\varphi_{-\varepsilon}(x) > F(x)]\} + R + e \\ (m > N). \end{array}\right\} \tag{1.95}$$

Мы предположили, что $F(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.3). Так как $\varphi_{-\varepsilon}(x)$ измерима и определена почти всюду на $[a, b]$, то из условия a^0, входящего в определение верхнего предела по мере [см. введение, (7)], следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_m(x) > \varphi_{-\varepsilon}(x)] \cdot E[\varphi_{-\varepsilon}(x) > F(x)]\} = 0.$$

В таком случае можно определить натуральное число N', удовлетворяющее условиям

$$N' > N, \tag{1.96}$$

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes}\{E[f_m(x) > \varphi_{-\varepsilon}(x)] \cdot E[\varphi_{-\varepsilon}(x) > F(x)]\} < \sigma \\ (m > N'), \end{array}\right\} \tag{1.97}$$

откуда, на основании (1.90), (1.93) и (1.95),

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes}\{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} < 3\sigma \\ (m > N'). \end{array}\right\} \tag{1.98}$$

Итак, для любого положительного числа σ мы можем подобрать такое натуральное число N', что выполняется неравенство (1.98), а тогда

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0. \tag{1.99}$$

Так как в равенстве (1.99) $\varphi(x)$ есть произвольная измеримая функция, определенная почти всюду на $[a, b]$, то мы видим, таким образом, что функции $F(x)$ и $g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию a^0 [равенство (7)], если в этом условии заменить функции $f_k(x)$ функциями $g_m(x)$. Иначе говоря, по отношению к последовательности (1.4) функция $F(x)$ удовлетворяет условию a^0, входящему в определение верхнего предела по мере.

Докажем теперь, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию b^0, входящему в определение верхнего предела по мере [см. введение, неравенство (8)], если в этом определении взять $g_m(x)$ вместо $f_k(x)$. Для этого возьмем произвольную измеримую функцию $\chi(x)$, определенную почти всюду на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющую условию

$$\operatorname{mes} E[F(x) > \chi(x)] > 0. \tag{1.100}$$

Для любого положительного числа α определим функцию $\chi_\alpha(x)$ из равенств

$$\chi_\alpha(x) = \chi(x) + \alpha, \tag{1.101}$$

если $\chi(x)$ конечна,

$$\chi_\alpha(x) = \chi(x), \tag{1.102}$$

если $\chi(x) = +\infty$, и

$$\chi_\alpha(x) = -\frac{1}{\alpha}, \tag{1.103}$$

если $\chi(x) = -\infty$.

Тогда функция $\chi_\alpha(x)$ будет измерима и определена почти всюду на $[a, b]$. Возьмем последовательность положительных чисел α_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям (1.85).

Из равенств (1.101), (1.102) и (1.103) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{\alpha_n}(x) = \chi(x), \quad \chi_{\alpha_n}(x) \geqslant \chi_{\alpha_{n+1}}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

для всех x на $[a, b]$, для которых функция $\chi(x)$ определена, а в таком случае

$$E[F(x) > \chi(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} E[F(x) > \chi_{\alpha_n}(x)], \tag{1.104}$$

$$\left.\begin{array}{c} E[F(x) > \chi_{\alpha_n}(x)] \subset E[F(x) > \chi_{\alpha_{n+1}}(x)] \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \tag{1.105}$$

Из этих соотношений получаем

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} E[F(x) > \chi_{\alpha_n}(x)] = \operatorname{mes} E[F(x) > \chi(x)]. \tag{1.106}$$

На основании (1.100) и (1.106) мы можем определить положительное число δ, для которого выполняется неравенство

$$\operatorname{mes} E[F(x) > \chi_\delta(x)] > 0. \tag{1.107}$$

Мы предполагаем, что $F(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.3). Так как $\chi_\delta(x)$ измерима, определена почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяет условию (1.107), то, полагая

$$\mu = \overline{\lim_{m\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_m(x) > \chi_\delta(x)] \cdot E[F(x) > \chi_\delta(x)]\} \tag{1.108}$$

и принимая во внимание условие b^0, входящее в определение верхнего предела по мере [см. введение, (8)]*, будем иметь

$$\mu > 0. \tag{1.109}$$

Возьмем положительное число ε, удовлетворяющее неравенствам

$$\varepsilon < \delta, \quad \varepsilon < \mu. \tag{1.110}$$

Из сравнения равенств (1.29), (1.30) и (1.31) [см. формулировку леммы F] с равенствами (1.101), (1.102) и (1.103) мы видим, что функция $\chi_\alpha(x)$ получается из функции $\chi(x)$ совершенно так же, как функция $\gamma_\alpha(x)$ получалась из функции $\gamma(x)$. Так как, по условию леммы G, последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на сегменте $[a, b]$, то, на основании леммы F, в которой берем $\chi(x)$ вместо $\varphi(x)$, мы можем подобрать такое натуральное число N_0, что

$$E[f_m(x) > \chi_\varepsilon(x)] - e_0 \subset E[g_m(x) > \chi(x)] \tag{1.111}$$

для всех $m > N_0$, где e_0 не зависит от m и

$$\operatorname{mes} e_0 < \varepsilon. \tag{1.112}$$

Из равенств (1.101), (1.102), (1.103) и из первого неравенства (1.110) получаем

$$\chi_\delta(x) \geqslant \chi_\varepsilon(x) \geqslant \chi(x)$$

---

* Мы берем в условии b^0 $\chi_\delta(x)$ вместо $\chi(x)$.

для всех x на $[a, b]$, в которых функция $\chi(x)$ определена, а в таком случае

$$E[F(x) > \chi_\delta(x)] \subset E[F(x) > \chi(x)],$$
$$E[f_m(x) > \chi_\delta(x)] \subset E[f_m(x) > \chi_\varepsilon(x)]$$
$$(m = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, на основании (1.111),

$$\left.\begin{array}{c} \{E[f_m(x) > \chi_\delta(x)] \cdot E[F(x) > \chi_\delta(x)]\} - e_0 \subset \\ \subset \{E[g_m(x) > \chi(x)] \cdot E(F(x) > \chi(x)] \\ (m = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \qquad (1.113)$$

Сопоставляя (1.108), (1.110), (1.112) и (1.113), будем иметь

$$0 < \mu - \varepsilon < \overline{\lim_{m\to\infty}} \{E[g_m(x) > \chi(x)] \cdot E[F(x) > \chi(x)]\}. \qquad (1.114)$$

Так как $\chi(x)$ есть произвольная измеримая функция, определенная почти всюду на $[a, b]$ и удовлетворяющая условию (1.100), то неравенство (1.114) означает, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию b^0, входящему в определение верхнего предела по мере, если в этом определении взять $g_m(x)$ вместо $f_k(x)$. Раньше мы уже доказали, что по отношению к последовательности функций $g_m(x)$ функция $F(x)$ удовлетворяет условию a^0, входящему в определение верхнего предела по мере. Отсюда следует, что $F(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.4).

Докажем теперь, что $G(x)$ есть нижний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.4). В самом деле, мы предположили, что $G(x)$ есть нижний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.3). В таком случае, на основании теоремы D работы [2] *, — $G(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности функций $-f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ Так как, по условию настоящей леммы, последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[a, b]$, то последовательности функций $-f_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, и $-g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, также являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[a, b]$, а в таком случае, в силу уже доказанной первой части настоящей леммы, $-G(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности функций $-g_m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$ Применяя еще раз теорему D работы [2], мы видим, что $G(x)$ есть нижний предел по мере на $[a, b]$ последовательности (1.4). Раньше мы уже доказали, что $F(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ той же последовательности; следовательно, лемма G доказана.

Лемма H. *Пусть F_m, $m = 1, 2, \ldots$, — последовательность измеримых множеств и p_m, $m = 1, 2, \ldots$, — последовательность натуральных чисел, которые удовлетворяют условиям:*

I. $$\operatorname{mes} F_m = (b - a)\lambda_m, \qquad F_m \subset (a, b) \qquad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (1.115)$$

где (a, b) — некоторый интервал, не зависящий от m, числа λ_m удовлетворяют неравенству

$$0 < \lambda_m < 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \qquad (1.116)$$

и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \qquad (1.117)$$

расходится.

---

* [2], стр. 15.

II. *Любое из множеств* F_m, $m = 1, 2, \ldots$, *состоит из конечного числа попарно не пересекающихся интервалов, концы которых находятся среди чисел* $a + \frac{(b-a)\,t}{2p_m}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, 2p_m$.

III. *Числа* $\frac{p_{m+1}}{p_m}$, $m = 1, 2, \ldots$, *— целые.*

IV. *Для каждого значения* $m = 1, 2, \ldots$ *все множества*

$$\left\{F_{m+1} \cdot \left(a + \frac{(b-a)\,(t-1)}{2p_m},\quad a + \frac{(b-a)\,t}{2p_m}\right)\right\}$$
$$(t = 1, 2, \ldots, 2p_m)$$

имеют одну и ту же меру M_m, *которая, вообще говоря, зависит от* m, *но не зависит от* t.

При этих условиях

$$\operatorname{mes} \varliminf_{m\to\infty} F_m = b - a. \tag{1.118}$$

Доказательство этой леммы дано в работе [3] *.

Лемма I. *Положим*

$$\left.\begin{gathered} x_{mi} = a + \frac{i}{2^m}(b-a) \\ (i = 0, 1, 2, \ldots 2^m,\ m = 1, 2, \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{1.119}$$

$$\left.\begin{gathered} E_m = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} (x_{m,\,2j-2},\ x_{m,\,2j-1}),\quad G_m = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} (x_{m,\,2j-1},\ x_{m,\,2j}) \\ (m = 1, 2, \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{1.120}$$

где $a < b$.

Тогда

$$\operatorname{mes} \varliminf_{m\to\infty} E_m = b - a, \quad \operatorname{mes} \varliminf_{m\to\infty} G_m = b - a, \tag{1.121}$$

$$\varliminf_{m\to\infty} E_m \subset (a, b), \quad \varliminf_{m\to\infty} G_m \subset (a, b). \tag{1.122}$$

Доказательство. Из равенств (1.119) и (1.120) имеем

$$\left.\begin{gathered} x_{m0} = a < x_{m1} < \ldots < x_{mi} < \ldots < x_{m,\,2^m} = b \\ (m = 1, 2, \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{1.123}$$

$$x_{mi} - x_{m,\,i-1} = \frac{b-a}{2^m} \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^m,\ m = 1, 2, \ldots), \tag{1.124}$$

$$E_m \subset (a, b), \quad G_m \subset (a, b) \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1.125}$$

откуда получаем соотношения (1.122).

Чтобы доказать справедливость равенств (1.121), мы докажем, что каждая из последовательностей множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots \tag{1.126}$$

и

$$G_1, G_2, \ldots, G_m, \ldots \tag{1.127}$$

удовлетворяет условиям леммы H, если в этой лемме взять E_m или G_m вместо F_m.

---

* [3], лемма 3.1, стр. 629.

На основании (1.120), (1.123) и (1.124),

$$\left.\begin{gathered}\operatorname{mes} E_m = \frac{b-a}{2^m}\cdot 2^{m-1} = \frac{b-a}{2},\quad \operatorname{mes} G_m = \frac{b-a}{2}\\ (m=1,\ 2,\ \ldots)\end{gathered}\right\} \tag{1.128}$$

и, следовательно, в силу (1.125), каждая из последовательностей (1.126) и (1.127) удовлетворяет условию I леммы H, в которой полагаем $\lambda_m = \frac{1}{2}$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$.

Из равенств (1.120) следует, что каждое из множеств E_m и G_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, состоит из конечного числа попарно не пересекающихся интервалов, концы которых находятся среди точек x_{mi}, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 2^m$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$ В таком случае из равенств (1.119) следует, что каждая из последовательностей множеств (1.126) и (1.127) удовлетворяет условию II леммы H, в которой полагаем

$$p_m = 2^{m-1} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.129}$$

и берем E_m или G_m вместо F_m.

Из равенств (1.129) следует, что натуральные числа p_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяют условию III леммы H. Докажем теперь, что каждая из последовательностей множеств (1.126), (1.127) и числа p_m, определяемые из равенств (1.129), удовлетворяют условию IV леммы H.

Мы будем иметь, на основании (1.119), (1.120) и (1.124),

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}\left\{E_{m+1}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(t-1)}{2^m},\ a+\frac{(b-a)t}{2^m}\right)\right\} =\\ &= \operatorname{mes}\left\{E_{m+1}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(2t-2)}{2^{m+1}},\ a+\frac{(b-a)(2t-1)}{2^{m+1}}\right)\right\} +\\ &+ \operatorname{mes}\left\{E_{m+1}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(2t-1)}{2^{m+1}}\right),\ a+\frac{(b-a)\cdot 2t}{2^{m+1}}\right)\right\} =\\ &= \operatorname{mes}\left\{E_{m+1}\cdot(x_{m+1,\,2t-2},\ x_{m+1,\,2t-1})\right\} = \frac{b-a}{2^{m+1}}\\ &\qquad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^m,\ m=1,\ 2,\ \ldots)\end{aligned}$$

и, точно так же

$$\begin{aligned}&\operatorname{mes}\left\{G_{m+1}\cdot\left(a+\frac{(b-a)(t-1)}{2^m},\ a+\frac{(b-a)t}{2^m}\right)\right\} =\\ &= \operatorname{mes}\left\{G_{m+1}\cdot(x_{m+1,\,2t-1},\ x_{m+1,\,2t})\right\} = \frac{b-a}{2^{m+1}}\\ &\qquad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ 2^m,\ m=1,\ 2,\ \ldots),\end{aligned}$$

откуда следует, в силу (1.129), что последовательности (1.126) и (1.127) и числа p_m удовлетворяют условию IV леммы H, в которой полагаем $M_m = \frac{b-a}{2^{m+1}}$.

Итак, последовательности множеств (1.126), (1.127) и числа p_m, определяемые из равенств (1.129), удовлетворяют всем условиям леммы H, а в таком случае, в силу этой леммы, мы получаем равенства (1.121). Так как соотношения (1.122) уже доказаны, то лемма I доказана вполне.

Лемма J. *Предположим, что последовательность измеримых множеств H_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяет условиям*:

$$\left.\begin{gathered}\alpha^0.\qquad \operatorname{mes} H_m > \lambda > 0,\quad H_m \subset [-\pi,\ \pi]\\ (m=1,\ 2,\ \ldots)\end{gathered}\right\} \tag{1.130}$$

где λ *не зависит от* m;

$$\beta^0. \qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(H_m\cdot[c,\,d])}{\operatorname{mes}H_m}=\frac{d-c}{2\pi} \tag{1.131}$$

для любого сегмента $[c,\,d]\subset[-\pi,\,\pi]$.

В таком случае

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(H_m\cdot\Omega)}{\operatorname{mes}H_m}=\frac{\operatorname{mes}\Omega}{2\pi} \tag{1.132}$$

для любого измеримого множества Ω, *лежащего на* $[-\pi,\,\pi]$.

Доказательство этой леммы дано в работе [2] *. Для множества Ω меры нуль равенство (1.132) очевидно.

В этом параграфе мы докажем еще лемму, которая является обобщением известной теоремы Егорова о последовательностях измеримых функций. Прежде всего мы введем следующее определение.

Определение 3. Мы будем говорить, что последовательность (1.3) функций $f_m(x)$, $m=1,\,2,\,\ldots$, определенных ** на некотором множестве E, сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве E, если для любого положительного числа ε можно определить такое натуральное число N, что для любых $x\in E$ и для любых натуральных $m>N$ выполняется одно из следующих условий:

$$\alpha^0. \qquad -\infty<f_m(x)<+\infty, \quad |f_m(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

если $f(x)$ конечна;

$$\beta^0. \qquad f_m(x)>\frac{1}{\varepsilon},$$

если $f(x)=+\infty$;

$$\gamma^0. \qquad f_m(x)<-\frac{1}{\varepsilon},$$

если $f(x)=-\infty$.

Лемма К. *Если последовательность* (1.3) *измеримых функций* $f_m(x)$, $m=1,\,2,\,\ldots$, *определенных почти всюду на измеримом множестве* E, *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на этом множестве, то для любого положительного числа* σ *можно определить измеримое множество* M, *удовлетворяющее условиям*

$$M\subset E,\ \operatorname{mes}M>\operatorname{mes}E-\sigma \tag{1.133}$$

и такое, что последовательность (1.3) *сходится равномерно к* $f(x)$ *на множестве* M.

Доказательство. Определим функции $g_m(x)$, $m=1,\,2,\,\ldots$, последовательности (1.4) из равенств

$$g_m(x)=f(x) \quad (m=1,\,2,\,\ldots). \tag{1.134}$$

Тогда функции этой последовательности будут определены почти всюду на E. Кроме того, так как по условию леммы, последовательность (1.3) сходится к $f(x)$ почти всюду на E, то из равенств (1.134) непосредственно следует, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на E.

Положим

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\{E\cdot E[-\infty<f(x)<+\infty]\},\\ E_2=\{E\cdot E[f(x)=+\infty]\},\ \ E_3&=\{E\cdot E[f(x)=-\infty]\},\end{aligned}\right\} \tag{1.135}$$

---

* [2], лемма 5,1, стр. 53.

** Функции $f_m(x)$ могут равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

откуда следует, что множества E_i, $i=1, 2, 3$, измеримы, причем

$$E \supset \sum_{i=1}^{3} E_i, \operatorname{mes} E = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{mes} E_i, \ (E_i \cdot E_j) = 0 \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, 3). \tag{1.136}$$

Возьмем произвольное положительное число σ. Так как $f(x)$ измерима и конечна всюду на E_1, то мы можем определить такое положительное число C и такое измеримое множество E_4, что

$$E_4 \subset E_1, \ \operatorname{mes} E_4 > \operatorname{mes} E_1 - \frac{\sigma}{2}, \tag{1.137}$$

$$|f(x)| < C \qquad (x \in E_4). \tag{1.138}$$

Положим

$$E' = \sum_{i=2}^{4} E_i. \tag{1.139}$$

Тогда, на основании (1.136) и (1.137),

$$E' \subset E, \ \operatorname{mes} E' > \operatorname{mes} E - \frac{\sigma}{2}, \tag{1.140}$$

$$(E_i \cdot E_j) = 0 \quad (i \neq j, \ i, j = 2, 3, 4), \tag{1.141}$$

причем последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися почти всюду на E'. Применяя к этим последовательностям лемму Е, в которой берем $\frac{\sigma}{2}$ и E' вместо σ и E, мы видим, что существует измеримое множество M, удовлетворяющее условиям

$$M \subset E' \subset E, \ \operatorname{mes} M > \operatorname{mes} E' - \frac{\sigma}{2} > \operatorname{mes} E - \sigma. \tag{1.142}$$

и такое, что последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M.

Докажем, что последовательность (1.3) равномерно сходится к $f(x)$ на M. Возьмем произвольное положительное число ε и предположим, что положительное число ε' удовлетворяет условиям

$$\varepsilon' < \varepsilon, \ \ \frac{1}{\varepsilon'} > C. \tag{1.143}$$

Так как последовательности (1.3) и (1.4) являются равностепенно сходящимися равномерно на множестве M, то, в силу определения 2 и равенств (1.134), можно определить такое натуральное число N, что для всех $x \in M$ и для всех натуральных $m > N$ выполняется одно из трех неравенств:

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon', \tag{1.144}$$

если $f_m(x)$ и $f(x)$ конечны,

$$f_m(x) > \frac{1}{\varepsilon'}, \ \ f(x) > \frac{1}{\varepsilon'} \tag{1.145}$$

если хоть одна из функций $f_m(x)$ или $f(x)$ равна $+\infty$, и

$$f_m(x) < -\frac{1}{\varepsilon'}, \ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon'}, \tag{1.146}$$

если хоть одна из функций $f_m(x)$ или $f(x)$ равна $-\infty$.

Из (1.139) и (1.142) получаем

$$M \subset \sum_{i=2}^{4} E_i,$$

и, следовательно, сопоставляя (1.135) и (1.137) с неравенствами (1.138) и (1.143), мы видим, что

$$|f(x)| < \frac{1}{\varepsilon'},$$

если $x \in M$ и $f(x)$ конечна, т. е. вторые неравенства (1.145) и (1.146) не могут выполняться, если $x \in M$ и $f(x)$ конечна. В таком случае, если

$$x \in M, \quad m > N \tag{1.147}$$

и $f(x)$ конечна, то $f_m(x)$ не может равняться $+\infty$ или $-\infty$, так как в противном случае выполнялись бы или оба неравенства (1.145), или оба неравенства (1.146), что невозможно.

Таким образом, если x и m удовлетворяют условиям (1.147) и $f(x)$ конечна, то $f_m(x)$ также конечна и выполняется неравенство (1.144). Далее, если x и m удовлетворяют условиям (1.147) и $f(x) = +\infty$ или $f(x) = -\infty$, то будет выполняться соответственно или первое неравенство (1.145), или первое неравенство (1.146).

Так как $\varepsilon' < \varepsilon$ [первое неравенство (1.143)], то мы приходим к следующему заключению:

Если $x \in M$ и $m > N$, то выполняются неравенства α, β или γ (см. определение 3) в зависимости от того, будет ли $f(x)$ конечна, или будет равна $+\infty$, или же будет равна $-\infty$. Так как ε может быть произвольным положительным числом, то отсюда следует, в силу определения 3, что последовательность (1.3) сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве M. Тем самым лемма K доказана.

§ 2. Доказательство теоремы III, формулированной во введении

Предположим, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ измеримы, определены почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют неравенству (4) (см. введение) почти всюду на этом сегменте. Возьмем произвольный тригонометрический ряд типа $A(F_1, F_2)$, т. е. универсальный относительно функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (см. введение, определение A).

Рассмотрим любые измеримые функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, определенные почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие условию (11) почти всюду на том же сегменте (см. введение, определение 2). Мы можем определить перечисленные шесть функций в тех точках сегмента $[-\pi, \pi]$, где они не были первоначально определены таким образом, что неравенства (4) и (11) будут выполняться всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, причем эти функции будут попрежнему измеримы на данном сегменте.

Предполагая, что m есть произвольное натуральное число, разделим сегмент $[-\pi, \pi]$ на 2^m равных частей и обозначим точки деления, перенумерованные в возрастающем порядке, через x_{mi}, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x_{mi} &= -\pi + \frac{2\pi i}{2^m} = -\pi + \frac{\pi i}{2^{m-1}} \\ x_{mi} - x_{m,\,i-1} &= \frac{\pi}{2^{m-1}} \\ (i &= 1, 2, \ldots, 2^m, \; m = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$x_{m0} = -\pi < x_{m1} < \ldots < x_{mi} < \ldots < x_{m,\,2^m} = \pi. \tag{2.2}$$

Положим

$$E_m = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} (x_{m,\,2j-2},\; x_{m,\,2j-1}), \quad G_m = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} (x_{m,\,2j-1},\; x_{m,\,2j}), \tag{2.3}$$

откуда следует, на основании (2.2), что

$$\left.\begin{gathered} E_m \subset (-\pi,\ \pi),\ G_m \subset (-\pi,\ \pi),\ (E_m \cdot G_m) = 0 \\ (m = 1,\ 2,\ \ldots). \end{gathered}\right\} \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.3), мы видим, что последовательности множеств E_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, и G_m, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяют условиям леммы I (§ 1), в которой $(a,\ b) = (-\pi,\ \pi)$. Следовательно, полагая

$$E = \overline{\lim_{m \to \infty}}\ E_m,\quad G = \overline{\lim_{m \to \infty}}\ G_m, \tag{2.5}$$

будем иметь, на основании этой леммы,

$$\left.\begin{gathered} \operatorname{mes} E = 2\pi,\ \operatorname{mes} G = 2\pi, \\ E \subset (-\pi,\ \pi),\ G \subset (-\pi,\ \pi). \end{gathered}\right\} \tag{2.6}$$

Определим функции $g_m(x)$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, из условий

$$\left.\begin{gathered} g_m(x) = \psi_1(x),\quad (x \in E_m),\quad g_m(x) = \psi_2(x),\quad (x \in G_m), \\ g_m(x_{mi}) = \psi_1(x_{mi}) \\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^m,\ m = 1,\ 2,\ \ldots). \end{gathered}\right\} \tag{2.7}$$

На основании (2.2) и (2.3) функции $g_m(x)$, $m = 1,\ 2,\ \ldots$, будут определены всюду на сегменте $[-\pi,\ \pi]$ и будут измеримы на этом сегменте. При этом, так как неравенство (11) выполняется всюду на $[-\pi,\ \pi]$, то в силу (2.7),

$$\left.\begin{gathered} \psi_1(x) \leqslant g_m(x) \leqslant \psi_2(x) \\ (x \in [-\pi,\ \pi],\ m = 1,\ 2,\ \ldots). \end{gathered}\right\} \tag{2.8}$$

Предполагая, что ν есть натуральное число, определим целые числа m_ν и j_ν из условий

$$2^{m_\nu - 1} \leqslant \nu < 2^{m_\nu},\quad j_\nu = \nu - 2^{m_\nu - 1} + 1. \tag{2.9}$$

Ясно, что числа m_ν и j_ν определяются однозначно для любого натурального ν, причем

$$m_\nu > 0,\ 1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m_\nu - 1} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.10}$$

$$\lim_{\nu \to \infty} m_\nu = \infty. \tag{2.11}$$

Положим

$$\Phi_\nu(x) = \varphi_1(x) \quad [x \in (x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 2},\quad x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 1})], \tag{2.12}$$

$$\Phi_\nu(x) = \varphi_2(x) \quad [x \in (x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 1},\quad x_{m_\nu,\ 2j_\nu})], \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{gathered} \Phi_\nu(x) = g_{m_\nu}(x) \\ (x \in [-\pi,\ \pi] - (x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 2},\quad x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 1}) - (x_{m_\nu,\ 2j_\nu - 1},\quad x_{m_\nu,\ 2j_\nu}) \end{gathered}\right\} \tag{2.14}$$

Тогда для любого натурального числа ν функции $\Phi_\nu(x)$ будут определены всюду на $[-\pi,\ \pi]$ и будут измеримы на этом сегменте. Кроме того, в силу (11), (2.8), (2.12), (2.13) и (2.14),

$$\varphi_1(x) \leqslant \Phi_\nu(x) \leqslant \varphi_2(x) \quad (x \in [-\pi,\ \pi],\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.15}$$

Определим теперь функции $f_k(x)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, из условий

$$\left.\begin{gathered} f_{2m}(x) = g_m(x),\ f_{2m-1}(x) = \Phi_m(x) \\ (x \in [-\pi,\ \pi],\ m = 1,\ 2,\ \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{2.16}$$

откуда следует, на основании (11), (2.8) и (2.15), что

$$\left.\begin{gathered} \varphi_1(x) \leqslant f_k(x) \leqslant \varphi_2(x) \\ (x \in [-\pi,\ \pi],\quad k = 1,\ 2,\ \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{2.17}$$

причем функции $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$ измеримы и определены всюду на $[-\pi, \pi]$.

Докажем, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $f_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$. Возьмем произвольную измеримую функцию $\varphi(x)$, определенную почти всюду на $[-\pi, \pi]$, и рассмотрим множества

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k' &= \{E[f_k(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < \psi_1(x)]\}, \\ \Omega_k'' &= \{E[f_k(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > \psi_2(x)]\} \\ &(k=1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Если k равно четному числу, т. е.

$$k = 2m, \tag{2.19}$$

где m есть натуральное число, то, на основании первого равенства (2.16),

$$f_k(x) = f_{2m}(x) = g_m(x) \quad (x \in [-\pi, \pi]), \tag{2.20}$$

откуда, в силу (2.8),

$$\psi_1(x) \leqslant f_k(x) \leqslant \psi_2(x) \quad (x \in [-\pi, \pi]). \tag{2.21}$$

В таком случае, из равенств (2.18) получаем $\Omega_k' = 0$, $\Omega_k'' = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{mes} \Omega_k' = 0, \quad \operatorname{mes} \Omega_k'' = 0, \tag{2.22}$$

если k — четное.

Предположим теперь, что k есть нечетное число, т. е.

$$k = 2\nu - 1, \tag{2.23}$$

где ν — натуральное число. Тогда, на основании второго равенства (2.16),

$$f_k(x) = f_{2\nu-1}(x) = \Phi_\nu(x) \qquad (x \in [-\pi, \pi])$$

и, следовательно, в силу равенств (2.18),

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k' &= \{E[\Phi_\nu(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < \psi_1(x)]\}, \\ \Omega_k'' &= \{E[\Phi_\nu(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > \psi_2(x)]\} \\ &(k = 2\nu - 1, \ \nu = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Принимая во внимание (2.8), получаем

$$\begin{gathered} \{E[g_m(x) < \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) < \psi_1(x)]\} = 0, \\ \{E[g_m(x) > \varphi(x)] \cdot E[\varphi(x) > \psi_2(x)]\} = 0 \\ (m = 1, 2, \ldots), \end{gathered}$$

а в таком случае, на основании (2.14) и (2.24),

$$\left.\begin{aligned} \Omega_k' &\subset (x_{m_\nu, 2j_\nu - 2}, \ x_{m_\nu, 2j_\nu - 1}) + (x_{m_\nu, 2j_\nu - 1}, \ x_{m_\nu, 2j_\nu}), \\ \Omega_k'' &\subset (x_{m_\nu, 2j_\nu - 2}, \ x_{m_\nu, 2j_\nu - 1}) + (x_{m_\nu, 2j_\nu - 1}, \ x_{m_\nu, 2j_\nu}) \\ &(k = 2\nu - 1, \ \nu = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где целые числа m_ν и j_ν определяются из условий (2.9). Сопоставляя (2.25) со вторым равенством (2.1), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{mes} \Omega_k' \leqslant \frac{2\pi}{2^{m_\nu - 1}} = \frac{\pi}{2^{m_\nu - 2}}, \quad \operatorname{mes} \Omega_k'' \leqslant \frac{\pi}{2^{m_\nu - 2}} \\ &(k = 2\nu - 1, \ \nu = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Если рассматривать ν как функцию нечетного натурального числа k, определяемую из равенства $k = 2\nu - 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \nu = \infty$ и следовательно, в силу (2.11),

$$\lim_{k\to\infty} m_\nu = \infty, \tag{2.27}$$

а тогда, на основании (2.26), величины $\operatorname{mes}\Omega'_k$ и $\operatorname{mes}\Omega''_k$ стремятся к нулю, когда $k \to \infty$, принимая нечетные значения. Мы видим отсюда, принимая во внимание (2.22), что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\Omega'_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\Omega''_k = 0. \tag{2.28}$$

Мы определим множества Ω'_k и Ω''_k, $k = 1, 2, \ldots$, из равенств (2.18), где $\varphi(x)$ есть произвольная измеримая функция, определенная почти всюду на $[-\pi, \pi]$. В таком случае функция $\psi_1(x)$ удовлетворяет условию α^0, входящему в определение нижнего предела по мере последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, если в этом условии взять $\psi_1(x)$ вместо $G(x)$ и положить $[a, b] = [-\pi, \pi]$ [см. введение, равенство (9)]. Точно так же, функция $\psi_2(x)$ удовлетворяет условию a^0, входящему в определение верхнего предела по мере последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, если в этом условии взять $\psi_2(x)$ вместо $F(x)$ и опять положить $[a, b] = [-\pi, \pi]$ [см. введение, равенство (7)].

Докажем теперь, что функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, взятые соответственно вместо $G(x)$ и $F(x)$, удовлетворяют условиям β^0 и b^0, входящим в определения нижнего и верхнего предела по мере последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, на сегменте $[a, b] = [-\pi, \pi]$ (см. введение, неравенства (10) и (8)].

Возьмем произвольный сегмент $[c, d] \subset [-\pi, \pi]$. На основании второго равенства (2.1),

$$\left.\begin{aligned} x_{mi} - x_{m,\,i-1} &= \frac{\pi}{2^{m-1}} \\ (i &= 1, 2, \ldots, 2^m, \; m = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

В таком случае, если m удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi}{2^{m-1}} < \frac{d-c}{2}, \tag{2.30}$$

то мы можем определить натуральные числа r и s, для которых выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} x_{m,2r-2} \leqslant c < x_{m,2r} < x_{m,2s} < d \leqslant x_{m,2s+2}, \\ 1 \leqslant r < s < 2^{m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.31}$$

Числа r и s вообще зависят от m.

Принимая во внимание (2.2) и (2.3), будем иметь для m, удовлетворяющих неравенству (2.30),

$$\{E_m \cdot (x_{m,2r},\ x_{m,2s})\} = \sum_{j=r+1}^{s} (x_{m,2j-2},\ x_{m,2j-1}) \subset$$

$$\subset \{E_m \cdot (c,\ d)\} \subset \{E_m \cdot (x_{m,2r-2},\ x_{m,2s+2})\} = \sum_{j=r}^{s+1} (x_{m,2j-2},\ x_{m,2j-1}),$$

$$\{G_m \cdot (x_{m,2r},\ x_{m,2s})\} = \sum_{j=r+1}^{s} (x_{m,2j-1},\ x_{m,2j}) \subset$$

$$\subset \{G_m \cdot (c,\ d)\} \subset \{G_m \cdot (x_{m,2r-2},\ x_{m,2s+2})\} = \sum_{j=r}^{s+1} (x_{m,2j-1},\ x_{m,2j}),$$

откуда, на основании (2.1) и (2.2),

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=r+1}^{s}(x_{m,2j-1}-x_{m,2j-2})=\frac{\pi}{2^{m-1}}(s-r)\leqslant \operatorname{mes}\{E_m\cdot[c,\ d]\}\leqslant\\
&\qquad\leqslant\sum_{j=r}^{s+1}(x_{m,2j-1}-x_{m,2j-2})=\frac{\pi}{2^{m-1}}(s-r+2),\\
&\sum_{j=r+1}^{s}(x_{m,2j}-x_{m,2j-1})=\frac{\pi}{2^{m-1}}(s-r)\leqslant \operatorname{mes}\{G_m\cdot[c,\ d]\}\leqslant\\
&\qquad\leqslant\sum_{j=r}^{s+1}(x_{m,2j}-x_{m,2j-1})=\frac{\pi}{2^{m-1}}(s-r+2)
\end{aligned}\right\}\tag{2.32}$$

для всех достаточно больших значений m.

С другой стороны, в силу (2.1), (2.2) и (2.3),

$$\operatorname{mes}E_m=\pi,\quad \operatorname{mes}G_m=\pi\qquad(m=1,\ 2,\ \ldots),\tag{2.33}$$

откуда, на основании (2.32),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{s-r}{2^{m-1}}\leqslant\frac{\operatorname{mes}\{E_m[c,\ d]\}}{\operatorname{mes}E_m}\leqslant\frac{s-r+2}{2^{m-1}},\\
&\frac{s-r}{2^{m-1}}\leqslant\frac{\operatorname{mes}\{G_m\cdot[c,\ d]\}}{\operatorname{mes}G_m}\leqslant\frac{s-r+2}{2^{m-1}}
\end{aligned}\right\}\tag{2.34}$$

для всех достаточно больших значений m. Кроме того, из (2.1) и (2.31) следует, что

$$\frac{2\pi}{2^{m-1}}(s-r)=x_{m,2s}-x_{m,2r}\leqslant d-c\leqslant x_{m,2s+2}-x_{m,2r-2}=\frac{2\pi}{2^{m-1}}(s-r+2),$$

откуда

$$\frac{s-r}{2^{m-1}}\leqslant\frac{d-c}{2\pi}\leqslant\frac{s-r+2}{2^{m-1}}$$

для всех достаточно больших значений m и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{s-r}{2^{m-1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{s-r+2}{2^{m-1}}=\frac{d-c}{2\pi}\ ^{*}.\tag{2.35}$$

Сопоставляя (2.34) и (2.35), получаем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{E_m[c,\ d]\}}{\operatorname{mes}E_m}=\frac{d-c}{2\pi},\quad\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{G_m\cdot[c,\ d]\}}{\operatorname{mes}G_m}=\frac{d-c}{2\pi}\tag{2.36}$$

для любого сегмента $[c,\ d]\subset[-\pi,\ \pi]$.

Принимая во внимание (2.4), (2.33) и (2.36), мы видим, что каждая из последовательностей множеств E_m, $m=1,\ 2\ldots$, и G_m, $m=1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяет всем условиям леммы J (§ 1), если в этой лемме взять E_m или G_m вместо H_m. В таком случае, на основании этой леммы,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(E_m\cdot\Omega)}{\operatorname{mes}E_m}=\frac{\operatorname{mes}\Omega}{2\pi},\quad\lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(G_m\cdot\Omega)}{\operatorname{mes}G_m}=\frac{\operatorname{mes}\Omega}{2\pi}\tag{2.37}$$

для любого измеримого множества Ω, лежащего на $[-\pi,\ \pi]$.

---

* Напомним, что r и s зависят от m и определены для всех достаточно больших значений m.

Возьмем теперь две произвольные измеримые функции $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$, определенные почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{mes} E[\psi_1(x) < \chi_1(x)] > 0, \quad \operatorname{mes} E[\psi_2(x) > \chi_2(x)] > 0. \tag{2.38}$$

Тогда, в силу (2.37),

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{E_m \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\}}{\operatorname{mes} E_m} = \frac{\operatorname{mes} E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]}{2\pi} > 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{G_m \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\}}{\operatorname{mes} G_m} = \frac{\operatorname{mes} E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]}{2\pi} > 0$$

и, следовательно, на основании (2.33),

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{E_m \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\} = \frac{1}{2} \operatorname{mes} E[\psi_1(x) < \chi_1(x)] > 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{mes}\{G_m \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\} = \frac{1}{2} \operatorname{mes} E[\psi_2(x) > \chi_2(x)] > 0,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{mes}\{E_m \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\} > \frac{1}{4} \operatorname{mes} E[\psi_1(x) < \chi_1(x)] > 0, \\ &\operatorname{mes}\{G_m \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\} > \frac{1}{4} \operatorname{mes} E[\psi_2(x) > \chi_2(x)] > 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

для всех достаточно больших значений m.

Из равенств (2.4), (2.7) и (2.16) следует, что

$$f_{2m}(x) = \psi_1(x) \qquad (x \in E_m,\ m = 1, 2, \ldots), \tag{2.40}$$

$$f_{2m}(x) = \psi_2(x) \qquad (x \in G_m,\ m = 1, 2, \ldots), \tag{2.41}$$

а в таком случае

$$\{E_m \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\} \subset \{E[f_{2m}(x) < \chi_1(x)] \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\},$$

$$\{G_m \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\} \subset \{E[f_{2m}(x) > \chi_2(x)] \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\}$$

и, следовательно, на основании (2.39),

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{mes}\{E[f_{2m}(x) < \chi_1(x)] \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\} > \frac{1}{4} \operatorname{mes} E[\psi_1(x) < \chi_1(x)] > 0, \\ &\operatorname{mes}\{E[f_{2m}(x) > \chi_2(x)] \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\} > \frac{1}{4} \operatorname{mes} E[\psi_2(x) > \chi_2(x)] > 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

для всех достаточно больших значений m. Из неравенств (2.42) получаем

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) < \chi_1(x)] \cdot E[\psi_1(x) < \chi_1(x)]\} > 0, \\ &\overline{\lim_{k\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_k(x) > \chi_2(x)] \cdot E[\psi_2(x) > \chi_2(x)]\} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

Так как неравенства (2.43) выполняются для любых измеримых функций $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющих условиям (2.38), то функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ удовлетворяют соответственно условиям β^0 и b^0, входящим в определения нижнего и верхнего пределов по мере последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, если в этих условиях взять $\psi_1(x)$ вместо $G(x)$, $\psi_2(x)$ вместо $F(x)$ и положить $[a, b] = [-\pi, \pi]$ [см. введение, неравенства (10) и (8)].

Раньше мы уже доказали, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ удовлетворяют соответственно условиям α^0 и a^0, входящим в те же определения. Отсюда следует, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$

Докажем, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняются равенства

$$\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \varphi_1(x), \quad \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x) = \varphi_2(x). \tag{2.44}$$

Как мы уже знаем, функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, определены всюду на $[-\pi, \pi]$, причем из неравенства (2.17) следует, что

$$\varphi_1(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x) \leqslant \varphi_2(x) \tag{2.45}$$

всюду на этом сегменте. Докажем теперь, что

$$\left.\begin{gathered} \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) \leqslant \varphi_1(x), \quad \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x) \geqslant \varphi_2(x) \\ [x \in (E,\ G)], \end{gathered}\right\} \tag{2.46}$$

где множества E и G определяются из равенств (2.5).

Пусть x есть произвольная точка множества $(E \cdot G)$. Тогда, на основании (2.5), мы можем определить две такие возрастающие последовательности натуральных чисел n_s и n'_s, $s = 1, 2, \ldots$, что

$$x \in E_{n_s}, \quad x \in G_{n'_s} \quad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.47}$$

Сопоставляя (2.3) и (2.47), мы видим, что существуют две последовательности натуральных чисел i_s и i'_s, $s = 1, 2, \ldots$ удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{gathered} x \in (x_{n_s,\ 2i_s-2},\ x_{n_s,\ 2i_s-1}), \quad x \in (x_{n'_s,\ 2i'_s-1},\ x_{n'_s,\ 2i'_s}) \\ (s = 1, 2, \ldots), \end{gathered}\right\} \tag{2.48}$$

$$1 \leqslant i_s \leqslant 2^{n_s-1}, \quad 1 \leqslant i'_s \leqslant 2^{n'_s-1} \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{2.49}$$

а в таком случае, полагая

$$\left.\begin{gathered} \nu_s = 2^{n_s-1} + i_s - 1, \quad \nu'_s = 2^{n'_s-1} + i'_s - 1 \\ (s = 1, 2, \ldots) \end{gathered}\right\} \tag{2.50}$$

и принимая во внимание (2.9), (2.12) и (2.13), будем иметь в данной точке x:

$$\Phi_{\nu_s}(x) = \varphi_1(x), \quad \Phi_{\nu'_s}(x) = \varphi_2(x) \quad (s = 1, 2, \ldots), \tag{2.51}$$

откуда, в силу (2.16),

$$f_{2\nu s-1}(x) = \varphi_1(x), \quad f_{2\nu'_s-1}(x) = \varphi_2(x) \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{2.52}$$

Так как каждая из последовательностей n_s, $s = 1, 2, \ldots$, и n'_s, $s = 1, 2, \ldots$, возрастает, то из (2.49) и (2.50) следует, что последовательности натуральных чисел ν_s, $s = 1, 2, \ldots$, и ν'_s, $s = 1, 2, \ldots$, также являются возрастающими, а тогда

$$\lim_{s\to\infty} \nu_s = \infty, \quad \lim_{s\to\infty} \nu'_s = \infty. \tag{2.53}$$

Так как, по предположению, x есть произвольная точка множества $(E \cdot G)$, то, сопоставляя (2.52) и (2.53), получаем неравенства (2.46). Принимая во внимание (2.6), находим

$$\operatorname{mes}(E \cdot G) = 2\pi, \quad (E \cdot G) \subset (-\pi, \pi),$$

а в таком случае, на основании (2.45) и (2.46), равенства (2.44) выполняются почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Мы предположили, что тригонометрический ряд (1) (см. введение) есть произвольный ряд типа $A(F_1, F_2)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ измеримы и удовлетворяют неравенству (4) всюду на $[-\pi, \pi]$, и мы взяли четыре измеримые функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\varphi_2(x)$, для которых выполняются неравенства (11) всюду на $[-\pi, \pi]$. При помощи этих функций мы определили на $[-\pi, \pi]$ последовательность измеримых функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, обладающих всеми перечисленными выше свойствами.

Сопоставляя неравенства (11) и (2.17), получаем

$$F_1(x) \leqslant f_k(x) \leqslant F_2(x) \qquad (x \in [-\pi, \pi],\ k = 1, 2, \ldots). \tag{2.54}$$

Так как тригонометрический ряд (1) есть ряд типа $A(F_1, F_2)$, то на основании определения A (см. введение), для любого натурального k можно определить такую последовательность возрастающих натуральных чисел m_{ki}, $i = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{i \to \infty} S_{m_{ki}}(x) = f_k(x) \tag{2.55}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$. В таком случае, в силу леммы K (§ 1), можно определить измеримое множество M_k, удовлетворяющее условиям

$$M_k \subset [-\pi, \pi],\ \operatorname{mes} M_k > 2\pi - \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.56}$$

и такое, что последовательность функций

$$S_{m_{ki}}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.57}$$

сходится равномерно к $f_k(x)$ на множестве M_k. Тогда, в силу определения 3 (§ 1), существует такое натуральное число N_k, что

$$|S_{m_{ki}}(x) - f_k(x)| < \frac{1}{k} \quad (x \in M_k,\ i > N_k), \tag{2.58}$$

если $f_k(x)$ конечна,

$$S_{m_{ki}}(x) > k \qquad (x \in M_k,\ i > N_k), \tag{2.59}$$

если $f_k(x) = +\infty$, и

$$S_{m_{ki}}(x) < -k \qquad (x \in M_k,\ i > N_k), \tag{2.60}$$

если $f_k(x) = -\infty$.

Так как для каждого k натуральные числа m_{ki}, $i = 1, 2, \ldots$, образуют возрастающую последовательность, то мы можем определить последовательность натуральных чисел j_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условиям

$$j_k > N_k, \quad m_{k, j_k} < m_{k+1, j_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.61}$$

В таком случае, полагая

$$n_k = m_{k, j_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.62}$$

и, принимая во внимание (2.58), (2.59) и (2.60), будем иметь

$$|S_{n_k}(x) - f_k(x)| < \frac{1}{k} \qquad (x \in M_k), \tag{2.63}$$

если $f_k(x)$ конечна,

$$S_{n_k}(x) > k \qquad (x \in M_k), \tag{2.64}$$

если $f_k(x) = +\infty$, и

$$S_{n_k}(x) < -k \qquad (x \in M_k), \tag{2.65}$$

если $f_k(x) = -\infty$. При этом, в силу второго неравенства (2.61), натуральные числа n_k, $k = 1, 2, \ldots$, образуют возрастающую последовательность.

Полагая

$$Q = \overline{\lim_{k \to \infty}} M_k \tag{2.66}$$

и принимая во внимание (2.56), получаем

$$\operatorname{mes} Q = 2\pi, \quad Q \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.67}$$

Докажем, что последовательности функций

$$S_{n_k}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.68}$$

и

$$f_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.69}$$

являются равностепенно сходящимися в каждой точке множества Q.

Пусть x есть произвольная точка множества Q. Тогда, на основании (2.66), существует такое натуральное число k_x, что

$$x \in M_k \qquad (k > k_x). \tag{2.70}$$

Предположим, что k неограниченно возрастает, принимая значения, для которых $f_k(x)$ конечна. В таком случае, принимая во внимание (2.63) и (2.70), мы видим, что $S_{n_k}(x) - f_k(x)$ стремится к нулю. Предположим, далее, что k неограниченно возрастает, принимая значения, для которых $f_k(x) = +\infty$. Тогда, в силу (2.64) и (2.70), $S_{n_k}(x)$ стремится к $+\infty$. Наконец, если k неограниченно возрастает, принимая значения, для которых $f_k(x) = -\infty$, то, на основании (2.65) и (2.70), $S_{n_k}(x)$ стремится к $-\infty$.

Так как $S_{n_k}(x)$ может принимать только конечные значения, то из сказанного следует, в силу определения 1 (§ 1), что последовательности функций (2.68) и (2.69) являются равностепенно сходящимися в каждой точке множества Q, а в таком случае, принимая во внимание (2.67), мы видим, что последовательности функций (2.68) и (2.69) являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Мы уже видели, что $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций (2.69). Кроме того, мы доказали, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняются равенства (2.44). Так как последовательности функций (2.68) и (2.69) являются равностепенно сходящимися почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то на основании неравенства (11) (см. введение), леммы G и леммы C (§ 1), $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ являются соответственно нижним и верхним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ последовательности функций (2.68) и, кроме того, равенства

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} S_{n_k}(x) = \varphi_1(x), \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} S_{n_k}(x) = \varphi_2(x) \tag{2.71}$$

выполняются почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Итак, мы предположили, что тригонометрический ряд (1) есть произвольный ряд типа $A(F_1, F_2)$, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющие неравенству (4) почти всюду на этом сегменте, и мы доказали, что для любых измеримых функций $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)$, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющих неравенству (11) почти всюду на этом сегменте *, можно определить такую возрастающую последовательность натуральных чисел n_k, $k = 1, 2, \ldots$, что для последовательности частных сумм $S_{nk}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$,

---

* При доказательстве мы определили функции $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\varphi_2(x)$ в тех точках, где они не были первоначально определены, таким образом, чтобы неравенства (4) и (11) выполнялись всюду на $[-\pi, \pi]$.

ряда (1) выполняются равенства (2.71) почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и, кроме того, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ равны нижнему и верхнему пределам по мере на $[-\pi, \pi]$ той же последовательности. Отсюда следует, что ряд (1) есть ряд типа $B(F_1, F_2)$ (см. введение, определение B), т. е. произвольный тригонометрический ряд типа $A(F_1, F_2)$ есть ряд типа $B(F_1, F_2)$, что и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Е. Меньшов. Об универсальных тригонометрических рядах. ДАН СССР, т. 49 (1945), стр. 79—82.

2. Д. Е. Меньшов. О сходимости по мере тригонометрических рядов. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, XXXII (1950), стр. 3—97.

3. Д. Е. Меньшов. О пределах неопределенности рядов Фурье. Математический сборник, т. 30 (72), вып. 3 (1952), стр. 601—650.