В. В. Васин, Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1988, том 28, номер 7, 971–980

https://www.mathnet.ru/zvmmf3608

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28, 1988 № 7

УДК 517.988.8

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВАСИН В. В.

(Свердловск)

Для операторных уравнений I рода с дополнительными ограничениями на решение исследуются одношаговые итерационные процессы, являющиеся суперпозицией некоторой базовой схемы и псевдосжимающих отображений, отвечающих за априорную информацию. Установлена слабая сходимость итераций и их устойчивость к возмущениям исходных данных. Рассмотрены приложения к линейным и нелинейным интегральным уравнениям.

§ 1. Введение

1. Постановка задачи. На паре гильбертовых пространств X, Y рассматривается (не) линейное операторное уравнение I рода

(1.1) $\qquad Ax=y_0$

в условиях возможного нарушения условий корректности Адамара (единственности, устойчивости). Предполагается, что уравнение (1.1) при точных данных $\{A;\ y_0\}$ разрешимо, т. е. $M=\{x_0 : Ax_0=y_0\}\neq\varnothing$, или разрешимо в смысле наименьших квадратов:

$$M=\{\bar{x} : \|A\bar{x}-y_0\|^2=\min_{x\in X}\|Ax-y_0\|^2\neq\varnothing\},$$

и известна априорная информация о принадлежности искомого решения выпуклому замкнутому множеству $Q\subset X$ (множество Q не стеснено условием компактности).

Конкретный вид множества Q обычно определяется физическим смыслом решения уравнения (1.1). В приложениях характерными примерами задания являются множества (см. [1]–[5])

(1.2) $$Q_l=\left\{x(t):\ d^lx(t)/dt^l\ \begin{matrix}\leqslant 0\\ \geqslant 0\end{matrix}\right\},\qquad l=0,1,2,\quad x(t)\in W_2{}^l=X,$$

в некоторых случаях в априорные ограничения входят также значения производных в фиксированных точках [3], [5].

Будем рассматривать более общий способ задания априорного множества в форме

(1.3) $$Q=\{x\in X : g_j(x)\leqslant 0,\ j=1,2,\dots,m\},$$

где g_j — выпуклые (суб) дифференцируемые функционалы. Заметим, что после конечно-разностной аппроксимации производных множества (1.2) представимы в форме (1.3) с линейными функциями g_j. Кроме того, для аффинных g_j в (1.3) допустимы ограничения в виде равенств $g_j(x)\equiv\equiv(h_j, x)-b_j=0$.

Необходимо построить регуляризованное (т. е. устойчивое к возмущениям y_0) семейство приближенных решений, аппроксимирующее относительно слабой или сильной сходимости элемент $x_0 \in Q \cap M$, т. е. элемент, удовлетворяющий физическим требованиям задачи.

2. Исходные методы. Алгоритмы решения линейных уравнений с априорной информацией и способы повышения качества решения (получение «тонкой структуры» решения) исследовались рядом авторов [1]–[6]. Не останавливаясь детально на всех работах, отметим, что в [1], [3], [4] множества типа (1.2) сужаются до компакта (введением дополнительных ограничений) и исходная задача редуцируется к задаче условной минимизации невязки с линейными ограничениями, которая после дискретизации решается подходящим методом квадратичного программирования (например, методом проекции сопряженных градиентов, см. [1], [3]).

Целью настоящей работы является построение приближенных решений на основе одношаговых итерационных процессов

$$(1.4) \qquad x^{k+1}=P_k U_k x^k, \qquad x^0 \in X, \quad k=0,1,\ldots,$$

$$(1.5) \qquad x^{k+1}=[\lambda P_k+(1-\lambda) U_k] x^k, \qquad x^0 \in X, \quad k=0,1,\ldots,$$

где $\{U_k\}$ – некоторая базовая итерационная процедура для задачи (1.1) (без учета условия $x \in Q$), а P_k являются Q-квазисжимающими отображениями, конструктивно определяемыми по множеству Q в общем случае задания Q в форме (1.3). При этом отображения P_k удовлетворяют условиям в виде принадлежности некоторым классам [7]–[11], которые будут введены ниже.

Определение 1 (см. [8]). Отображение $V: X \to X$ называется *Q-квазинерастягивающим*, если множество $Q=\{z: Vz=z\} \neq \varnothing$ и $\|Vx-z\| \leqslant \|x-z\|$ для любых $x \in X$, $z \in Q$; обозначаем этот класс через $\mathscr{K}_Q$.

Определение 2 (см. [9]). Отображение $V: X \to X$ называется *строго Q-квазинерастягивающим* (или *Q-фейеровским* [10]), если $Q=\{z: Vz=z\} \neq \varnothing$ и $\|Vx-z\|<\|x-z\|$ для любого $z \in Q$, $x \bar{\in} Q$; обозначаем класс через $\mathscr{F}_Q$.

Определение 3 (см. [11]). Отображение $V: X \to X$ называется *Q-псевдосжимающим*, если $Q=\{z: Vz=z\} \neq \varnothing$ и существует $\nu>0$ такое, что $\|Vx-z\|^2 \leqslant \|x-z\|^2-\nu\|Vx-x\|$ для любых $z \in Q$, $x \in X$; обозначаем класс через $\mathscr{P}_Q$.

Имеют место строгие включения $\mathscr{P}_Q \subset \mathscr{F}_Q \subset \mathscr{K}_Q$. Через $\mathscr{K}$ далее будем обозначать класс нерастягивающих отображений ($\|Vx-Vz\| \leqslant \|x-z\|$ для любых $x, z \in X$). Для краткости будем называть отображения V из классов $\mathscr{P}_Q$, $\mathscr{F}_Q$ *квазисжатиями*.

Таким образом, основной смысл использования квазисжатий в методах (1.4), (1.5) заключается в том, что приближенное решение, получаемое после каждого шага базовой итерационной схемы, сдвигается отображением P_k в направлении множества Q, чем в итоге и достигается сходимость $\{x^k\}$ к элементу из $Q \cap M$. Далее слабую и сильную сходимость будем обозначать символами $\rightharpoonup$ и $\to$ соответственно.

§ 2. Слабая сходимость итераций

Установим несколько общих утверждений о сходимости итерационных процессов (1.4), (1.5).

Теорема 1. *Пусть семейства $\{U_k\}$, $\{P_k\}$ отображений U_k, $P_k: X \to X$ удовлетворяют условиям:*

а$_1$) $U_k \in \mathscr{P}_k$ $\forall k$ *при* $\nu_k \geqslant \nu > 0$ (см. определение 3);

б$_1$) *из того, что* $z_{k_i} \to x$ *и* $z_{k_i} - U_{k_i} Z_{k_i} \to 0$, *следует* $x \in M$;

в$_1$) $P_k \in \mathscr{P}_Q$ $\forall k$ *при* $\nu_k' \geqslant \nu' > 0$;

г$_1$) *из того, что* $z_{k_i} \to x$ *и* $z_{k_i} - P_{k_i} Z_{k_i} \to 0$, *следует* $x \in Q$.

Тогда при любом $x^0 \in X$ *для итерационных последовательностей* (1.4), (1.5) *справедливы следующие свойства*:

1) $x^k \rightharpoonup \hat{x} \in M \cap Q$;

2) $\inf_y \{\lim_k \|x^k - y\| : y \in M \cap Q\} = \lim_k \|x^k - \hat{x}\|$;

3) *либо* $\|x^{k+1} - \hat{x}\| < \|x^k - \hat{x}\|$ $\forall k$, *либо* $\{x^k\}$ *стационарна начиная с некоторого* $k \geqslant k_0$, *т. е.* $x^{k_0} = x^{k_0+1} = \ldots = \hat{x}$;

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leqslant 2\|x^0 - y\|^2 / \min\{\nu, \nu'\}, \qquad y \in M \cap Q$.

Доказательство. 1. Установим сначала необходимые свойства для последовательности (1.4). Учитывая, что $P_k \in \mathscr{P}_Q$, $U_k \in \mathscr{P}_M$ (см. условия а$_1$), в$_1$)), для любых $x \in X$, $y \in M \cap Q$ имеем цепочку неравенств

$$\|P_k U_k x - y\|^2 \leqslant \|U_k x - y\|^2 - \nu_k' \|(I - P_k) U_k x\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x - y\|^2 - \nu_k \|(I - U_k) x\|^2 - \nu_k' \|(I - P_k) U_k x\|^2.$$

При $x = x^k$ приходим к соотношению

$$\|x^{k+1} - y\|^2 \leqslant \|x^k - y\|^2 - \nu_k \|x^k - U_k x^k\|^2 - \nu_k' \|U_k x^k - x^{k+1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x^k - y\|^2 - 0.5 \min\{\nu, \nu'\} \|x^k - x^{k+1}\|,$$

из которого вытекает

(2.1) $\qquad \lim_k \|x^k - y\| = d,$

и, следовательно, ввиду $\nu_k \geqslant \nu > 0$, $\nu_k' \geqslant \nu' > 0$,

(2.2) $\qquad x^k - U_k x^k \to 0,$

(2.3) $\qquad U_k x^k - x^{k+1} = z^k - P_k z^k \to 0, \qquad z^k = U_k x^k,$

$$\sum_{k=0}^{N} \|x^k - x^{k+1}\|^2 \leqslant 2\left(\sum_{k=0}^{N} \|x^k - y\|^2 - \|x^{k+1} - y\|^2\right) \times$$
$$\times (\min\{\nu, \nu'\})^{-1} \leqslant \frac{2\|x^0 - y\|^2}{\min\{\nu, \nu'\}},$$

т. е. выполнено свойство 4) теоремы.

Кроме того, в силу ограниченности $\{x^k\}$, для некоторой подпоследовательности x^{k_l} имеем

(2.4) $\qquad x^{k_l} \rightharpoonup \hat{x}.$

Поэтому на основании условия б$_1$) и (2.2), (2.4) заключаем, что $\hat{x} \in M$, а на основании г$_1$) и соотношений (2.2)–(2.4) получаем $\hat{x} \in Q$. Таким образом, $\hat{x} \in M \cap Q$.

Используя прием из [12, теорема 4], покажем единственность слабо предельной точки. Пусть $\hat{x}$, $\check{x}$ – две такие точки, тогда, согласно (2.1),

$$\lim_k \|x^k - \hat{x}\|^2 = d_1, \qquad \lim_k \|x^k - \check{x}\| = d_2.$$

Пусть $x^{k_l} \rightharpoonup x$, тогда из представления

$$\|x^{k_l} - \check{x}\|^2 = \|x^{k_l} - \hat{x}\|^2 + 2\langle x^{k_l} - \hat{x}, \hat{x} - \check{x}\rangle + \|\hat{x} - \check{x}\|^2$$

следует существование предела

$$0=\lim_k 2\langle x^{k_i}-\hat{x}, \hat{x}-\check{x}\rangle = d_2-d_1-\|\hat{x}-\check{x}\|^2, \quad d_2-d_1=\|\hat{x}-\check{x}\|^2.$$

Меняя местами $\hat{x}$, $\check{x}$ и используя $x^{k_j}\to\check{x}$, получаем $\|\hat{x}-\check{x}\|^2=d_1-d_2$, следовательно, $\hat{x}=\check{x}$. Итак, свойство 1) установлено.

Свойство 2) вытекает из представления

$$\|x^k-y\|^2=\|x^k-\hat{x}\|^2+2\langle x^k-\hat{x}, \hat{x}-y\rangle+\|\hat{x}-y\|^2,$$

в котором нужно перейти к пределу; здесь $x^k\to\hat{x}$, $y\in M\cap Q$.

Чтобы проверить свойство 3), исследуем два случая: $x^{k_0}\overline{\in}M\cap Q$ и $x^{k_0}\in M\cap Q$.

Для первого из них возможны две ситуации: $U_{k_0}x^{k_0}\in Q$, $k^{k_0}\overline{\in}M$, или $U_{k_0}x^{k_0}\overline{\in}Q$. Тогда имеем, соответственно, $\|P_{k_0}U_{k_0}x^{k_0}-\hat{x}\|=\|P_{k_0}U_{k_0}x^{k_0}-P_{k_0}U_{k_0}\hat{x}\|\leqslant \leqslant\|U_{k_0}x^{k_0}-\hat{x}\|<\|x^{k_0}-\hat{x}\|$, ибо $P_{k_0}\in\mathscr{P}_Q\subset\mathscr{K}_Q$, $U_{k_0}\in\mathscr{P}_M\subset\mathscr{F}_M$, и $\|P_{k_0}U_{k_0}x^{k_0}-\hat{x}\|< <\|U_{k_0}x^{k_0}-\hat{x}\|\leqslant\|x^{k_0}-\hat{x}\|$, ибо $P_{k_0}\in\mathscr{P}_Q\subset\mathscr{F}_Q$, $U_{k_0}\in\mathscr{P}_M\subset\mathscr{K}_Q$. Если же $x^{k_0}\in M\cap Q$, то $x^{k_0}=U_{k_0}x^{k_0}=P_{k_0}U_{k_0}x^{k_0}=x^{k_0+1}=\ldots$.

2. Исследуем теперь последовательность (1.5). Обозначим $V_k=\lambda P_k+ +(1-\lambda)U_k$, $0<\lambda<1$. Умножая первое из следующих неравенств (условия а$_1$) и в$_1$)) на $1-\lambda$, а второе — на λ:

$$\|U_kx^k-y\|^2\leqslant\|x^k-y\|^2-\nu_k\|(I-U_k)x^k\|^2,$$
$$\|P_kx^k-y\|^2\leqslant\|x^k-y\|^2-\nu_k'\|(I-P_k)x^k\|^2,$$

и складывая результаты, получаем

$$\|V_kx^k-y\|^2\leqslant\lambda\|P_kx^k-y\|^2+(1-\lambda)\|U_kx^k-y\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|x^k-y\|^2-\nu_k'\lambda\|(I-P_k)x^k\|^2-\nu_k(1-\lambda)\|(I-U_k)x^k\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|x^k-y\|^2-\min\{\nu,\nu'\}\|(I-V_k)x^k\|^2.$$

На основании полученных неравенств, проверка свойств 1)—4) осуществляется аналогично п. 1 доказательства.

Следствие 1. Если $P_k:X\to Q$, то условие г$_1$) для последовательности (1.4) излишне и его можно опустить. В частности, это верно для $P_k\equiv P_Q$, где P_Q — метрическая проекция на множество Q.

Доказательство. Достаточно убедиться, что $\hat{x}\in Q$. Так как $P_k\in \in\mathscr{P}_Q\subset\mathscr{F}_Q$, то Q — выпуклое замкнутое множество [13, с. 50]. Поскольку для любого k будет $x^{k+1}=P_kU_kx^k\in Q$, то и $\hat{x}\in Q$.

Следствие 2. Пусть вместо условий а$_1$), в$_1$) имеем, соответственно, $P_k\in\mathscr{K}_Q$, $U_k\in\mathscr{K}_M$ и выполнены условия б$_1$), г$_1$). Тогда заключение сохраняет силу для последовательностей (1.4), (1.5), в которых P_k заменено на $P_k^{\varkappa}=\varkappa I+(1-\varkappa)P_k$, а U_k — на $U_k^{\varkappa}=\varkappa I+(1-\varkappa)U_k$.

Доказательство. Очевидно, что множества неподвижных точек отображений V_k и $V_k^{\varkappa}=\varkappa I+(1-\varkappa)V_k$ совпадают, а условия б$_1$), г$_1$) для U_k и P_k влекут те же условия для $U_k^{\varkappa}$, $P_k^{\varkappa}$. Так как, согласно [14], $V_k\in\mathscr{K}_Q$ влечет включение $V_k^{\varkappa}=\varkappa I+(1-\varkappa)V_k\in\mathscr{P}_Q$, то для $P_k^{\varkappa}$ и $U_k^{\varkappa}$ выполнены все предпосылки теоремы.

Следствие 3. Если $\{x^k\}$ имеет по крайней мере одну сильно предельную точку, то вместо свойства 1) теоремы будет иметь место сильная сходимость $\lim_k\|x^k-\hat{x}\|=0$. В частности, это верно для последовательности (1.4), если $P_k:X\to Q$, где Q — ограниченно компактное множество [15, с. 39].

Теорема 2. *Пусть множества операторов U_k, $P_k: X\to X$ удовлетворяют условиям:*

а$_2$) $U_k\in\mathscr{P}_M\cap\mathscr{K}$ $\forall k$, $\nu_k\geqslant\nu>0$;

б$_2$) $P_k\in\mathscr{P}_Q\cap\mathscr{K}$ $\forall k$, $\nu_k'\geqslant\nu'>0$;

в$_2$) $U_kx\to y$, $P_kx\to z$ $\forall x$, *т. е. поточечно сходятся;*

г$_2$) *из того, что* $\{k_i\}\subseteq\{k\}$, $\lim\limits_i\|U_{k_i}x-x\|=0$, *следует* $x\in M$, *а из* $\lim\limits_i\|P_{k_i}x-x\|=0$ *следует* $x\in Q$.

Тогда для итераций (1.4), (1.5) *справедливо заключение теоремы* 1.

Доказательство. Пусть $V_k=P_kU_k$. Ввиду условий а$_2$), б$_2$), для последовательности (1.4) справедливы соотношения (2.2)–(2.4).

Для получения равенства $\lim\limits_i\|\hat{x}-U_{k_i}\hat{x}\|=0$, где $\hat{x}$ определено в (2.4), воспользуемся фрагментами схемы рассуждений из [14, теорема 7]. Так как $U_k\in\mathscr{K}$, то справедливо неравенство

$$(2.5)\qquad \|x^{k_i}-U_{k_i}\hat{x}\|\leqslant\|x^{k_i}-U_{k_i}x^{k_i}\|+\|x^{k_i}-\hat{x}\|.$$

Принимая во внимание (2.4), (2.5), условие в$_2$) и представление

$$\|x^{k_i}-U_{k_i}\hat{x}\|^2=\|x^{k_i}-\hat{x}\|^2+\|\hat{x}-U_{k_i}\hat{x}\|+2\langle x^{k_i}-\hat{x},\hat{x}-U_{k_i}\hat{x}\rangle$$

получаем

$$\limsup_i\{\|x^{k_i}-U_{k_i}\hat{x}\|^2-\|x^{k_i}-\hat{x}\|^2\}=\limsup_i\|\hat{x}-U_{k_i}\hat{x}\|^2=0,$$

что в силу условия г$_2$) дает $\hat{x}\in M$.

По условию в$_2$), $U_kz\to u$, $P_ku\to w$, поэтому с учетом $P_k\in\mathscr{K}$ имеем неравенства

$$\|P_kU_kz-w\|\leqslant\|P_kU_kz-P_ku\|+\|P_ku-w\|\leqslant\|U_kz-u\|+\|P_ku-w\|,$$

из которых вытекает поточечная сходимость $V_kz\to w$. Поскольку ранее установлено, что $\hat{x}\in M$, то, заменяя U_k на V_k и используя рассуждения, представленные выше, получаем

$$\lim_i\|\hat{x}-V_k\hat{x}\|=\lim_i\|\hat{x}-P_k\hat{x}\|=0.$$

Ввиду условия г$_2$) отсюда заключаем, что $\hat{x}\in Q$, т. е. $\hat{x}\in M\cap Q$.

Завершение доказательства для схемы (1.4) проводится по методике теоремы 1. Свойства итерационной последовательности (1.5) устанавливаются подобным же образом.

Замечания. 1. Если $P_k\equiv P$, $U_k\equiv U$ (т. е. не зависят от k), то условия в$_2$), г$_2$) выполняются автоматически.

2. Если условия а$_2$), г$_2$) заменить, соответственно, на $U_k\in\mathscr{K}_M\cap\mathscr{K}$, $P_k\in\mathscr{K}_Q\cap\mathscr{K}$, то заключение теоремы сохраняет силу для последовательностей (1.4), (1.5), в которых P_k, U_k заменены на $\varkappa I+(1-\varkappa)P_k$, $\varkappa I+(1-\varkappa)U_k$ соответственно.

3. В условиях теоремы 2 справедливо следствие 3 из теоремы 1. Если $P_k\equiv P$, $U_k\equiv U$ – линейные операторы и выполнено $\|2PU-I\|\leqslant1$ для схемы (1.4), а $\|P-I\|\leqslant1$, $\|U\|\leqslant1$ – для схемы (1.5), то также имеет место сильная сходимость $\{x^k\}$. Это следует из того, что итерационные процессы в данном случае представимы в форме $x^{k+1}=\lambda x^k+(1-\lambda)Tx^k$, где $T\in\mathscr{K}$, и из результата Дотсона [16].

4. Пусть $M\cap Q=\varnothing$, но для любого k будет $S_k\equiv S=\{y\colon V_ky=y\}\neq\varnothing$, где $V_k=P_kU_k$ или $V_k=\lambda P_k+(1-\lambda)U_k$. Тогда, если в теоремах 1, 2 условия $P_k\in\mathscr{P}_Q$, $U_k\in\mathscr{P}_M$ заменить на более сильное (псевдосжимаемость по Мартине [16], класс $\mathscr{P}$)

$$(2.6)\qquad \|Rx-Ry\|^2\leqslant\|x-y\|^2-\|(I-R)x-(I-R)y\|^2\qquad \forall x,y\in X,$$

то теорема 2 остается в силе, при этом $\hat{x}\in S$. Примером такой ситуации является, в частности, $P=P_{Q_1}$, $U=P_{Q_2}$, где P_{Q_i} – метрическая проекция на Q_i и $Q_1\cap Q_2=\varnothing$, а $Q=\{y\colon P_{Q_1}P_{Q_2}y=y\}\neq\varnothing$.

Это замечание открывает возможность решать более общую, чем сформулированная в § 1, задачу, а именно задачу аппроксимации неподвижной точки оператора перехода, что позволяет включить в рассмотрение не только уравнения (1.1), но и задачи условной выпуклой минимизации [11].

5. Если $Q=\bigcap_{i=1}^{m} Q_i$, то отображения P_k можно конструировать в виде

$$P_k=P_k^1\cdot\ldots\cdot P_k^m,\qquad P_k=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_k^i,\qquad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=\lambda<1,\quad \lambda_i>0,$$

где $P_k^i\in\mathcal{P}_{Q_i}$. Это позволяет при добавлении или изменении ограничений (неравенств) в (1.3) легко модифицировать итерационные схемы (1.4), (1.5).

В заключение этого параграфа отметим: пример Линденштрауса [17] показывает, что в условиях теорем 1, 2 в общем случае нельзя получить вместо слабой сильную сходимость последовательности $\{x^k\}$ (за исключением некоторых частных ситуаций, см. следствие 3 и замечание 3).

Замечание 6. Результаты § 2 обобщают нестационарный случай и уточняют исследования ряда авторов (см., например, [7], [8], [10], [12]–[14]) по итерационной аппроксимации неподвижных точек для квазисжатий в гильбертовых пространствах. С другой стороны, сам подход к построению итерационных методов решения операторных уравнений I рода с выпуклыми априорными ограничениями является новым (ср. с [1]–[6]).

§ 3. Сходимость итераций в условиях ошибок

При практической реализации итераций возможны различного рода ошибки (исходных данных, дискретной аппроксимации, вычислений и т. д.). Будем предполагать, что их общее влияние таково, что точная k-я итерация отличается от ее приближенной реализации по норме пространства X не более чем на ε_k (см. [12]), т. е.

$$\|z^{k+1}-V_kz^k\|\leqslant\varepsilon_k,\qquad \varepsilon_k>0. \tag{3.1}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены предпосылки теорем* 1 *или* 2 *и* $\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_k<\infty$. *Тогда для последовательности* $\{z^k\}$, *определяемой формулой* (3.1), *где либо* $V_k=P_kU_k$, *либо* $V_k=\lambda P_k+(1-\lambda)U_k$, *справедливы свойства*

$$z^k\rightharpoonup z\in M\cap Q,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\|z^{k+1}-z^k\|^2<\infty.$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 8.1 из [11] (см. также [12]).

§ 4. Квазисжатия для выпуклых ограничений

Множество Q, которое задает априорные ограничения, рассматривается нами в форме (1.3), где g_j — выпуклые дифференциальные функционалы. Как следует из теорем 1–3, отображения P_k, отвечающие за априорную информацию, должны принадлежать классу $\mathcal{P}_Q$. Укажем способ построения такого рода отображений для ограничений (1.3) на основе Q-разделяющих пар.

Определение 4 (см. [10]). Пусть Q — выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства X, $d(x)$ — выпуклый функционал на X, $e(x):X\to X$. Двойка $\{d(x), e(x)\}$ называется *Q-разделяющей парой*, если $Q=\{x: d(x)\leqslant 0\}$ и для любого $z\in Q$ полупространство, отвечающее неравенству $\langle e(x), x-z\rangle+d(x)\leqslant 0$, содержит множество Q.

Пусть $\{d(x), e(x)\}$ есть Q-разделяющая пара. Зададим отображение

(4.1) $\qquad P_k x = x - \lambda_k d^+(x) e(x)/\|e(x)\|.$

Лемма 1. *Отображение P_k, определяемое формулой* (4.1) *при* $0 < \lambda_k \leqslant 1$, *принадлежит классу* $\mathscr{P}_Q$.

Известно также [13], [11], что $P_k \in \mathscr{F}_Q$ при $0 < \lambda_k \leqslant 2$ и справедлива

Лемма 2. *Пусть $d(x)$ — выпуклый полунепрерывный функционал, $e(x)$ — ограниченное отображение (т. е. образ ограниченного множества ограничен) и* $\liminf \lambda_k > 0$.

Тогда отображение P_k в (4.1) *удовлетворяет свойству теоремы* 1.

Приведем содержательные примеры разделяющих пар, удовлетворяющих леммам 1, 2, для множества Q из (1.3) (см. [10], [13]):

$$d(x) = \max_j g_j(x), \quad e(x) = \nabla_{j_x}(x), \quad j_x = \min\{j : d(x) = g_j(x)\},$$

$$d^\mu(x) = \sum_{j=1}^m K_j [g_j^+(x)]^\mu,$$

$$e^\mu(x) = \sum_{j \in s(x)} K_j g_j^{\mu-1} \nabla g_j(x), \quad K_j > 0, \quad s(x) = \{j : g_j(x) > 0\},$$

где $\mu=1$ либо $\mu=2$. Для линейных функционалов $g_j(x) = \langle h_j, x \rangle - b_j$ допустимы также

$$d^\nu(x) = \sum_{j=1}^m K_j [g_j^+(x)]^{\nu+1},$$

$$e^\nu(x) = \sum_{j \in s(x)} K_j [g_j(x)]^\nu h_j, \qquad K_j > 0,$$

где ν — произвольное неотрицательное число. Эти отображения при $\nu=0$, $\nu=1$ использовались ранее в [10].

Кроме того, известно, что метрическая проекция P_Q на выпуклое замкнутое множество принадлежит классу $\mathscr{P}$ (см. неравенство (2.6)). Очевидно, что для проекции справедливо свойство б$_1$), следовательно, $P_k = P_Q$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

§ 5. Базовые итерационные схемы

1. Явная схема. Пусть A в уравнении (1.1) — линейный ограниченный оператор и это уравнение разрешимо по крайней мере в смысле наименьших квадратов. Тогда множество таких решений совпадает с $M = \{x: A^*Ax = A^*y_0\}$ (см. [15, с. 29]). Исследуем итерационную схему

(5.1) $\qquad x^{k+1} = (I - \varkappa_k A^*A) x^k + \varkappa_k A^* y_0 \equiv U_k x^k, \quad k = 0, 1, \ldots .$

Лемма 3. *Если* $\varkappa_k \leqslant 1/\|A^*A\|$, $\varkappa_k \geqslant \varkappa > 0$, *то семейство* $\{U_k\}$ *из* (5.1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Доказательство этой леммы можно найти в [11].

2. Неявная схема. Рассмотрим процесс

(5.2) $\qquad x^{k+1} = (A^*A + B_k)^{-1} (B_k x^k + A^* y_0) \equiv U_k x^k,$

где B_k — самосопряженные, перестановочные с A^*A, строго положительные операторы: $\langle B_k x, x \rangle \geqslant c_k \|x\|^2$, $c_k \geqslant c > 0$. Как и в п. 1, устанавливается, что последовательность $\{U_k\}$ из (5.2) удовлетворяет условиям теорем 1, 2.

3. α-Процессы [18]. Эти нелинейные итерационные схемы являются обобщением методов наискорейшего спуска, минимальных невязок и минимальных ошибок. Принадлежность операторов перехода α-процессов классу $\mathcal{P}_M$ выводится с помощью неравенства моментов [18, с. 110].

4. Основной и модифицированный методы Ньютона—Канторовича (м.Н.К.) Пусть A — нелинейный оператор и $F(x)=Ax-y_0$, $M=\{\zeta\}$, $A\zeta=y_0$. При стандартных предположениях на F (см. [18]) операторы перехода в м.Н.К. принадлежат классу $\mathcal{F}_M$.

5. Метод градиентов. Его простейшая схема имеет вид

$$x^{k+1}=x^k-\lambda[F'(x)]^*F(x^k)\equiv Ux^k. \tag{5.3}$$

Условия, при которых U из (5.3) принадлежит классу $\mathcal{F}_M$, можно найти в [9].

§ 6. Регуляризующие свойства итераций

Предположим, что правая часть уравнения (1.1) задана с погрешностью, т. е. $\|y_0-y_\delta\|\leqslant\delta$. Пусть, как и выше, V_k — оператор перехода для схем (1.4), (1.5) с точными данными $\{A, y_0\}$, а через $\tilde{V}_k$ обозначим оператор перехода в тех же схемах, но с приближенными данными (т. е. $\tilde{V}_k$ получен из V заменой y_0 на y_δ). Наряду с точной схемой $x^{k+1}=V_kx^k$ рассмотрим ее приближенную реализацию

$$\tilde{x}^{k+1}=\tilde{V}_k\tilde{x}^k,\qquad k=0, 1, \ldots, \tag{6.1}$$

с тем же начальным элементом $x^0\in X$. Предположим далее, что выполнены неравенства

$$\|\tilde{V}_k\tilde{x}^k-V_k\tilde{x}^k\|\leqslant c\delta,\qquad k=0, 1, \ldots,\quad c=\text{const}. \tag{6.2}$$

Прежде чем сформулировать утверждение, заметим, что при $P_k\in\mathcal{K}$ условие (6.2), очевидно, выполнено для базовых схем из пп. 1—3, а при дополнительном требовании, чтобы A удовлетворяло условию Гёльдера,— и для схем из пп. 4, 5.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и неравенство* (6.2). *Тогда для последовательности* (6.1) *при связи параметров* $\delta k(\delta)\to0$ *имеет место сходимость* $\tilde{x}^{k(\delta)}\rightharpoonup\hat{x}\in M\cap Q$ *при* $\delta\to0$.

Доказательство. Учитывая представление

$$\hat{x}-\tilde{x}^{k+1}=[\hat{x}-x^{k+1}]+[x^{k+1}-\tilde{x}^{k+1}]$$

и сходимость $x^k\rightharpoonup x\in M\cap Q$ (теорема 2), достаточно убедиться, что второе слагаемое стремится к нулю. Ввиду $V_k\in\mathcal{K}$ и неравенства (6.2), это следует из оценки

$$\|x^{k+1}-\tilde{x}^{k+1}\|\leqslant\|V_kx^k-V_k\tilde{x}^k\|+\|V_k\tilde{x}^k-\tilde{V}_k\tilde{x}^k\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x^k-\tilde{x}^k\|+c\delta\leqslant c(k+1)\delta.$$

Таким образом, последовательности $\{x^{k(\delta)}\}$, полученные согласно схемам (1.4), (1.5), образуют регуляризованное семейство приближенных решений, правда, только относительно слабой топологии пространства X. Однако справедливо следующее важное

Замечание 7. Согласно теореме 4, в частных случаях, когда $x^k\to x$, т. е. при выполнении условий следствия 3 и замечания 3, схемы (1.4), (1.5) образуют регуляризующий алгоритм (р.а.) в смысле А. Н. Тихонова. В совокупности же с подходящим способом дискретизации процессы (1.4), (1.5) порождают сильно сходящиеся р.а. в общем случае [11].

§ 7. Численные эксперименты

1. При расшифровке атомной структуры аморфных сплавов на основе EXAFS-методики [19] возникает интегральное уравнение

$$(7.1)\qquad Ax=\int_a^b \exp[-2s/\lambda(t)]\sin[2ts+\varphi(t)]x(s)\,ds=\chi(t),$$

где $x(s)$ — искомая функция радиального распределения атомов (ф.р.р.а.), $\chi(t)$ — экспериментально определяемая функция.

После дискретной аппроксимации (7.1) квадратурным методом с числом m разбиений по t, равным 300, и по s — равным $n=100$, используем явную итерационную схему (5.1).

Далее введем два множества априорных ограничений:

$$(7.2)\qquad Q_1=\{x_n : x_n\geqslant 0\},\quad Q_2=\{x_n : \langle v_n, x_n\rangle=1\},$$

которые вытекают из физического смысла решения $x(s)$, а также рассмотрим схему

$$(7.3)\qquad x_n^{k+1}=P_{Q_1}P_{Q_2}\{[I-A_{mn}{}^*A_{mn}]x_n{}^k+A_{mn}{}^*\chi_m\},$$

где P_{Q_i} — метрическая проекция на множество Q_i.

По модельному решению $\bar{x}(s)$, которое выбиралось качественно подобным парциальной ф.р.р.а. для сплава $Fe_{80}B_{20}$, вычислялась правая часть $\bar{\chi}(t)$ и с полученной $\bar{\chi}(t)$ решалось уравнение (7.1) итерационными схемами (5.1), (7.3) с начальным приближением $x_n^{(0)}=0$.

Схема (7.3) оказалась вполне эффективной (погрешность 3% после 400 итераций), в то время как явная схема (5.1) дает значительную погрешность (33% после 400 итераций). Аналогичная картина наблюдается при использовании неявной схемы вместо явной (см. [20]).

2. Обратная задача гравиметрии о нахождении формы поверхности раздела двух сред по аномалии силы тяжести сводится к решению нелинейного уравнения [21]

$$A[x](t)=\int_{-1}^{1}\ln\frac{H^2+(t-s)^2}{(t-s)^2+[H-x(s)]^2}ds=\bar{y}(t).$$

Для решения уравнения после его регуляризации $A[x]+\alpha x=\bar{y}$, $\alpha=10^{-3}$, использовались основной и модифицированный м.Н.К., а также процессы (1.4), (1.5) с $P_k=P_{Q_1}P_{Q_2}$, где Q_i задавались в виде (7.2), т. е.

$$(7.4а)\qquad x^{k+1}=P_{Q_1}P_{Q_2}\{0.5x^k+0.5[x^k-[F'(x^0)]^{-1}F(x^k)]\},$$
$$F(x)=A[x]+\alpha x-\bar{y},$$

$$(7.4б)\qquad x^{k+1}=0.5P_{Q_1}P_{Q_2}x^k+0.5\{0.5x^k+0.5[x^k-[F'(x^0)]^{-1}F(x^k)]\},$$

$$(7.4в)\qquad x^{k+1}=P_{Q_1}P_{Q_2}\{0.5x^k+0.5[x^k-[F'(x^k)]^{-1}F(x^k)]\},$$

$$(7.4г)\qquad x^{k+1}=0.5P_{Q_1}P_{Q_2}x^k+0.5\{0.5x^k+0.5[x^k-[F'(x^k)]^{-1}F(x^k)]\}.$$

Обращает на себя внимание тот факт, что схемы (7.4) сходятся для более широкого набора начальных приближений, чем модифицированный и основной м.Н.К. Так, схемы (7.4в, г) при $x^0=0.5(1-|x|)$, $x^0=0.1$ сходятся, тогда как м.Н.К. расходится при восстановлении модельного решения $\bar{x}(s)=(1-s^2)^2$ (см. [21]).

Литература

1. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
2. *Wahba G.* Constrained regularization for ill-posed linear operator equations, with application in metheorology and medicine // Statist. Decision Theory and Related Topics. III. (West Lafayette, Ind., 1981). N. Y. etc.: Acad. Press, 1982. V. 2. P. 384–418.
3. *Морозов В. А., Гольдман Н. Л., Самарин М. К.* Метод дескриптивной регуляризации и качество приближенных решений // Инж.-физ. ж. 1977. Т. 38. № 6. С. 1117–1124.
4. *Rutman R. S., Cabral L. M.* Descriptive regularization of the Fredholm integral equations of the first kind // Treatment Integral Equations by Numer. Methods. L. etc.: Acad. Press, 1982. P. 313–323.
5. *Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г.* Построение дескриптивного решения обратной задачи теплопроводности в базисе B-сплайнов // Инж.-физ. ж. 1983. Т. 45. № 5. С. 760–765.
6. *Чечкин А. В.* Специальный регуляризатор А. Н. Тихонова для интегральных уравнений I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970. Т. 10. № 2. С. 453–461.
7. *Martinet B.* Determination approchee d'un point fixe d'une applications pseudo-contractante // C. r. Acad. sci. 1972. V. 274. P. 163–165.
8. *Petryshyn W. V., Williamson T. E.* Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings // J. Math. Analys. and Appl. 1973. V. 43. № 2. P. 459–497.
9. *Măruşter S.* Quasi-nonexpansivity and two classical methods for solving nonlinear equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 62. № 1. P. 119–123.
10. *Еремин И. И.* Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 2. С. 217–234.
11. *Васин В. В.* Дискретизация, итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
12. *Rockafellar R. T.* Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control and Optimizat. 1976. V. 14. № 5. P. 877–898.
13. *Еремин И. И.* К общей теории фейеровских отображений // Матем. зап. Уральск. ун-та. 1969. Т. 7. № 2. С. 50–58.
14. *Browder F. E., Petryshyn W. V.* Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space // J. Math. Analys. and Appl. 1967. V. 20. № 2. P. 197–228.
15. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
16. *Dotson W. G.* On the Mann iterative process // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 23. № 107. P. 573–581.
17. *Genel A., Lindenstrauss L.* An example concerning fixed points // Israel J. Math. 1975. V. 22. № 1. P. 81–86.
18. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
19. *Ageev A. L., Babanov Yu. A., Vasin V. V. et al.* Amorphous problem in EXAFS data analysis // Phys. Statist Sol. 1983. V. 117. P. 343–350.
20. *Васин В. В.* Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования: Препринт. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1982.
21. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* Применение метода регуляризации к нелинейным задачам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 3. С. 93–107.

Поступила в редакцию 11.VI.1986
Переработанный вариант 30.XI.1987