

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. II

В предыдущей статье (см. [I]) для гауссовских процессов со значениями в сепарабельном банаховом пространстве  $X$  удовлетворяющих условию (\*) автором было введено понятие осцилляции гауссовского процесса  $\mathcal{C}$  в точке  $c \in \mathcal{C} - \Delta_c^{\mathcal{C}}(\omega)$  и доказано, что существует звездное относительно нуля симметричное компактное множество  $K_c^{\mathcal{C}} \subset X$ ;  $\Delta_c^{\mathcal{C}}(\omega) = K_c^{\mathcal{C}}$  п.н.

В данной статье приведены достаточные условия для выполнения (\*), а также некоторые примеры.

0. Обозначения и определения.

В данной статье сохраняются обозначения, принятые в [I]. Все гауссовские случайные элементы и случайные величины предполагаются центрированными.

Для любого  $c \in \mathcal{C}$  и любого  $x^* \in X^*$  обозначим:

$$\sigma_c^{\mathcal{C}}(x^*) \stackrel{\text{д.ф.}}{=} E(x^*, c)^2;$$

$$\tilde{\sigma}_c^{\mathcal{C}} \stackrel{\text{д.ф.}}{=} \sup_{x^* \in X^* \|x^*\|=1} \sigma_c^{\mathcal{C}}(x^*).$$

Будем говорить, что гауссовский процесс удовлетворяет условию (A); если существует счетное множество  $S \subseteq \mathcal{C}$  и существуют множества  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ,  $P\Omega_0 = 1$  такие, что для любого  $c \in \mathcal{C}$  существует последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ ;  $c_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c(\omega)$

для любого  $\omega \in \Omega_0$ .

Будем говорить, что  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условию (B); если существует метрика  $d$  на  $\mathcal{C}$  и гауссовский случайный элемент  $e$  со значениями в  $X$  такие, что  $(\mathcal{C}, d)$  изометрично некоторому подмножеству сепарабельного гильбертова пространства, и, если  $\zeta(c)$ ,  $c \in \mathcal{C}$  семейство гауссовских случайных величин таких, что  $d(c_1, c_2) = (E(\zeta(c_1) - \zeta(c_2))^2)^{1/2}$ , то  $\sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) < \infty$  п.н.; и  $\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}, \forall x^* \in X^*$

$$\sigma_{c_1 - c_2}^{\mathcal{C}}(x^*) \leq \sigma_{c_1}^{\mathcal{C}}(x^*); \quad \tilde{\sigma}_{c_1}^{\mathcal{C}}(x^*) \leq \tilde{\sigma}_{c_2}^{\mathcal{C}}(x^*)$$

I. Пусть  $N(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x_n^*, x)$  (где  $x_n^* \in X^*$ ) - некоторая полунорма на  $X$ . Имеет место следующая

ЛЕММА. Пусть  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (A), (B). Тогда

$$E \sup_{c \in \mathcal{C}} N(c) \leq \sqrt{2} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_{e_n}^{\mathcal{C}} E \sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) + EN(e) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на множестве  $\mathcal{C} \times \mathbb{N}$  гауссовский процесс  $\eta(c, n)$

$$\eta(c, n) = \zeta(c) \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_e^*(x_n^*) + (x_n^*, e)$$

(где  $e$  не зависит от  $\{\zeta(c) \mid c \in \mathcal{C}\}$ ).

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \|(x_n^*, c_1) - (x_m^*, c_2)\|_{L^2(\Omega, P)} &\leq \|(x_n^*, c_1) - (x_n^*, c_2)\|_{L^2(\Omega, P)} + \\ &+ \|(x_n^* - x_m^*, c_2)\|_{L^2(\Omega, P)} \leq d(c_1, c_2) \delta_e^*(x_n^*) + \delta_e^*(x_n^* - x_m^*) \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{d^2(c_1, c_2) \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_e^2(x_n^*) + \delta_e^2(x_n^* - x_m^*)} = \sqrt{2} \|\gamma(c_1, n) - \gamma(c_2, m)\|_{L^2(\Omega, P)}. \end{aligned}$$

Следовательно (см. [2], [4]) имеем:

$$E \sup_{c \in \mathcal{C}} N(c) \leq \sqrt{2} E \sup_{c \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}} \eta(c, n) = \sqrt{2} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_e^*(x_n^*) E \sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) + EN(e) \right) \quad \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ. Если  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (А), (В), то

$$E \sup_{c \in \mathcal{C}} N(c) \leq \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} E \sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) + 1 \right) EN(e).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко получить из леммы, так, как

$$\delta_e^*(x_n^*) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} E |(x_n^*, e)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} EN(e).$$

ТЕОРЕМА. Пусть  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условиям (А), (В). Тогда  $\mathcal{C}$  удовлетворяет (\*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что  $\{c(\omega) \mid c \in \mathcal{C}\}$  относительно компактно в  $X$  для п.в.  $\omega$ . Рассмотрим в  $X$  последовательность конечномерных подпространств  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$F_n \subset F_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X.$$

Для относительной компактности множества  $B \subset X$  достаточно выполнения следующих условий:  $\sup_{x \in B} \|x\| < \infty$  и  $\sup_{x \in B} N_{F_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\text{где } N_{F_n}(x) = \inf_{y \in F_n} \|x - y\|.$$

Из следствия получаем:  $E \sup_{c \in \mathcal{C}} \|c\| \leq \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} E \sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) + 1 \right) E \|e\| < +\infty$ .

$$E \sup_{c \in \mathcal{C}} N_{F_n}(c) \leq \sqrt{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} E \sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) + 1 \right) EN_{F_n}(e).$$

Так как  $\forall x \in X, N_{F_n}(x) \neq 0, n \rightarrow \infty$ , имеем  $E \sup_{c \in \mathcal{C}} N_{F_n}(c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Следовательно для п.в.  $\omega$   $\sup_{c \in \mathcal{C}} \|c(\omega)\| < \infty$  и  $\sup_{c \in \mathcal{C}} N_{F_n}(c(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Таким образом для п.в.  $\omega$  множество  $\{c(\omega) | c \in \mathcal{C}\}$  относительно компактно в  $X$ . ■

СЛЕДСТВИЕ. Если гауссовский процесс  $\mathcal{C}$  удовлетворяет условию (B), то он имеет модификацию, удовлетворяющую условию (\*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим процесс  $\zeta(c), c \in \mathcal{C}$  из условия (B).

Так как  $\sup_{c \in \mathcal{C}} \zeta(c) < \infty$  п.н. существует сепарабельная метрика  $\rho$  на  $\mathcal{C}$  и  $\bar{\zeta}(c)$  - модификация процесса  $\zeta(c)$ , непрерывная в метрике  $\rho$  ( $\bar{\zeta}(c)$  называется естественной модификацией процесса  $\zeta(c)$ , см. [3]). Тогда легко видеть, что  $\forall x^* \in X^*$  гауссовский процесс  $\xi_{x^*}(c) = (x^*, c)$  также будет иметь модификацию, непрерывную в метрике  $\rho$ . Пусть  $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность, разделяющая точки пространства  $X$ .  $\bar{\xi}_{x_n^*}(c) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(c)$  - модификация  $\xi_{x_n^*}(c)$ , непрерывная в метрике  $\rho$ .  $S$  - счетное всюду плотное в метрике  $\rho$  множество.

Из теоремы следует, что существует множество  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ,  $P\Omega_0 = 1$  и  $\forall \omega \in \Omega_0$ , выполнено: 1)  $\{c(\omega) | c \in S\}$  - относительно компактно в  $X$  и 2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S \bar{\xi}_{x_n^*}(\omega) = (x_n^*, c(\omega))$ .

Построим теперь модификацию процесса  $\mathcal{C}$ , удовлетворяющую условию (\*). Для любого  $c \in \mathcal{C}$  существует последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S, \rho(c_n, c) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Тогда из (1) и (2) следует, что  $\forall \omega \in \Omega_0$  последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет предел. Обозначим  $\bar{c}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\omega)$ . Следовательно  $\bar{\mathcal{C}} = \{\bar{c} | c \in \mathcal{C}\}$

будет модификацией процесса  $\mathcal{C}$ , удовлетворяющей (\*). ■

2. Пусть множество  $T \subset \mathcal{C}_2, T \in \mathcal{G}\mathcal{B}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность н.о.р. гауссовских случайных элементов со значениями в  $X$ .

Рассмотрим гауссовские процессы  $\mathcal{C}_T = \{c(h) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n a_n | h = \{h_n\}_{n=1}^{\infty} \in T\}, \xi(h) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \zeta_n$ ,

где  $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$  - ортогогауссовская последовательность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.  $\mathcal{C}_T$  удовлетворяет условию (B) и  $K_{c(h)}^{\mathcal{C}_T} = \frac{1}{2} \alpha(h) B_{\mathcal{N}}(\gamma)$ , где  $\alpha(h)$  осцилляция по Ито-Нисие процесса  $\xi(h)$  в точке  $h$ ,  $\gamma$  распределение случайного элемента  $a_1$ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рассмотрим гауссовский процесс  $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$  такой, что существует гауссовский случайный элемент  $e$  и существует функция  $\beta(n), \beta(n) \rightarrow 0 : \forall x^* \in X^* \frac{\delta e_n}{\delta e_n}(x^*) \leq \beta_e(x^*)$ ,

$$E(E[x^*, e_n] | \Sigma_m)^2 \leq \beta^2(n-m) \delta_{e_n}^2(x^*),$$

где  $\Sigma_m, \delta$  - алгебра, порожденная  $e_1, \dots, e_m$ .

Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  - последовательность независимых случайных элементов таких, что  $f_n$  и  $e_n$  одинаково распределены.

Тогда имеет место:

1)  $\mathcal{E}$  удовлетворяет (\*) тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\delta}_{e_n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$$

$$2) K_0^{\mathcal{E}} = K_0^{\tilde{\mathcal{E}}}, \quad \tilde{\mathcal{E}} = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем

1) Если  $\tilde{\delta}_{e_n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$ , то для  $\mathcal{E}$  будет выполнено (B) с метрикой  $d(e_n, e_m) = \sqrt{\delta_{e_n}^2 + \delta_{e_m}^2}$ . Обратно, пусть  $\mathcal{E}_{i,N} = \{e_{i+kN}\}_{k=0}^{\infty} \cup \{0\}$ , выберем  $N$  так, чтобы  $\forall j \geq N, \beta(jN) \leq \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{e_{jN}}$  и выберем последовательность  $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}, \|x_n^*\| = 1, \delta_{e_n}(x_n^*) \geq \frac{\delta_{e_n}}{2}$

$$\text{получаем } \|(x_{i+kN}^*, e_{i+kN}) - (x_{i+lN}^*, e_{i+lN})\|_{L^2(\Omega, P)}^2 \geq \delta_{e_{i+lN}}^2(x_{i+lN}^*) + \delta_{e_{i+kN}}^2(x_{i+kN}^*) - 2\beta((l-k)N) \delta_{e_{i+kN}}(x_{i+kN}^*) \delta_{e_{i+lN}}(x_{i+lN}^*) \geq \frac{1}{4}(\delta_{e_{i+kN}}^2 + \delta_{e_{i+lN}}^2).$$

Из (\*) следует  $\sup_{n \in \mathbb{N}} (x_n^*, e_n) < \infty$  п.н. и таким образом гауссовская последовательность  $\{\delta_{i+kN} \zeta_{i+kN}\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $\zeta_{n_1}$  - ортогонауссовские, будет ограниченной п.н. и значит  $\tilde{\delta}_{i+kN} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right)$

$$\text{и поэтому } \tilde{\delta}_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

2) Можно построить на одном вероятностном пространстве последовательности  $\{f_{i,k,N}\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{e'_{i,k,N}\}_{k=1}^{\infty} : f_{i,k,N}$  независимые случайные элементы,  $\{e'_{i,k,N}\}_{k=1}^{\infty}$  распределена также, как  $\{e_{i+kN}\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $f_{i,k,N}$  и  $e'_{i,k,N}$  имеют одинаковое распределение и  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{i,k,N} - e'_{i,k,N}\| \leq 2\lambda\beta(N), \lambda =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{e_n} \sqrt{2 \ln n}.$$

Тогда расстояние по Хаусдорфу между  $K_o^{\mathcal{C}}$  и  $K_o^{\mathcal{C}^*}$  не превосходит  $2\lambda\beta(N)$ . Так как  $\beta(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  получаем  $K_o^{\mathcal{C}} = K_o^{\mathcal{C}^*}$ .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  стационарная регулярная гауссовская последовательность:  $a_n \neq 0$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  — медленно меняющаяся числовая последовательность. Рассмотрим гауссовский процесс со значениями в  $\mathbb{R}^m - \mathcal{C} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ ,  $e_n = (a_n \xi_n, \dots, a_{n+m} \xi_{n+m})$ . Тогда  $K_o^{\mathcal{C}} = \delta B_{H(\gamma)}$  ( $\gamma$  — распределение гауссовского вектора  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $\delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \xi_n$  п.н.).

#### Литература

1. М и х а й л о в А.Е. Об осцилляции гауссовских процессов. Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1989, 177, с.92-97.
2. С у д а к о в В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. — Тр.Мат.Ин-та АН СССР, 1976, т.141.
3. Ц и р е л ь с о н Б.С. Естественная модификация случайного процесса её приложения к случайным функциональным рядам и гауссовским мерам. — Зап.науч.семина.ЛОМИ, 1976, 55, с.35-63.
4. F e r n i q u e X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. — Lect.Notes Math., 1975, v.480, p.1-96.
5. I t o K., N i s i o M. On the oscillation functions of Gaussian processes. — Math.Scand., 1968, v.22, N 1, p.209-223.