К. Х. Закирьянов, Об одном свойстве для колец многочленов над дискретно нормированными кольцами,
Изв. вузов. Матем., 1992, номер 2, 37–41

УДК 519.45

К.Х.ЗАКИРЬЯНОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ДЛЯ КОЛЕЦ МНОГОЧЛЕНОВ НАД ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫМИ КОЛЬЦАМИ

В данной заметке обобщаются некоторые результаты автора [1] и П.Кона [2].

По определению ассоциативное кольцо R с единицей обладает свойством GE_2, если группа $GL_2(R)$ порождается своими элементарными и диагональными матрицами. П.Кон [2] показал, что кольцо многочленов $O[x_1,...,x_t]$, где O – поле или кольцо целых чисел, не является GE_2-кольцом соответственно при $t\geqslant 2$ и $t\geqslant 1$, причем доказательства не были едиными. Позже Хуа Чи [3] обобщил этот результат, доказав, что если O – коммутативное целостное кольцо, не являющееся полем, то кольцо многочленов $O[x]$ не будет GE_2-кольцом.

Над некоммутативными кольцами данная проблема мало изучена.

Будем говорить, что кольцо O дискретно нормированно, если существует отображение $|\ |$ кольца O в множество неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$;

2) $|x+y| \leqslant |x|+|y|$;

3) $|xy| = |x||y|$;

4) $|x|=1$ для любого $x\in O^*$;

5) $|x|\geqslant 2$ для любого $x\notin O_0^*$,

где O^* – множество обратимых элементов кольца O, а $O_0^*=O^*\cup\{0\}$. Таковы, напр., тела, почти все (за исключением евклидовых) кольца целых алгебраических чисел мнимых квадратичных расширений поля рациональных чисел, кольцо целых рациональных чисел.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $R=O[x_1,...,x_t]$ – кольцо многочленов от t переменных над дискретно нормированным кольцом O. Тогда R является GE_2-кольцом тогда и только тогда, когда O – тело и $t=1$.*

Напомним, что согласно [1] старший член многочлена от нескольких переменных – это высший член однородной компоненты наибольшей степени.

Пусть $a_{(i)}x_1^{i_1}...x_t^{i_t}$ и $b_{(j)}x_1^{j_1}...x_t^{j_t}$ – старшие члены многочленов f и g соответственно. Будем говорить, что $f(x_1,...,x_t)\geqslant g(x_1,...,x_t)$, если и только если $i_1\geqslant j_1,...,i_t\geqslant j_t$ (равенство $f=g$ означает лишь совпадение соответствующих показателей степеней их старших членов).

Для элементов группы $GE_2(R)$, порожденной элементарными и диагональными матрицами, будем использовать стандартную форму Кона, согласно которой они могут быть записаны в виде $\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2)\ E(q_1)...E(q_v)$, где

$$\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2)=\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix},\quad E(q_i)=\begin{pmatrix}q_i & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$\gamma_1,\gamma_2\in R^*$, $q_i\in R$, $q_i\notin R_0^*$ при $1<i<v$.

ЛЕММА 1. *Пусть (f_v,g_v) – верхняя строка матрицы $x_v=E(q_1)...E(q_v)$ из $GE_2(R)$, $v\geqslant 2$, $q_i\notin R_0^*$ при $i>1$ и $a_{(v)}$, $b_{(v)}$ – коэффициенты старших членов многочленов f_v и g_v соответ-*

ственно. Тогда $f_v \geqslant g_v$ *и* $|a_{(v)}| \geqslant |b_{(v)}|$, *причем хотя бы одно из неравенств будет строгим, если* $\deg f_v \neq 0$; *если* $f_v > g_v$, *то* $a_{(v)}$ *делится на* $b_{(v)}$ *справа.*

Доказательство проведем индукцией по v.

Если $v=2$, то

$$x_2 = E(q_1)E(q_2) = \begin{pmatrix} q_1q_2-1 & q_1 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

СЛУЧАЙ 1. $q_1 \in O \setminus \{0\}$. Если $\deg q_2=0$, то $|q_1q_2-1| \geqslant |q_1||q_2|-1 \geqslant 2|q_1|-1 \geqslant |q_1|$, т.е. $|a_{(2)}| \geqslant |b_{(2)}|$, $f_2=g_2$. Если же $\deg q_2 \neq 0$, то $\deg f_2 \neq 0$ и $f_2 > g_2$, $|a_{(2)}| \geqslant |b_{(2)}|$. Отметим, что если $q_1=0$, то всегда $f_2 \geqslant g_2$, $|a_{(2)}| > |b_{(2)}|$, т.к. мы считаем, что $f>0$ для любого $f \neq 0$ из R.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $q_1 \notin O$, т.е. $\deg q_1 \neq 0$. Тогда при $\deg q_2=0$ имеем $|a_{(2)}| > |b_{(2)}|$, $f_2=g_2$. Если же $\deg q_2 \neq 0$, то $f_2 > g_2$, $a_{(2)}$ делится на $b_{(2)}$ справа.

Пусть для матрицы x_{v-1} заключение леммы 1 справедливо. Тогда верхняя строка матрицы x_v имеет вид $(f_{v-1}q_v-g_{v-1}, f_{v-1})$. По индукционному предположению $f_{v-1} \geqslant g_{v-1}$ и $|a_{(v-1)}| \geqslant |b_{(v-1)}|$. Если $\deg q_v=0$, то $f_v \geqslant g_v$ и $|a_{(v)}| \geqslant |b_{(v)}|$, т.к. в разности $f_{v-1}q_v-g_{v-1}$ старшие члены многочленов $f_{v-1}q_v$ и g_{v-1} не уничтожаются. Если же $\deg q_v \neq 0$, то $f_v > g_v$ и $a_{(v)}$ делится на $b_{(v)}$ справа.

Рассмотрим теперь случай, когда $\deg f_v \neq 0$. При $v=2$ (случаи 1,2) уже было показано, что хотя бы одно из неравенств $f_2 \geqslant g_2$ и $|a_{(2)}| \geqslant |b_{(2)}|$ строгое. Если $\deg f_{v-1}=0$, то ввиду $\deg f_v \neq 0$ имеем всегда $\deg q_v \neq 0$ и, следовательно, $f_v > g_v$, $a_{(v)}$ делится на $b_{(v)}$ справа. Если же $\deg f_{v-1} \neq 0$, то по индукционному предположению $f_{v-1} > g_{v-1}$ или $|a_{(v-1)}| > |b_{(v-1)}|$.

Пусть $f_{v-1} > g_{v-1}$. Тогда при $\deg q_v \neq 0$ все очевидно, а при $\deg q_v=0$ имеем $f_v=q_v$, $|a_{(v)}| \geqslant |b_{(v)}|$, т.к. $|a_{(v)}| = |a_{(v-1)}q_v| \geqslant 2|a_{(v-1)}| > |a_{(v-1)}| = |b_{(v)}|$. Если же $f_{v-1}=g_{v-1}$, $|a_{(v-1)}| > |b_{(v-1)}|$, то при $\deg q_v \neq 0$ имеем $f_v > g_v$, $a_{(v)}$ делится на $b_{(v)}$ справа, а при $\deg q_v=0$ старший член разности $f_{v-1}q_v-g_{v-1}$ равен разности старших членов $f_{v-1}q_v$ и g_{v-1}, следовательно, $a_{(v)}=a_{(v-1)}q_v-b_{(v-1)}$ и $|a_{(v)}| = |a_{(v-1)}q_v-b_{(v-1)}| \geqslant 2|a_{(v-1)}|-|b_{(v-1)}| > |a_{(v-1)}| = |b_{(v)}|$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* (f_v,g_v) *– верхняя строка матрицы* $x_v=E(q_1)...E(q_v)$ *из* $GE_2(R)$, $f_v \neq 0$, $g_v \neq 0$, $q_i \notin R_0^*$ *при* $1<i<v$. *Тогда если наборы показателей старших членов* f_v *и* g_v *различны, то либо* $f_v > g_v$ *и* $a_{(v)}$ *делится справа на* $b_{(v)}$, *либо* $g_v > f_v$ *и* $b_{(v)}$ *делится на* $a_{(v)}$ *справа.*

Доказательство будем вести индукцией по v. Если $v=1$, то $(q_1,1)$ – верхняя строка матрицы x_1 и $q_1 \notin O$, следовательно, $f_1 > g_1$ и $a_{(1)}$ делится справа на $b_{(1)}$.

Пусть теперь $v=2$. Тогда (q_1q_2-1, q_1) будет верхней строкой матрицы x_2.

СЛУЧАЙ 1. $q_1 \in O \setminus \{0\}$. Тогда при любом $q_2 \notin O$ имеем $f_2 > g_2$ и $a_{(2)}$ делится справа на $b_{(2)}$ (заметим, что q_2 не может лежать в O, иначе $f_2=g_2$).

СЛУЧАЙ 2. $q_1 \notin O$. Тогда $q_2 \notin O \setminus \{0\}$, иначе $f_2=g_2$. Если $q_2=0$, то $g_2 > f_2=-1$ и $b_{(2)}$ делится справа на $a_{(2)}$, т.к. $\deg g_2 \neq 0$. Если же $q_2 \neq 0$, то $\deg q_2 \neq 0$ и $f_2 > g_2$, $a_{(2)}$ делится справа на $b_{(2)}$.

Пусть утверждение леммы 2 доказано для матрицы $x_{\upsilon-1}$. Тогда верхняя строка матрицы x_υ имеет вид $(f_{\upsilon-1}q_\upsilon-g_{\upsilon-1},f_{\upsilon-1})$. Поскольку $q_i\notin R_0^*$ при $1<i<\upsilon$, то для матрицы $x_{\upsilon-1}$ с верхней строкой $(f_{\upsilon-1},g_{\upsilon-1})$ справедливо заключение леммы 1.

СЛУЧАЙ 3. $f_{\upsilon-1}\in O\setminus\{0\}$. По лемме 1 имеем $f_{\upsilon-1}\geqslant g_{\upsilon-1}$, следовательно, $g_{\upsilon-1}\in O$; отсюда $q_\upsilon\notin O$, иначе $f_\upsilon=g_\upsilon$. Поэтому $f_\upsilon>g_\upsilon$, $a_{(\upsilon)}$ делится справа на $b_{(\upsilon)}$.

СЛУЧАЙ 4. $f_{\upsilon-1}\notin O$. Ввиду леммы 1 имеем $f_{\upsilon-1}>g_{\upsilon-1}$ или $|a_{(\upsilon-1)}|>|b_{(\upsilon-1)}|$. Если $f_{\upsilon-1}>g_{\upsilon-1}$, то ясно, что $q_\upsilon\notin O\setminus\{0\}$. Отсюда при $q_\upsilon=0$ имеем $g_\upsilon=f_{\upsilon-1}>f_\upsilon=-g_{\upsilon-1}$ и $b_{(\upsilon)}$ делится справа на $a_{(\upsilon)}$, а если $\deg q_\upsilon\neq 0$, то $f_\upsilon>g_\upsilon$ и $a_{(\upsilon)}$делится справа на $b_{(\upsilon)}$.

Пусть теперь $f_{\upsilon-1}=g_{\upsilon-1}$, $|a_{(\upsilon-1)}|>|b_{(\upsilon-1)}|$. Тогда $q_\upsilon\notin O$, иначе $f_\upsilon=g_\upsilon$. Отсюда $\deg q_\upsilon\neq 0$ и $f_\upsilon>g_\upsilon$, $a_{(\upsilon)}$ делится справа на $b_{(\upsilon)}$. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим следующую матрицу из $GL_2(R)$:

$$A=\begin{pmatrix} 1+hx_1^{i_1}\dots x_t^{i_t} & h^2x_1^{j_1}\dots x_t^{j_t} \\ -x_1^{k_1}\dots x_t^{k_t} & 1-hx_1^{i_1}\dots x_t^{i_t}\end{pmatrix},$$

где $i_1>j_1$ при $t=1$, а при $t\geqslant 2$ $i_s>j_s$, $s=1,2,\dots,d$, $i_s<j_s$, $s=d+1,\dots,t$, $1\leqslant d<t$; $2i_s=j_s+k_s$; h или необратим в кольце O, или равен единице в случае, когда O – тело.

Ясно, что верхняя строка матрицы A не удовлетворяет заключению леммы 2, не считая, когда O – тело и $t=1$. Следовательно, $A\notin GE_2(R)$. Если O – тело и $t=1$, то в кольце $O[x]$ верна теорема о делении с остатком справа и слева, следовательно, $O[x]$ есть GE_2-кольцо. Теорема 1 доказана.

Сведения о том, насколько велика разность $GL_2(O[x_1,\dots,x_t])\setminus GE(O[x_1,\dots,x_t])$ в случае, когда O – не тело или $t\neq 1$, дает следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть R – кольцо многочленов от переменных $x_1,\dots,x_t$ над дискретно нормированным кольцом O и при $t=1$ кольцо O – не тело. Тогда группа $GL_2(R)$ содержит свободную подгруппу F степени 2, пересекающуюся с $GE_2(R)$ только по единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $t\geqslant 2$ база подгруппы F указана в [1]. Пусть поэтому $t=1$ и O – не тело. Положим

$$P=\begin{pmatrix} 1+mx^k & m^2 \\ -x^{2k} & 1-mx^k\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 1+m^2x^k & m^4 \\ -x^{2k} & 1-m^2x^k\end{pmatrix},$$

где k – натуральное число, m – необратимый элемент кольца O. Очевидно, $P,Q\in GL_2(R)$.

Пусть W – чередующееся произведение ненулевых степеней элементов P и Q в группе $GL_2(R)$. Надо доказать, что $W\notin GE_2(R)$. Будем считать, что $W=W_s=P^{\alpha_1}Q^{\alpha_2}\dots H^{\alpha_s}$, где $H=P$ или Q, все $\alpha_i\neq 0$. Отметим, что если W начинается со степени матрицы Q, то в приводимых ниже индуктивных вычислениях надо рассуждения для четного υ заменить на рассуждения при υ нечетном, и наоборот.

Пусть, далее, (f_υ,g_υ) – верхняя строка матрицы W_υ, $\upsilon\leqslant s$, $a_{(\upsilon)}$ и $b_{(\upsilon)}$ – старшие коэффициенты многочленов f_υ и g_υ соответственно. Индукцией по υ покажем, что при υ четном

$b_{(v)}=a_{(v)}m^2$, $\deg f_v=vk$, $\deg g_v=(v-1)k$, а при v нечетном соответственно $b_{(v)}=a_{(v)}m$, $\deg f_v=$ $=vk$, $\deg g_v=(v-1)k$.

Пусть $v=1$, тогда $f_1=1+\alpha_1 mx^k$, $g_1=\alpha_1 m^2$ и требуемые равенства очевидны.

Если $v=2$, то старшими членами многочленов f_2 и g_2 будут $\alpha_1\alpha_2 m(m^2-m)x^{2k}$ и $\alpha_1\alpha_2 mm^2(m^2-m)x^k$ соответственно. Ясно, что $b_2=a_{(2)}m^2$, $\deg f_2=2k$, $\deg g_2=k$.

Пусть теперь v – четное число >2. По индукционному предположению $b_{(v)}=a_{(v)}m^2$, $\deg f_v=vk$, $\deg g_v=(v-1)k$. Легко подсчитать, что старшими членами многочленов f_{v+1}, g_{v+1} будут соответственно $\alpha_{v+1}a_{(v)}(m-m^2)x^{(v+1)k}$ и $\alpha_{v+1}a_{(v)}m(m-m^2)x^{vk}$. Ясно, что $b_{(v+1)}=$ $=a_{(v+1)}m$, $\deg f_{v+1}=(v+1)k$, $\deg g_{v+1}=vk$.

Аналогично, если v – нечетное число, то старшие члены многочленов f_{v+1} и g_{v+1} равны соответственно $\alpha_{v+1}a_{(v)}(m^2-m)x^{(v+1)k}$ и $\alpha_{v+1}a_{(v)}m^2(m^2-m)x^{vk}$, т.е. $b_{(v+1)}=a_{(v+1)}m^2$, $\deg f_{v+1}=(v+1)k$, $\deg g_{v+1}=vk$.

Доказательство теоремы 2 теперь следует из леммы 2. Действительно, для любого натурального v имеем $f_v>g_v$, а ввиду целостности кольца O и необратимости m старший коэффициент $a_{(v)}$ многочлена f_v не делится справа на старший коэффициент $b_{(v)}$ многочлена g_v.

Отметим, что предложенное доказательство не зависит от характеристики кольца O. Теорема 2 доказана.

Таким образом, мы показали, что почти все кольца многочленов R с коэффициентами из дискретно нормированного кольца O не обладают свойством GE_2, и установили относительно большую величину разности $GL_2(R)\backslash GE_2(R)$. Теперь естественно выяснить, какие элементы из $GL_2(R)$ все же разлагаются в произведение элементарных и диагональных матриц.

Пусть дискретно нормированное кольцо O обладает правым и левым алгоритмом деления относительно заданной нормы, но для упрощения изложения деление будем предполагать правым. Для каждой матрицы x из $GL_2(R)$ с верхней строкой (f,g) в некоторых случаях зададим многочлены f_k и g_k ($k=0,1,\ldots$) рекуррентными соотношениями. Предварительно через $a_{(k)}$ и $b_{(k)}$ обозначим старшие коэффициенты (т.е. коэффициенты страших членов) многочленов f_k и g_k, а через q_k – правое частное от деления с остатком $a_{(k)}$ на $b_{(k)}$ при $|a_{(k)}|>|b_{(k)}|$ или соответственное частное от деления с остатком $b_{(k)}$ на $a_{(k)}$, если $|b_{(k)}|\geq|a_{(k)}|$.

Пусть $f_0=f$, $g_0=g$,

$$f_{k+1}=\begin{cases} f_k,\ \text{если } g_k>f_k,\ a_{(k)}\,|\,b_{(k)} \text{ или } g_k=f_k,\ |b_k|\geq|a_{(k)}|;\\ f_k-(\text{старший член } f_k/\text{старший член } g_k)g_k,\ \text{если } f_k>g_k,\ b_{(k)}\,|\,a_{(k)};\\ f_k-g_kq_k,\ \text{если } f_k=g_k,\ |a_{(k)}|>|b_{(k)}|;\\ \text{не определено в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$g_{k+1}=\begin{cases} g_k,\ \text{если } f_k>g_k,\ b_{(k)}\,|\,a_{(k)} \text{ или } f_k=g_k,\ |a_k|>|b_{(k)}|;\\ g_k-(\text{старший член } g_k/\text{старший член } f_k)f_k,\ \text{если } f_k<g_k,\ a_{(k)}\,|\,b_{(k)};\\ g_k-f_kq_k,\ \text{если } g_k=f_k,\ |b_{(k)}|\geq|a_{(k)}|;\\ \text{не определено в остальных случаях.}\end{cases}$$

Отметим, что здесь делимость подразумевается правая.

Положим $\varphi_{(k)}=f_k g_k$, если f_k и g_k определены. Обозначим еще

$$A_k = \begin{cases} t_{12}(-\text{старший член } g_k/\text{старший член } f_k), \text{ если } g_k>f_k,\ a_{(k)}|b_{(k)}; \\ t_{12}(-q_k), \text{ если } f_k=g_k,\ |b_{(k)}|\geqslant|a_{(k)}|; \\ \text{не определено в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$B_k = \begin{cases} t_{21}(-\text{старший член } f_k/\text{старший член } g_k), \text{ если } f_k>g_k,\ b_{(k)}|a_{(k)}; \\ t_{21}(-q_k), \text{ если } f_k=g_k,\ |a_{(k)}|>|b_{(k)}|; \\ \text{не определено в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $t_{ij}(\alpha)=e+\alpha e_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant 2$, $i\neq j$, e_{ij} – матричная единица, имеющая единицу на месте (i,j) и нули на остальных местах, e – единичная матрица, $\alpha\in R$.

Пусть, далее, $n=\max\{\deg f,\deg g\}$, $\sigma = C^n_{t+n}-1+\varepsilon(x)$, где C^n_{t+n} – биномиальный коэффициент, $\varepsilon_{(x)}$ – постоянная, зависящая от x и равная нулю, если O – тело.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть R – кольцо многочленов от t переменных $x_1,\dots,x_t$ над дискретно нормированным кольцом O с правым алгоритмом деления. Для всякой матрицы x из $GL_2(R)$ с верхней строкой (f,g) выполнено одно и только одно из следующих утверждений:*

1) *$\varphi(i)=0$ для некоторого $i<\sigma$, и тогда $x\in GE_2(R)$;*

2) *$\varphi(i)$ не определено для некоторого $i<\sigma$, и тогда $x\notin GE_2(R)$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [1] с некоторыми естественными поправками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Закирьянов К.Х. *Критерий вхождения в подгруппу, порожденную двумерными элементарными матрицами* // Алгебра и логика. – Новосибирск, 1983. –Т.22. – №5. – С.489–503.

2. Cohn P.M. *On the structure of the GL_2 of a ring* //Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Mat. – 1965. – № 30. – P.5–53.

3. Chu Huah. *On the GE_2 of graded rings* // J. Algebra. –1984. –T.90. –№ 1.– C.208–216.

г.Усть-Каменогорск

Поступила 06.12.1991