Р. З. Даутов, Схема метода конечных элементов на основе мультипликативного выделения особенностей для краевых задач в областях с углами, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, номер 4, 29–39

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 4 (395)

УДК 519.632

Р.З. ДАУТОВ

СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С УГЛАМИ

Введение

Пусть Ω – многоугольная область в $\mathbb{R}^2$ с вершинами b_α и внутренними углами ϕ_α, $1\leq\alpha\leq n$, $0<\phi_\alpha\leq 2\pi$. В области Ω рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{0.1}$$

где f – заданная достаточно гладкая функция.

Как известно, в окрестности вершин b_α решение задачи (0.1) в общем случае имеет особенность, зависящую от величины угла ϕ_α. Точнее (см., напр., [1]), решение представимо в виде

$$u = \omega + w, \quad \omega = r^\lambda \sin\lambda\varphi, \quad \lambda = \pi/\phi_\alpha \geq 0.5, \tag{0.2}$$

где (r,φ) – полярные координаты с вершиной в точке b_α, угол φ_α отсчитывается от некоторой его стороны, функция $w\in W_2^2(\Omega)\cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$. Из представления (0.2) следует, что в общем случае при наличии углов $\phi_\alpha>\pi$ решение задачи (0.1) принадлежит лишь пространству Соболева $W_2^{1+\lambda-\varepsilon}(\Omega)$, $\lambda=\min\limits_\alpha\{\pi/\phi_\alpha\}$ $\forall\varepsilon>0$, и применение стандартных сеточных схем для решения задачи становится неэффективным [2]–[10], особенно при наличии углов, близких или равных 2π.

Известны различные подходы к повышению точности конечноразностных и конечноэлементных схем, в которых недостаточная гладкость решения преодолевается различными способами. Не имея возможности перечислить все работы в этом направлении, отметим лишь следующие. В работах [2]–[4] исследуются способы локального сгущения узлов сетки в окрестности особых точек, в [5] предлагается вводить в базис метода конечных элементов (МКЭ) функции ω, учитывающие особенности задачи, в [6], [7] исследуются возможности локальной модификации сеточных схем на равномерных сетках, в [8], [9] исследуется метод экстраполяции Ричардсона на последовательности сеток.

С идейной точки зрения настоящая работа ближе всех к работе [10], в которой для рассматриваемой задачи на ортогональной сетке построена пятиточечная разностная схема, имеющая точность $O(h\ln(1/h))$ в сеточной норме W_2^1 и такая, что ее погрешность аппроксимации равна нулю на главных членах ω асимптотического разложения (0.2). Последнее свойство справедливо и для предлагаемой нами схемы МКЭ на регулярной триангуляции области Ω. Основой построения и исследования схемы служит полученное нами мультипликативное выделение особенности в виде формулы (0.3).

Охарактеризуем кратко содержание работы.

В § 1 показывается, что в окрестности угловых точек решение u представимо в виде (ср. с (0.2))

$$u = \omega v, \quad \omega = r^{\lambda}\sin\lambda\varphi, \tag{0.3}$$

и исследуется структура и гладкость функции v.

В § 2 строится схема МКЭ так, что в окрестности углов, бо́льших π, приближенное решение имеет вид $u_h=\omega v_h$, и $u_h=v_h$ – в оставшейся части области, v_h – линейная на каждом элементе функция. Сопряжение разных аппроксимаций в подобластях осуществляется так, чтобы функция u_h была непрерывной в вершинах элементов. Использование указанных аппроксимаций приводит к несогласованным схемам МКЭ.

В § 3 исследуется точность построенной схемы и доказывается при определенных ограничениях на триангуляцию оценка

$$\|u-u_h\|_{1,\lambda} \le ch\ln^{\theta}(1/h), \tag{0.4}$$

где $\theta=0.5$, если есть углы, равные 2π; и $\theta=0$, если таких углов нет. Здесь и далее через c обозначаются различные постоянные, не зависящие от стоящих рядом величин. Условия на триангуляцию обсуждаются в § 4, в § 5 приводятся результаты тестовых расчетов.

§ 1. Факторизация решения в окрестности угловой точки

Пусть G_R – сектор в координатах Ox_1x_2 с вершиной в начале координат радиуса R и раствора ϕ, (r,φ) – полярные координаты в G_R с вершиной в точке O. Не ограничивая общности, будем считать, что одна из сторон сектора лежит на оси Ox_1, $\Gamma_R=\{(R,\varphi):0<\varphi<\phi\}$, $\Gamma_\phi=\{(r,\phi):0<r<R\}$, $\Gamma_0=\{(r,0):0<r<R\}$ – части границы G_R.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = f \ \text{ в } \ G_R, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0\cup\Gamma_\phi, \quad u = g \ \text{ на } \ \Gamma_R. \tag{1.1}$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f\in W^2_\infty(G_R)$, $g\in W_2^{1/2}(\Gamma_R)$, $0.5\le\lambda=\pi/\phi<1$. *Тогда в любом секторе* G_a, $a<R$, *решение* u *задачи* (1.1) *представимо в виде* $u=\omega v$, $\omega=r^{\lambda}\sin\lambda\varphi$, *причем* $v=v_1+v_2$,

(a) $v_1\in C(\overline{G}_a)$, $v_2\in C^1(\overline{G}_a)$, $\omega v_2\in W_2^2(G_a)$,

(b) $v_1=\sum'_{\lambda k} c_k r^{\lambda(k-1)}\Phi_k(\varphi)$, $\Phi_k(\varphi)=\sin\lambda k\varphi/\sin\lambda\varphi$, $c_k=\mathrm{const}$.

Здесь и далее приняты обозначения: $\sum'_{\lambda k} = \sum_{k=1}^{\lambda k\le 2}$, $\sum''_{\lambda k} = \sum_{k:\lambda k>2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем анализ явного вида решения задачи (1.1), которое легко получается методом разделения переменных и имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(r)\sin\lambda k\varphi, \quad w_k = A_k+B_k, \tag{1.2}$$

$$A_k = -(r/R)^{\lambda k}a_k, \quad a_k = \frac{1}{2\lambda k}\int_0^R \rho f_k(\rho)(\rho/R)^{\lambda k}d\rho - g_k, \tag{1.3}$$

$$B_k = B_k(f_k) = \frac{1}{2\lambda k}r^{-\lambda k}\int_0^r f_k(\rho)\rho^{\lambda k+1}d\rho + \frac{1}{2\lambda k}r^{\lambda k}\int_r^R f_k(\rho)\rho^{1-\lambda k}d\rho, \tag{1.4}$$

$$f_k(\rho) = \frac{2}{\phi}\int_0^{\phi} f(\rho,\varphi)\sin\lambda k\varphi\, d\varphi, \qquad g_k = \frac{2}{\phi}\int_0^{\phi} g(\varphi)\sin\lambda k\varphi\, d\varphi. \tag{1.5}$$

Здесь и далее за представлениями функции в координатах (x_1,x_2) и (r,φ) оставляем одно и то же обозначение, т.е.

$$f(x_1,x_2) = f(r,\varphi), \quad \text{если} \quad x_1=r\cos\varphi,\ x_2=r\sin\varphi.$$

Далее, для $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$ примем обозначения

$$D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}, \qquad \partial^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial r^{\alpha_1}\partial\varphi^{\alpha_2}.$$

Используем следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Функции* $B_k(r)$, $r\in[0,R]$, *из* (1.4) *представимы в виде*

$$B_k = \begin{cases} b_k(r/R)^{\lambda k}+r^\lambda p_k, & \lambda k\le 2;\\ b_k(r/R)^{\lambda k}+r^\lambda\left(\dfrac{r^{2-\lambda}f(r,0)}{(\lambda k)^3} - (-1)^k\dfrac{r^{2-\lambda}f(r,\phi)}{(\lambda k)^3}+p_k\right), & \lambda k>2,\end{cases}$$

причем $b_k\in\mathbb{R}$, $p_k\in C([0,R])$ *и для* $\beta=0,1,2$ *и* $r\in(0,R]$

$$|b_k|\le ck^{-3}, \quad k\ge 1, \quad |p_k^{(\beta)}| \le \begin{cases} c|\ln r|r^{2-\lambda-\beta}, & \lambda k\le 2;\\ ck^{\beta-4}r^{2-\lambda-\beta}, & \lambda k>2.\end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda k\le 2$ представление $B_k(r)$ получим после интегрирования по частям в его определении. При этом

$$b_k = \frac{\mu_k}{2\lambda k}\left(f_k(R)R^2 - R^{\lambda k}\int_r^R f_k'(\rho)\rho^{2-\lambda k}d\rho\right),$$

$$p_k(r) = r^{2-\lambda}f_k(r)\left(\frac{1}{2+\lambda k}+\mu_k\right) - \frac{1}{2\lambda k(2+\lambda k)}r^{-\lambda(k+1)}\int_0^r f_k'(\rho)\rho^{\lambda k+2}d\rho +$$

$$+\frac{\mu_k}{2\lambda k}r^{\lambda(k-1)}\int_r^R f_k'(\rho)\rho^{2-\lambda k}d\rho, \qquad \mu_k=1/(2-\lambda k).$$

При $\lambda k>2$ воспользуемся представлением

$$f_k(r) = \frac{2}{\lambda k\phi}\mathscr{F}_k(r) - \frac{1}{(\lambda k)^2}\hat f_k(r),$$

$$\mathscr{F}_k(r) = f(r,0)-(-1)^k f(r,\phi), \qquad \hat f_k(\rho) = \frac{2}{\phi}\int_0^\phi \partial^{(0,2)}f_k(\rho,\varphi)\sin\lambda k\varphi\, d\varphi,$$

которое получается из (1.5) после двукратного интегрирования по частям. По определению B_k имеем

$$B_k = B_k(f_k) = \frac{2}{\lambda k\varphi}B_k(\mathscr{F}_k) - \frac{1}{(\lambda k)^2}B_k(\hat f_k) = I_0+I_1.$$

Проинтегрируем по частям в определении I_0. После тождественных преобразований получим искомое представление B_k. При этом

$$b_k = \frac{R}{\phi(\lambda k)^2(2-\lambda k)}\mathscr{F}_k(R),$$

$$p_k = \frac{4}{\phi(\lambda k)^2((\lambda k)^2-4)}r^{2-\lambda}\mathscr{F}_k(r) - \frac{1}{2\phi(\lambda k)^2(\lambda k+2)}r^{-\lambda(k+1)}\int_0^r\mathscr{F}_k'(\rho)\rho^{\lambda k+2}d\rho -$$

$$-\frac{1}{2\phi(\lambda k)^2(\lambda k-2)}r^{\lambda(k-1)}\int_r^R\mathscr{F}_k'(\rho)\rho^{2-\lambda k}d\rho + I_1.$$

Оценки b_k очевидны. Оценки производных функций $p_k(r)$ получаются прямыми вычислениями, поскольку величины

$$|\hat f_k(r)|,\ |f_k^{(\beta)}(r)|,\ |\mathscr{F}_k^{(\beta)}(r)|, \quad \beta=0,1,$$

равномерно ограничены для $f\in W_\infty^2(G_R)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для любого* $\psi\in C^2(G_R)$ *справедливы оценки*

$$|D^\alpha\psi| \le \sum_{|\beta|=1} |r^{-\beta_2}\partial^\beta\psi| \quad \forall\alpha: |\alpha|=1,$$

$$|D^\alpha\psi| \le \sum_{|\beta|=2} |r^{-\beta_2}\partial^\beta\psi| + \sum_{|\beta|=1} |r^{-\beta_2-1}\partial^\beta\psi| \quad \forall\alpha: |\alpha|=2.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $v(x)=r^\beta X(r)Y(\varphi)$ $\forall x\in G_R$. *Тогда*

(a) $v\in C^k(\overline{G}_R)$, *если* $\beta>k$, $X\in C^k([0,R])$, $Y\in C^k([0,\phi])$;

(b) $v\in W_2^2(G_R)$, *если* $\beta>1$, $X\in C^2([0,R])$, $Y\in C^2([0,\phi])$.

Доказательства лемм 2, 3 опускаем в силу их простоты.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\Phi_k(\varphi)=\sin\lambda k\varphi/\sin\lambda\varphi$, $k\ge 1$. *Тогда*

$$|\Phi_k^{(\beta)}| \le ck^{\beta+1}, \quad \beta\ge 0, \ \forall\varphi\in[0,\phi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Суммируя тождества

$$\sin n\varphi - \sin(n-2)\varphi = 2\cos(n-1)\varphi\sin\varphi,$$

для Φ_k получим представление

$$\Phi_k(\varphi) = 2\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{m-1}\cos(2n+1)\lambda\varphi, & k=2m; \\ 0.5+\sum\limits_{n=0}^{m}\cos 2n\lambda\varphi, & k=2m+1, \end{cases}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Представим $u(x)$ в виде

$$u = u_1+u_2, \quad u_1 = \sum_{\lambda k}{}' w_k\sin\lambda k\varphi, \quad u_2 = \sum_{\lambda k}{}'' w_k\sin\lambda k\varphi,$$

и изучим в отдельности поведение функций u_1, u_2. Используя определения (1.2)–(1.4) и лемму 1, будем иметь

$$u_1 = \omega\sum_{\lambda k}{}' r^{-\lambda}(A_k+B_k)\Phi_k = \omega(v_1+\chi_1),$$

$$v_1 = \sum_{\lambda k}{}' c_k r^{\lambda(k-1)}\Phi_k(\varphi), \quad \chi_1 = \sum_{\lambda k}{}' p_k(r)\Phi_k(\varphi), \quad c_k = (b_k-a_k)/R^{\lambda k}.$$

В силу леммы 3 получим включение $(0.5\le\lambda<1)$

$$v_1\in C(\overline{G}_R), \quad \chi_1\in C^1(\overline{G}_R). \tag{1.6}$$

Далее, поскольку функция $\omega\chi_1$ гладкая всюду кроме начала координат и в его окрестности $\omega\chi_1$ ведет себя как $cr^2\ln r$, то

$$\omega\chi_1\in W_2^2(G_R). \tag{1.7}$$

Покажем теперь, что функция u_2 имеет вид $u_2=\omega\chi_2$, причем $\chi_2\in C^1(\overline{G}_a)$, $u_2\in W_2^2(G_a)$. Для этого представим χ_2 в виде суммы четырех слагаемых, соответствующих разложению функций B_k в лемме 1,

$$u_2 = \sum_{\lambda k}{}''(A_k+B_k)\sin\lambda k\varphi = \omega\chi_2 = \omega\sum_{i=1}^{4}\psi_i,$$

$$\psi_1 = \sum_{\lambda k}{}'' p_k(r)\Phi_k(\varphi), \quad \psi_2 = \sum_{\lambda k}{}'' e_k(r/R)^{\lambda(k-1)}\Phi_k(\varphi), \quad e_k = (b_k-a_k)/R^\lambda,$$

$$\psi_3 = r^{2-\lambda}f(r,0)\left(\sum_{\lambda k}{}''(\lambda k)^{-3}\sin\lambda k\varphi\right)/\sin\lambda\varphi,$$

$$\psi_4 = r^{2-\lambda}f(r,\phi)\left(\sum_{\lambda k}{}''(-1)^{k+1}(\lambda k)^{-3}\sin\lambda k\varphi\right)/\sin\lambda\varphi,$$

и убедимся в том, что $\psi_i \in C^1(\overline{G}_a)$.

Ряд для ψ_1 сходится и определяет непрерывную в $\overline{G}_a$ функцию, т.к. члены ряда непрерывны, а также

$$|p_k(r)\Phi_k(\varphi)| \leqslant cr^{2-\lambda}/k^3 \leqslant c/k^3.$$

Далее, члены этого ряда непрерывно дифференцируемы и согласно леммам 1–3

$$|\alpha|=1 : |D^\alpha(p_k\Phi_k)| \leqslant cr^{1-\lambda}/k^2 \leqslant c/k^2.$$

Следовательно, ряд из производных также равномерно сходится в $\overline{G}_a$ и, таким образом, $\psi_1 \in C^1(\overline{G}_a)$. Аналогично устанавливается, что $\psi_2 \in C^1(\overline{G}_a)$, т.к. в $\overline{G}_a$ имеем $r/R<1$, а величины e_k ограничены.

Поскольку для любого φ при условии $\lambda\varphi \in [0, 2\pi]$ справедливо равенство (см. [12], с.187):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda k)^{-3} \sin \lambda k\varphi = \theta_1(\varphi) = [(\lambda\varphi)^3 - 3\pi(\lambda\varphi)^2 + 2\pi^2\lambda\varphi]/(12\lambda^3),$$

то для ψ_3 имеет место представление

$$\psi_3 = r^{2-\lambda} f(r,0)\theta(\varphi), \qquad \theta = \Big(\theta_1 - \sum_{\lambda k}{}' (\lambda k)^{-3} \sin \lambda k\varphi\Big)/\sin \lambda\varphi. \tag{1.8}$$

Из (1.8) в силу леммы 3 следует $\psi_3 \in C^1(\overline{G}_a)$. Аналогично устанавливается включение $\psi_4 \in C^1(\overline{G}_a)$ с использованием равенства ([12], с. 188):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\lambda k)^{-3} \sin \lambda k\varphi = [\pi^2\lambda\varphi - (\lambda\varphi)^3]/12.$$

Покажем теперь, что $\omega\psi_i \in W_2^2(G_a)$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, и, следовательно, $u_2 \in W_2^2(G_a)$. При $|\alpha| \leqslant 2$, $\lambda k > 2$, в силу лемм 1, 2 имеем, очевидно,

$$|D^\alpha(r^\lambda p_k(r) \sin \lambda k\varphi)| \leqslant cr^{2-|\alpha|}/k^{4-|\alpha|} \leqslant c/k^2.$$

Таким образом,

$$|D^\alpha(\omega\psi_1)| \leqslant \sum_{\lambda k}{}'' |D^\alpha(r^\lambda p_k(r) \sin \lambda k\varphi)| \leqslant \sum_{\lambda k}{}'' c/k^2 \leqslant c,$$

откуда следует, что $\omega\psi_1 \in W_2^2(G_a)$. Аналогично, $\omega\psi_2 \in W_2^2(G_a)$. Так как из (1.8) имеем $\omega\psi_3 = r^2 f(r,0)\theta(\varphi)\sin\lambda\varphi$, то из леммы 3 вытекает включение $\omega\psi_3 \in W_2^2(G_a)$. Аналогично, $\omega\psi_4 \in W_2^2(G_a)$.

Теорема доказана, поскольку достаточно принять $v_2 = \chi_1 + \chi_2$, а включение $v_2 \in C^1(\overline{G}_a)$ очевидно, т.к.

$$|D^\alpha v_2| \leqslant cr^{2-\lambda-|\alpha|} |\ln r| \leqslant c \quad \text{при } |\alpha| \leqslant 1. \tag{1.9}$$

§ 2. Построение схемы МКЭ

Разобьем многоугольник Ω на совокупность $\mathcal{T}_h$ треугольных конечных элементов τ так, что $\Omega = \bigcup \tau$. Будем предполагать, что триангуляция $\mathcal{T}_h$ регулярна ([11], с. 134), $h = \max\{\operatorname{diam} \tau,\ \tau \in \mathcal{T}_h\}$.

При определении пространства конечных элементов V_h будем использовать различные аппроксимации вблизи углов, бóльших π, и вдали от них. В связи с этим обозначим через b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, вершины Ω с внутренними углами $\phi_i > \pi$; через $\Omega_i \subset \Omega$ – такие односвязные обла–

сти, что Ω_i – криволинейный треугольник с двумя прямолинейными сторонами, лежащими на $\partial\Omega$, и криволинейной Γ_i, лежащей внутри Ω, $b_i \in \bar{\Omega}_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$, если $i \neq j$, $1 \leq i,j \leq m$. Будем предполагать, что кривая Γ_i является достаточно гладкой кривой.

Пусть, далее, Ω_i^h – совокупность конечных элементов τ, принадлежащих области Ω_i, Γ_i^h – часть границы области Ω_i^h, соответствующая Γ_i,

$$\Omega_V^h = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i^h, \quad \Omega_0^h = \Omega \backslash \Omega_V^h, \quad \Gamma^h = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i^h,$$

(r_i, φ_i) – полярные координаты с началом в вершине b_i, $0 \leq \varphi_i \leq \phi_i$,

$$\omega(x) = \begin{cases} r_i^{\lambda_i} \sin \lambda_i \varphi_i, \ \lambda_i = \pi/\phi_i, & \text{если } x \in \Omega_i^h, \ 1 \leq i \leq m; \\ 1, \quad \text{если } x \in \Omega_0^h. \end{cases}$$

Через $S(\Omega_V^h)$ $(S(\Omega_0^h))$ обозначим множество непрерывных в области Ω_V^h (Ω_0^h), линейных на каждом конечном элементе $\tau \in \Omega_V^h$ $(\tau \in \Omega_0^h)$ функций.

Определим теперь пространство конечных элементов V_h как множество таких функций u_h, что:

(a) на Ω_V^h функция $u_h = \omega v_h$, $v_h \in S(\Omega_V^h)$;

(b) на Ω_0^h функция $u_h \in S(\Omega_0^h)$, $u_h = 0$ на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_0^h$;

(c) u_h непрерывна в вершинах элементов, принадлежащих Γ^h.

По построению функции из V_h терпят разрыв на Γ^h, поэтому V_h не является подпространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Использование пространства V_h при определении приближенного решения приводит к неконформному ([11], с. 206) методу конечных элементов. В соответствии с этим определим функционалы

$$a_h(u,v) = \int_{\Omega_V^h} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega_0^h} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v dx, \qquad \|u\|_{1,h} = (a_h(u,u))^{1/2}.$$

Функцию $u_h \in V_h$ назовем приближенным решением задачи (0.1), если

$$a_h(u_h, v) = f(v) \quad \forall v \in V_h. \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что функционал $\|\cdot\|_{1,h}$ определяет норму на пространстве V_h и, следовательно, задача (2.1) однозначно разрешима.

§ 3. Оценка точности

Оценку точности приближенного решения (2.1) дает

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f \in W_\infty^2(\Omega)$, u – *решение задачи* (0.1), u_h – *решение схемы* (2.1). *Пусть, далее,* n_h – *нормаль к* Γ_h *и*

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial n_h} \right| \leq c(\omega + h). \tag{3.1}$$

Тогда справедлива оценка (0.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся общей оценкой погрешности неконформного метода МКЭ (см., напр., [11], с.209):

$$\|u-u_h\|_{1,h} \leq c\left(\inf_{v\in V_h} \|u-v\|_{1,h} + \sup_{v\in V_h} |D_h(u,v)|\right), \tag{3.2}$$

где функционал $D_h(u,v)=(a_h(u,v)-f(v))/\|v\|_{1,h}$ определяет меру неконформности. Следующие леммы позволяют оценить правую часть неравенства (3.2) и тем самым доказать теорему.

ЛЕММА 5. *Пусть* $f\in W^2_\infty(\Omega)$, u *– решение задачи* (0.1). *Тогда*

$$\inf_{v\in V_h} \|u-v\|_{1,h} \leq ch\ln^\theta(1/h).$$

ЛЕММА 6. *Пусть* $f\in W^2_\infty(\Omega)$, u *– решение задачи* (0.1),

$$\left|\frac{\partial\omega}{\partial n_h}\right| \leq c(\omega+h).$$

Тогда $\sup\limits_{v\in V_h} |D_h(u,v)| \leq ch.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Учтем структуру решения u. По теореме 1

$$u=\omega v \text{ на } \Omega^h_V,\quad v=v_1+v_2,\ \omega v_2\in W^2_2(\Omega^h_V);$$
$$u\in W^2_2(\Omega^h_0).$$

Пусть $\pi_h u$ – такая проекция u на V_h, что

$$\pi_h u = \begin{cases} \omega v_I \text{ на } \Omega^h_V, & v_I\in S(\Omega^h_V);\\ u_I \text{ на } \Omega^h_0, & u_I\in S(\Omega^h_0),\end{cases}$$

где w_I – кусочно-линейный интерполянт функции w. Имеем

$$\inf_{v\in V_h} \|u-v\|_{1,h} \leq \|u-\pi_h u\|_{1,h} \leq \|u-u_I\|_{1,\Omega^h_0} + \|\omega(v-v_I)\|_{1,\Omega^h_V}. \tag{3.3}$$

Здесь $\|u\|^2_{1,\Omega}=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\,dx$. По определению u_I справедлива оценка

$$\|u-u_I\|_{1,\Omega^h_0} \leq ch\|u\|_{W^2_2(\Omega^h_0)} \leq ch, \tag{3.4}$$

поскольку $\operatorname{mes}(\Omega^h_0\setminus\Omega_0)=O(h)$. Так как $v=v_1+v_2$, то второе слагаемое в (3.3) оценивается сверху

$$\|\omega(v-v_I\|_{1,\Omega^h_V} \leq \|\omega(v_1-v_{1I})\|_{1,\Omega^h_V} + \|\omega(v_2-v_{2I})\|_{1,\Omega^h_V}. \tag{3.5}$$

Покажем, что для любого $i=1,\dots,m$ имеют место оценки

$$\|\omega(v_1-v_{1I}\|_{1,\Omega^h_i} \leq ch\ln^\theta(1/h), \tag{3.6}$$

$$\|\omega(v_2-v_{2I}\|_{1,\Omega^h_i} \leq ch\ln^\theta(1/h). \tag{3.7}$$

Тогда из (3.5)–(3.7) будет следовать утверждение леммы, т.к. $\Omega^h_V=\bigcup\limits_{i=1}^m \Omega^h_i$.

Пусть далее $b=b_i$, $\Omega_b=\Omega^h_i$, $r=r_i$, $\varphi=\varphi_i$, $\lambda=\lambda_i$. Докажем оценку (3.6). Напомним, что

$$v_1 = \sum_{\lambda k}' c_k r^{\lambda(k-1)}\Phi_k(\varphi)\in C(\overline{\Omega}_b),$$

и, как нетрудно видеть,

$$|D^\alpha(v_1-v_1(b))| \leq cr^{\lambda-|\alpha|} \text{ на } \Omega_b. \tag{3.8}$$

Пусть $\tau\in\Omega_b$, $\max F=\max\{F(x),\ x\in\overline{\tau}\}$, $r_\tau=\max r$, $z=v_1-v_{1I}$. Если $b\notin\overline{\tau}$, то $v_1\in C^2(\overline{\tau})$ и, учитывая (3.8), для любого $x\in\overline{\tau}$ имеем

$$|\nabla(\omega z)|(x) \leqslant |\nabla\omega|\,|z|+\omega|\nabla z| \leqslant c(r^{\lambda-1}h^2+r^\lambda h)\max|D^2v_1| \leqslant ch(r^{\lambda-1}h+r^\lambda)r^{\lambda-2} \leqslant chr^{2\lambda-2}. \tag{3.9}$$

Если $b\in\bar{\tau}$, то для любого $x\in\bar{\tau}$ будем иметь ($r_\tau\leqslant h$)

$$|\nabla(\omega z)|(x) \leqslant |\nabla\omega|\,|z|+\omega|\nabla z| \leqslant cr^{\lambda-1}(r^\lambda+rr_\tau^\lambda/h) + cr^\lambda(r^{\lambda-1}+r_\tau^\lambda/h) \leqslant ch^\lambda r^{\lambda-1}. \tag{3.10}$$

Таким образом, из (3.9), (3.10) следует ($d=\operatorname{diam}\Omega_b$)

$$\|\omega z\|^2_{1,\Omega_b} = \sum_{\tau\in\Omega_b:\,b\notin\tau}\|\omega z\|^2_{1,\tau} + \sum_{\tau\in\Omega_b:\,b\in\tau}\|\omega z\|^2_{1,\tau} \leqslant$$

$$\leqslant ch^2\sum_{\tau\in\Omega_b:\,b\notin\tau}\|r^{2\lambda-2}\|^2_{L_2(\tau)} + ch^{2\lambda}\sum_{\tau\in\Omega_b:\,b\in\tau}\|r^{\lambda-1}\|^2_{L_2(\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant ch^2\int_{ch}^{d} r^{4\lambda-3}dr + ch^{2\lambda}\int_0^h r^{2\lambda-1}dr \leqslant ch^2\ln^{2\theta}(1/h)+ch^{4\lambda} \leqslant ch^2\ln^{2\theta}(1/h),$$

т.е. оценка (3.6) доказана.

Докажем оценку (3.7). Пусть $w=\omega v_2$. По теореме 1 имеем $w\in W_2^2(\Omega_b)$. Поскольку $w_I = =(\omega v_2)_I=(\omega v_{2I})_I$, то, полагая $z=\omega v_{2I}$, получаем оценку

$$\|\omega(v_2-v_{2I})\|_{1,\Omega_b} \leqslant \|w-w_I\|_{1,\Omega_b} + \|z-z_I\|_{1,\Omega_b} \leqslant$$

$$\leqslant ch(\|w\|_{W_2^2(\Omega_b)}+S), \quad S = \Big(\sum_{\tau\in\Omega_b}|z|^2_{W_2^2(\tau)}\Big)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Из (3.11) будет следовать (3.7), если $S\leqslant\text{const}$. Покажем это.

В силу теоремы 1 имеем $v_2\in C^1(\bar{\Omega}_b)$. Кроме того, для любого $\tau\in\Omega_b$ в силу оценки (1.9)

$$\max|D^\alpha v_{2I}| \leqslant c\max|D^\alpha v_2| \leqslant cr_\tau^{2-\lambda-|\alpha|}|\ln r_\tau|, \quad |\alpha|\leqslant 1.$$

Поэтому для любого $x\in\tau$

$$|D^2z| \leqslant |D^2\omega|\,|v_{2I}| + |D\omega|\,|Dv_{2I}| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} c(r^{\lambda-2}r_\tau^{2-\lambda}+r^{\lambda-1}r_\tau^{1-\lambda})|\ln r_\tau|\leqslant c|\ln r|, & \text{если } b\notin\bar{\tau}; \\ c(r^{\lambda-2}rr_\tau^{2-\lambda}/h+r^{\lambda-1}r_\tau^{1-\lambda})|\ln r_\tau|\leqslant cr^{\lambda-1}, & \text{если } b\in\bar{\tau}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Здесь учтено, что $r_\tau\leqslant cr$, если $b\notin\bar{\tau}$, и $|v_{2I}| \leqslant cr/h\max|v_2|$, $r_\tau\leqslant h$, если $b\in\bar{\tau}$. Из оценок (3.12) следует, что $S\leqslant\text{const}$. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Нетрудно видеть, что

$$D_h(u,w) = \int_{\Gamma_h}\frac{\partial u}{\partial n_h}[w]d\Gamma_h, \quad w\in V_h,$$

где $[w] = w\big|_{\Omega_V^h}-w\big|_{\Omega_0^h} \equiv w^{(V)}-w^{(0)}$ – скачок функции w на Γ_h. Поскольку $u=\omega v$ на Γ_h, то, используя условие (3.1), будем иметь

$$|D_h(u,w)| = \left|\int_{\Gamma_h}\left(\frac{\partial\omega}{\partial n_h}v + \frac{\partial v}{\partial n_h}\omega\right)[w]d\Gamma_h\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Gamma_h}\omega\left(|v|+\left|\frac{\partial v}{\partial n_h}\right|\right)|[w]|d\Gamma_h + ch\int_{\Gamma_h}|v|\,|[w]|d\Gamma_h \leqslant c\int_{\Gamma_h}\omega|[w]|d\Gamma_h + ch\int_{\Gamma_h}|[w]|d\Gamma_h. \tag{3.13}$$

Получим представление $[w]$ на Γ_h. Пусть $\partial\tau$ – звено Γ_h, не примыкающее к $\partial\Omega$; x_i, x_j – координаты его концов; w_i, w_j – значение $w^{(0)}$ в этих точках; p_i, p_j – такие линейные функции на $\partial\tau$, что $p_k(x_s)=\delta_{ks}$, $k, s=i, j$, δ_{ks} – символ Кронекера. Очевидно, на $\partial\tau$

$$w^{(0)}(x) = w_i p_i(x) + w_j p_j(x),$$
$$w^{(V)}(x) = \omega/\omega_i w_i p_i(x) + \omega/\omega_j w_j p_j(x),$$

и, таким образом,

$$\omega[w] = \omega/\omega_i(\omega-\omega_i)w_i p_i(x) + \omega/\omega_j(\omega-\omega_j)w_j p_j(x).$$

Учитывая, что ω – гладкая функция на Γ_h, имеем

$$\omega|[w]| \leqslant ch \max_{x\in\partial\tau} |w^{(0)}(x)| \leqslant ch^{1/2}\|w^{(0)}\|_{L_2(\partial\tau)},$$

следовательно,

$$\sum_{\partial\tau}\int_{\partial\tau}\omega|[w]|\,d\Gamma_h \leqslant ch\sum_{\partial\tau} h^{1/2}\|w^{(0)}\|_{L_2(\partial\tau)} \leqslant$$
$$\leqslant ch\|w^{(0)}\|_{L_2(\Gamma_h)} \leqslant ch\|w\|_{W_2^1(\Omega_0^h)} \leqslant ch\|w\|_{1,h}. \tag{3.14}$$

Если $\partial\tau$ – звено Γ_h, примыкающее к $\partial\Omega$, то $\omega \leqslant ch$ и

$$\int_{\partial\tau}\omega|[w]|\,d\Gamma_h \leqslant ch\int_{\partial\tau}|[w]|\,d\Gamma_h \leqslant ch\int_{\Gamma_h}|[w]|\,d\Gamma_h \leqslant$$
$$\leqslant ch\left(\|w^{(0)}\|_{L_2(\Gamma_h)} + \|w^{(V)}\|_{L_2(\Gamma_h)}\right) \leqslant ch\|w\|_{1,h}. \tag{3.15}$$

Из оценок (3.13)–(3.15), очевидно, следует утверждение леммы.

§ 4. Обсуждение условия (3.1)

Условие (3.1) представляет собой ограничение на триангуляцию $\mathscr{T}_h$. Укажем достаточное условие на $\mathscr{T}_h$, при котором оно выполняется.

Пусть α фиксировано, $1\leqslant\alpha\leqslant m$, криволинейный треугольник Ω_α имеет прямолинейные стороны l_1, l_2 и криволинейную Γ_α. Не ограничивая общности, будем считать, что сторона l_1 параллельна оси Ox_1. Пусть далее (r,φ) – полярные координаты в Ω_α, угол φ отсчитывается от стороны l_1; $r=r(\varphi)$ – уравнение кусочно-гладкой кривой Γ_α класса C^2, $n = (\cos n_x(\varphi),$ $\sin n_x(\varphi))$ – единичный вектор внешней нормали к Γ_α, n_h – единичный вектор внешней нормали к Γ_α^h.

Будем предполагать, что кривая Γ_α подходит под прямым углом к $\partial\Omega$, т.е.

$$n_x(0) = 0, \quad n_x(\phi_\alpha) = \phi_\alpha, \tag{4.1}$$

а ломаная Γ_α^h – часть границы Ω_α^h – интерполирует Γ_α в вершинах конечных элементов, примыкающих к Γ_α.

Нетрудно видеть, что $(\lambda=\pi/\phi_\alpha)$

$$\nabla\omega = \lambda r^{\lambda-1}(\sin(\lambda-1)\varphi,\ \cos(\lambda-1)\varphi)^T,$$
$$\partial\omega/\partial n = \nabla\omega\cdot n = q\omega, \quad q = \lambda r^{-1}\sin[(\lambda-1)\varphi + n_x(\varphi)]/\sin\lambda\varphi,$$

и в силу предположения (4.1)

$$|\nabla\omega| \leqslant c, \quad |\partial\omega/\partial n| \leqslant c\omega \quad \text{на } \Gamma_\alpha. \tag{4.2}$$

Из (4.2) и близости Γ_α и Γ_α^h имеем, очевидно, оценку

$$|\partial\omega/\partial n_h| = |\partial\omega/\partial n + \nabla\omega\cdot(n-n_h)| \leqslant c(\omega+h) \quad \text{на } \Gamma_\alpha^h,$$

т.е. оценку (3.1).

Таким образом, условие (3.1) выполнено, если ломаные Γ_α^h аппроксимируют с точностью $O(h^2)$ кусочно-гладкие кривые Γ_α, подходящие под прямым углом к $\partial\Omega$, $1\leq\alpha\leq m$. Нетрудно видеть, что множество подобных триангуляций не пусто для произвольной многоугольной области.

§ 5. Численный пример

Для проверки работоспособности предложенной схемы были проведены тестовые вычисления. В квадратной области

$$\Omega = [-1,1]^2\backslash\{x_1 : 0\leq x_1\leq 1\}$$

с разрезом рассматривалась задача

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u = g \quad \text{на } \partial\Omega$$

с точным решением $u = r^\lambda \sin\lambda\varphi + r^{3\lambda}\sin 3\lambda\varphi$, $\lambda=0.5$. Область Ω имеет семь угловых точек, но только угол при одной вершине $x=0$ больше π и равен 2π.

Область Ω разбивалась сеткой узлов $n\times n$ на квадратные ячейки, каждая из ячеек разбивалась на два треугольника диагональю из левого нижнего угла. Рассматривались три схемы при $n=10, 20, 40$. Первая схема – стандартная схема МКЭ. Для нее справедлива теоретическая оценка $\|u-u_h^c\|_{1,\Omega}\leq ch^{1/2}\ln^{1/2}(1/h)$. Вторая схема – рассмотренная нами схема (2.1) в случае, когда в качестве окрестности Ω_h особой точки $x=0$ выбиралась вся область Ω. Обозначим ее решение через u_h^f. Третья схема – схема (2.1) при включении в Ω_h лишь тех элементов, которые имеют точку $x=0$ своей вершиной. Пусть u_h^m ее решение.

В результате вычислений были получены следующие представления погрешности этих схем:

$$\|u-u_h^c\|_C = 0.19\, h^{1/2}\ln^{1/2}(1/h),$$

$$\|u-u_h^f\|_C = 0.05\, h^{3/2}\ln^{1/2}(1/h),$$

$$\|u-u_h^m\|_C = 0.02\, h^{1/2}\ln^{1/2}(1/h),$$

где $\|\cdot\|_C$ – равномерная сеточная норма по вершинам элементов.

Автор выражает глубокую благодарность участникам семинара кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев В.А. *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1967. – Т.16. – С.209–292.

2. Волков Е.А. *О методе регулярных составных сеток для уравнения Лапласа на многоугольниках* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1976. – Т.140. – С.68–102.

3. Schatz A.H., Wahlbin L.B. *Maximum norm estimates in the finite element method on plane polygonal domains.* Part 1 // Math. Comput. – 1978. – V.32. – P.73–109.

4. Schatz A.H., Wahlbin L.B. *Maximum norm estimates in the finite element method on plane polygonal domains.* Part 2 // Math. Comput. – 1979. – V.33. – P.465–492.

5. Fix G. *Higher-order Rayleigh-Ritz approximations* // J. Math. Meth. – 1969. – V.18. – № 7. – P.645–657.

6. Андреев В.Б. *О точности модифицированных разностной и конечно-элементной схем для модельной задачи о трещине* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т.17. – № 7. – С.1184-1192.

7. Андреев В.Б. *Асимптотика решения сеточного уравнения Лапласа в угле* // ДАН СССР. – 1979. – Т.244. – № 6. – С.1289–1293.

8. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. *Повышение точности решений разностных схем.* – М.: Наука, 1979. – 319 с.

9. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. *Численные алгоритмы на последовательности сеток и их приложения в задачах магнитостатики и теоретической физики* // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1988. – Т.19, вып. 3. – С.622–668.

10. Фрязинов И.В. *Разностные схемы для уравнения Лапласа в ступенчатых областях* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1978. – Т.18. – № 5. – С.1170–1185.

11. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

12. Толстов Г.П. *Ряды Фурье.* М.: Физматгиз, 1960. – 390 с.

Казанский государственный университет

Поступила
21.10.1994