M. L. Jalilov, R. Kh. Rakhimov, Vibrations of an infinite piece-homogeneous two-layer plate under the influence of normal load, *Comp. nanotechnol.*, 2021, Volume 8, Issue 4, 28–33

DOI: 10.33693/2313-223X-2021-8-4-28-33

05.14.01 **ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ**

COMPLEX POWER SYSTEMS

DOI: 10.33693/2313-223X-2021-8-4-28-33

Vibrations of an Infinite Piece-homogeneous Two-layer Plate under the Influence of Normal Load

M.L. Djalilov[1, a] ©, R.Kh. Rakhimov[2, b] ©

[1] **Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khorazmiy, Fergana, Republic of Uzbekistan**

[2] **Institute of Materials Science of the SPA "Physics-Sun" of the Academy of Science of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan**

[a] **E-mail: mamatiso2015@yandex.ru**

[b] **E-mail: rustam-shsul@yandex.com**

Abstract. This article examines the effect of normal load on an infinite piecewise homogeneous two-layer plate when the materials of the upper and lower layers of the plate are elastic. The transverse displacement of the points of the contact plane of a two-layer plate is determined, satisfying the approximate equation obtained in [1], in the case of replacing viscoelastic operators with elastic Lyame coefficients, respectively. For a rectangular infinite two-layer piecewise homogeneous plate under non-zero initial conditions, the frequencies of natural oscillations are calculated and an analytical solution to this problem is constructed. The obtained theoretical results for solving dynamic problems of transverse oscillation of piecewise homogeneous two-layer plates of constant thickness, taking into account the elastic properties of their material, allow us to more accurately calculate the transverse displacement of the points of the contact plane of the plates under normal external loads.

Key words: fluctuation equations, two-layer plate, displacement, elastic, viscoelastic, edge conditions, initial conditions, operator, factors of Ljame, differential equation, integral of Fure, complex frequency

FOR CITATION: Djalilov M.L., Rakhimov R.Kh. Vibrations of an Infinite Piece-homogeneous Two-layer Plate under the Influence of Normal Load. *Computational Nanotechnology*. 2021. Vol. 8. No. 4. Pp. 28–33. DOI: 10.33693/2313-223X-2021-8-4-28-33

In real structures, the destruction of their elements is usually accompanied by impact loads.

In this work, a solution is constructed on the vibrations of an infinite two-layer plate under the action of a normal load applied to the surface of a two-layer plate.

The problem is reduced to solving an approximate equation for the transverse displacement W of points of the contact plane of a two-layer plate of constant thickness, obtained in [1] and [2].

$$Q_1\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+Q_2\left(\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^4}\right)+Q_3\left(\Delta^2 W\right)+Q_4\left(\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}\right)+ +Q_5\left(\Delta\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+Q_6\left(\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+Q_7\left(\Delta^3 W\right)=F(x,\,y,\,t), \tag{1}$$

where the coefficients Q_j are determined by the formula obtained in [2].

Assuming the load $F(x, y, t)$ to be even in (x, y), the transverse displacement W will be sought in the form of the Fourier integrals

$$W=\int_0^\infty\int_0^\infty W_0\cos(kx)\cos(qy)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}q. \tag{2}$$

Substituting (2) into equations (1), for W_0 we obtain the ordinary differential equation

$$W_0^{\mathrm{VI}}+A_1W_0^{\mathrm{IV}}+A_2W_0^{\mathrm{II}}+A_3W_0=F_0(k,\,q,\,t), \tag{3}$$

where the coefficients A_j and $F_0(k, q, t)$ are equal:

$$A_1=\frac{Q_1'-\gamma^2Q_5'}{Q_4'};\quad A_2=\frac{\gamma^2\left(Q_2'-\gamma^2Q_6'\right)}{Q_4'};\quad A_3=\frac{\gamma^4\left(Q_3'-\gamma^2Q_7'\right)}{Q_4'};$$

$$F_0(k,\,q,\,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty F(x,\,y,\,t)\cos(kx)\cos(qy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

and the coefficients Q_j' are determined by the formulas

$$Q_1' = P_2^2\left(1+h\rho\right)^2;$$

$$\begin{aligned}Q_2' = -2P_2^2\Big(&2\left(P_2D_0+hD_1\right)\left(1+h\rho\right)+\\&+\left(P_2-1\right)\left(\left(1+h\right)-\left(D_0+hD_1\rho\right)\right)\Big);\end{aligned}$$

$$Q_3' = 4\left(P_2-1\right)\left(P_2D_0+h^2D_1+2hP_2D_0\right);$$

$$\begin{aligned}Q_4' = -\frac{1}{6}P_2^2\Big(&\left(3h^2\rho^2+\left(1+4h\rho\right)\right)\left(2-D_0\right)+\\&+h^2P_2\left(3+h\rho\left(h\rho+4\right)\right)\left(2-D_1\right)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_5' = -\frac{1}{6}P_2\Big(&\left(2P_2\left(4D_0\left(1-D_0\right)+1\right)+\left(P_2-1\right)\left(4-D_0^2\right)\right)-\\&-P_2h^2\rho^2\left(2\left(4D_1^2-4D_1-1\right)-\left(P_2-1\right)D_1\left(2-D_1\right)\right)+\\&+6h^2\Big(\rho\Big(4\left(P_2^2D_0+D_1\right)+\left(P_2-1\right)\Big(2P_2\left(1-D_0\right)-P_2D_1\left(2-D_0\right)+\\&+D_1\left(1+D_0\right)\Big)\Big)+P_2\left(1+\rho^2\right)\Big)+2h\Big(2P_2\rho\left(2+4D_0-D_0^2\right)-\\&-h^2\left(2P_2-P_2D_1+5D_1-D_1^2\right)\Big)+\left(P_2-1\right)\Big(4-3D_0\right)+\\&+2D_1\left(4-D_0\right)\Big)+2P_2h\rho^2D_0\left(4-D_1\right)\Big);\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}Q_6' = \frac{1}{3}P_2\Big(&2D_0\left(3P_2-4D_0-1\right)+\left(P_2-1\right)\left(2+9D_0-3D_0^2\right)\Big)+\\&+h_1^4P_2\rho\left(4D_1\left(1-2D_1\right)-4D_1+\left(P_2-1\right)D_1\left(3-D_1\right)\right)+\\&+3h^2\Big(4P_2D_0\left(P_2\left(1-D_1\right)-D_1\right)-\left(P_2-1\right)\Big(2\left(P_2-1\right)D_1\left(1-D_0\right)-\\&-P_2\left(2-D_0-4D_0D_1\right)\Big)+P_2\rho\Big(4D_1\left(1+D_0+P_2D_0\right)-\\&-\left(P_2-1\right)\left(6D_0D_1\left(P_2-1\right)-6P_2D_0+D_1\right)\Big)\Big)+\\&+2hP_2\Big(2\left(2D_1\left(1+2D_0\right)+\left(P_2-1\right)\left(1+2D_0-D_0^2\right)\right)+\\&+h_1^2\left(2\left(P_2-1\right)+D_1\left(P_2+3\right)\right)-\\&-4P_2\rho D_0\left(1+{h_0}^2\left(2\left(P_2-1\right)\left(1-D_1\right)+P_2D_1+\left(1+D_1\right)\right)\right)\Big)\Big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_7' = \frac{2}{3}\Big(&P_2D_0\left(4D_0-5\left(P_2-1\right)+h_1^4D_1\left(4D_1-\left(P_2-1\right)\right)\right)-\\&-3h^2\left(8P_2D_0D_1+\left(P_2-1\right)\left(3P_2D_0-\left(2P_2+1\right)D_0D_1-D_1\left(1-D_1\right)\right)\right)-\\&-4hP_2D_0\left(2D_1+\left(P_2-1\right)\right)+h_1^2\left(2\left(P_2-1\right)+\left(P_2+1\right)D_1\right)\Big)\Big)\end{aligned}$$

and γ is determined by the formula

$$\gamma = h_0^2(k^2+q),$$

and immeasurable parameters were introduced:

$$h=\frac{h_1}{h_0};\quad \rho=\frac{\rho_1}{\rho_0};\quad b=\frac{b_0}{b_1};\quad P_2=\frac{\mu_0}{\mu_1};$$

$$D_0=\frac{1}{2\left(1-\nu_0\right)};\quad D_1=\frac{1}{2\left(1-\nu_1\right)}.$$

For ξ from equation (3) we obtain the frequency equation

$$\xi^6 + A_1\xi^4 + A_2\xi^2 + A_3 = 0. \tag{5}$$

frequency equation (5) has purely imaginary roots, i.e., frequencies of own fluctuations.

Then, the common decision of the homogeneous differential equation (4) is equal

$$\begin{aligned}W_{og} = &C_1\cos\left(\xi_1t\right)+C_2\sin\left(\xi_1t\right)+C_3\cos\left(\xi_2t\right)+\\&+C_4\sin\left(\xi_2t\right)+C_5\cos\left(\xi_3t\right)+C_6\sin\left(\xi_3t\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Applying a method of a variation of any constants, for C_j' we will receive:

$$\begin{aligned}C_1' &= \frac{1}{\xi_1\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\sin\left(\xi_1t\right);\\C_2' &= -\frac{1}{\xi_1\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\cos\left(\xi_1t\right);\\C_3' &= -\frac{1}{\xi_2\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\sin\left(\xi_2t\right);\\C_4' &= \frac{1}{\xi_2\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\cos\left(\xi_2t\right);\\C_5' &= \frac{1}{\xi_3\left(\xi_2^2-\xi_3^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\sin\left(\xi_3t\right);\\C_6' &= -\frac{1}{\xi_3\left(\xi_2^2-\xi_3^2\right)\left(\xi_1^2-\xi_3^2\right)}F_0\cos\left(\xi_3t\right).\end{aligned} \tag{7}$$

private decision of the differential equation (3) we will write down in a kind

$$\begin{aligned}W = &\frac{1}{\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_2^2-\xi_3^2\right)\left(\xi_3^2-\xi_1^2\right)}\times\\&\times\left\{\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_1\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta+\right.\\&+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_2\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta+\\&\left.+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_3\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Satisfying with a zero initial condition, i.e.,

$$W_0=\frac{\partial W_0}{\partial t}=\frac{\partial^2 W_0}{\mathrm{d}t^2}=\ldots=\frac{\partial^5 W_0}{\partial t^5}=0, \tag{9}$$

We find that C_1' = C_2' = … = C_6' = 0. Then, the decision of a problem for displacement *W* looks like

$$\begin{aligned}W = &\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{\cos\left(kx\right)\cos\left(qy\right)}{\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_2^2-\xi_3^2\right)\left(\xi_3^2-\xi_1^2\right)}\times\\&\times\left\{\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_1\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta+\right.\\&+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_2\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta+\\&\left.+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}\int_0^t F_0\left(k,\,q,\,\zeta\right)\sin\left[\xi_3\left(t-\zeta\right)\right]\mathrm{d}\zeta\right\}\mathrm{d}k\,\mathrm{d}q,\end{aligned} \tag{10}$$

Let, if

$$F(x, y, t) = \sigma_0\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

where σ_0 – constant of dimension of pressure; δ(ζ) – Dirac delta function.

Then, problem decisions will register in a kind

$$\begin{aligned}W = \sigma_0&\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\frac{\cos\left(kx\right)\cos\left(qy\right)}{\left(\xi_1^2-\xi_2^2\right)\left(\xi_2^2-\xi_3^2\right)\left(\xi_3^2-\xi_1^2\right)}\left[\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\sin\left(\xi_1t\right)+\right.\\&\left.+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\sin\left(\xi_2t\right)+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}+\sin\left(\xi_3t\right)\right]\mathrm{d}k\,\mathrm{d}q.\end{aligned} \tag{11}$$

CONCLUSIONS

From the analytical decision of a problem on influence of normal loading on a surface of a two-layer plate follows that the deflection depends on geometrical and mechanical characteristics of a material of a plate, and also allows to describe precisely enough tensely - the deformed status of a plate in its any point eventually.

References

1. *Rakhimov R.H.*, *Umaraliev N.*, *Jalilov M.L*. Vibrations of two-layer plates of constant thickness. *Computational Nanotechnology*. 2018. No. 2. ISSN 2313-223X. (In Rus.)
2. *Jalilov M.L.*, *Rakhimov R.Kh*. Analysis of the general equations of the transverse vibration of a piecewise uniform viscoelastic plate. *Computational Nanotechnology*. 2020. Vol. 7. No. 3. Pp. 52–56.
3. *Filippov I.G.*, *Egorychev O.A*. Wave processes in linear viscoelastic media. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 272 p.
4. *Chetaev N.G*. Stability of motion. Moscow: Nauka, 1990. 176 p.
5. *Achenbach J.D*. An asymptotic method to analyze the vibrations of elastic layer. *Trans*. *ASME*. 1969. Vol. E 34. No. 1. Pp. 37–46.
6. *Brunelle E.J*. The elastics and dynamics of a transversely isotropic Timoshenko beam. *J. Compos. Mater*. 1970. Vol. 4. Pp. 404–416.
7. *Gallahan W.R*. On the flexural vibrations of circular and elliptical plates. *Quart. Appl. Math*. 1956. Vol. 13. No. 4. Pp. 371–380.
8. *Dong S*. Analysis of laminated shells of revolution. *J. Esg. Mech. Div. Proc. Amer. Sac. Civil Engrs*. 1966. Vol. 92. No. 6.

Колебания бесконечной кусочно-однородной двухслойной пластинки под воздействием нормальной нагрузки

М.Л. Джалилов[1] ©, Р.Х. Рахимов[2, b] ©

[1] **Ферганский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада Ал-Хоразмий, г. Фергана, Республика Узбекистан**

[2] **Институт материаловедения Научно-производственного объединения «Физика-Солнце» Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Республика Узбекистан**

[a] **E-mail: mamatiso2015@yandex.ru**

[b] **E-mail: rustam-shsul@yandex.com**

Аннотация. В данной статье рассматривается воздействие нормальной нагрузки на бесконечную кусочно-однородную двухслойную пластинку, когда материалы верхнего и нижнего слоев пластинки упругие. Определено поперечное смещение точек плоскости контакта двухслойной пластинки, удовлетворяющее приближенному уравнению, полученному в работе [1], в случае замены вязкоупругих операторов на упругие коэффициенты Ляме, μ_0 соответственно. Для прямоугольной бесконечной двухслойной кусочно-однородной пластинки при ненулевых начальных условиях, вычисляются частоты собственных колебаний и строится аналитическое решение данной задачи. Полученные теоретические результаты для решения динамических задач поперечного колебания кусочно-однородных двухслойных пластин постоянной толщины, с учетом упругих свойств их материала, позволяют более точно рассчитывать поперечное смещение точек плоскости контакта пластин при нормальных внешних нагрузках.

Ключевые слова: уравнение колебаний, двухслойная пластинка, смещение, упругий, вязкоупругий, граничные условия, начальные условия, оператор, коэффициент Ляме μ_0, дифференциальное уравнение, интеграл Фурье, комплексная частота

ССЫЛКА НА СТАТЬЮ: Джалилов М.Л., Рахимов Р.Х. Колебания бесконечной кусочно-однородной двухслойной пластинки под воздействие нормальной нагрузки // Computational nanotechnology. 2021. Т. 8. № 4. С. 28–33. DOI: 10.33693/2313-223X-2021-8-4-28-33

В данной работе строится решение о колебаниях бесконечной двухслойной пластинки под действием нормальной нагрузки, приложенной к поверхности двухслойной пластинки. В реальных конструкциях разрушение их элементов обычно сопровождается нагрузками ударного типа.

Задача сводится к решению приближенного уравнения для поперечного смещения W точек плоскости контакта двухслойной пластинки постоянной толщины, полученного в работах [1] и [2].

$$Q_1\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+Q_2\left(\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^4}\right)+Q_3\left(\Delta^2 W\right)+Q_4\left(\frac{\partial^6 W}{\partial t^6}\right)+$$
$$+Q_5\left(\Delta\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}\right)+Q_6\left(\Delta^2\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)+Q_7\left(\Delta^3 W\right)=F(x,\,y,\,t), \quad (1)$$

где коэффициенты Q_j определяются по формуле полученного в работе [2].

Считая нагрузку $F(x, y, t)$ четной по (x, y), поперечное смещение W будем искать в виде интегралов Фурье

$$W=\int_0^\infty\int_0^\infty W_0\cos(kx)\cos(qy)\,dk\,dq. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнения (1), для W_0 получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W_0^{\mathrm{VI}}+A_1W_0^{\mathrm{IV}}+A_2W_0^{\mathrm{II}}+A_3W_0=F_0(k,\,q,\,t), \quad (3)$$

где коэффициенты A_j и $F_0(k, q, t)$ равны:

$$A_1=\frac{Q_1'-\gamma^2Q_5'}{Q_4'};\quad A_2=\frac{\gamma^2\left(Q_2'-\gamma^2Q_6'\right)}{Q_4'};\quad A_3=\frac{\gamma^4\left(Q_3'-\gamma^2Q_7'\right)}{Q_4'};$$

$$F_0(k,\,q,\,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty F(x,\,y,\,t)\cos(kx)\cos(qy)\,dx\,dy,$$

а коэффициенты Q_j' определяются по формулам

$$Q_1'=P_2^2(1+h\rho)^2;$$
$$Q_2'=-2P_2^2\Big(2\left(P_2D_0+hD_1\right)(1+h\rho)+$$
$$+\left(P_2-1\right)\big((1+h)-\left(D_0+hD_1\rho\right)\big)\Big);$$
$$Q_3'=4\left(P_2-1\right)\left(P_2D_0+h^2D_1+2hP_2D_0\right); \quad (4)$$
$$Q_4'=-\frac{1}{6}P_2^2\Big(\left(3h^2\rho^2+(1+4h\rho)\right)\left(2-D_0\right)+$$
$$+h^2P_2\left(3+h\rho(h\rho+4)\right)\left(2-D_1\right)\Big);$$

$$\begin{gathered}
Q_5' = -\frac{1}{6}P_2\Big(\big(2P_2\big(4D_0(1-D_0)+1\big)+(P_2-1)(4-D_0^2)\big)- \\
-P_2h^2\rho^2\big(2\big(4D_1^2-4D_1-1\big)-(P_2-1)D_1(2-D_1)\big)+ \\
+6h^2\Big(\rho\Big(4\big(P_2^2D_0+D_1\big)+(P_2-1)\big(2P_2(1-D_0)-P_2D_1(2-D_0)+ \\
+D_1(1+D_0)\big)\Big)+P_2(1+\rho^2)\Big)+2h\big(2P_2\rho\big(2+4D_0-D_0^2\big)- \\
-h^2\big(2P_2-P_2D_1+5D_1-D_1^2\big)\big)+(P_2-1)(4-3D_0)+ \\
+2D_1(4-D_0)\Big)+2P_2h\rho^2D_0(4-D_1)\Big);
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Q_6' = \frac{1}{3}P_2\big(2D_0(3P_2-4D_0-1)+(P_2-1)\big(2+9D_0-3D_0^2\big)\big)+ \\
+h_1^4P_2\rho\big(4D_1(1-2D_1)-4D_1+(P_2-1)D_1(3-D_1)\big)+ \\
+3h^2\Big(4P_2D_0\big(P_2(1-D_1)-D_1\big)-(P_2-1)\big(2(P_2-1)D_1(1-D_0)- \\
-P_2(2-D_0-4D_0D_1)\big)+P_2\rho\big(4D_1(1+D_0+P_2D_0)- \\
-(P_2-1)\big(6D_0D_1(P_2-1)-6P_2D_0+D_1\big)\big)\Big)+ \\
+2hP_2\Big(2\big(2D_1(1+2D_0)+(P_2-1)\big(1+2D_0-D_0^2\big)\big)+ \\
+h_1^2\big(2(P_2-1)+D_1(P_2+3)\big)- \\
-4P_2\rho D_0\Big(1+h_0^{\,2}\big(2(P_2-1)(1-D_1)+P_2D_1+(1+D_1)\big)\Big)\Big)\Big);
\end{gathered} \quad (4)$$

$$\begin{gathered}
Q_7' = \frac{2}{3}\Big(P_2D_0\big(4D_0-5(P_2-1)+h_1^4D_1\big(4D_1-(P_2-1)\big)- \\
-3h^2\big(8P_2D_0D_1+(P_2-1)\big(3P_2D_0-(2P_2+1)D_0D_1-D_1(1-D_1)\big)\big)- \\
-4hP_2D_0\big(2D_1+(P_2-1)\big)+h_1^2\big(2(P_2-1)+(P_2+1)D_1\big)\big)\Big)
\end{gathered}$$

и γ определяется по формуле

$$\gamma = h_0^2(k^2 + q),$$

и введены безразмерные параметры:

$$h = \frac{h_1}{h_0};\quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_0};\quad b = \frac{b_0}{b_1};\quad P_2 = \frac{\mu_0}{\mu_1};$$

$$D_0 = \frac{1}{2(1-\nu_0)};\quad D_1 = \frac{1}{2(1-\nu_1)}.$$

Для ξ из уравнения (3) получаем частотное уравнение

$$\xi^6 + A_1\xi^4 + A_2\xi^2 + A_3 = 0. \quad (5)$$

Частотное уравнение (5) имеет чисто мнимые корни, т.е. частоты собственных колебаний.

Тогда, общее решение однородного дифференциального уравнения (4) равно

$$\begin{gathered}
W_{og} = C_1\cos(\xi_1t)+C_2\sin(\xi_1t)+C_3\cos(\xi_2t)+ \\
+C_4\sin(\xi_2t)+C_5\cos(\xi_3t)+C_6\sin(\xi_3t).
\end{gathered} \quad (6)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, для C_j' получим:

$$\begin{gathered}
C_1' = \frac{1}{\xi_1(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\sin(\xi_1t); \\
C_2' = -\frac{1}{\xi_1(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\cos(\xi_1t); \\
C_3' = -\frac{1}{\xi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\sin(\xi_2t);
\end{gathered} \quad (7)$$

$$\begin{gathered}
C_4' = \frac{1}{\xi_2(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\cos(\xi_2t); \\
C_5' = \frac{1}{\xi_3(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\sin(\xi_3t); \\
C_6' = -\frac{1}{\xi_3(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_1^2-\xi_3^2)}F_0\cos(\xi_3t).
\end{gathered} \quad (7)$$

Частное решение дифференциального уравнения (3) запишем в виде

$$\begin{gathered}
W = \frac{1}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_3^2-\xi_1^2)}\times \\
\times\Bigg\{\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_1(t-\zeta)\big]d\zeta+ \\
+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_2(t-\zeta)\big]d\zeta+ \\
+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_3(t-\zeta)\big]d\zeta\Bigg\}.
\end{gathered} \quad (8)$$

Удовлетворяя нулевым начальным условием, т.е.,

$$W_0 = \frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 W_0}{dt^2} = \ldots = \frac{\partial^5 W_0}{\partial t^5} = 0, \quad (9)$$

находим, что $C_1' = C_2' = \ldots = C_6' = 0$. Тогда, решение задачи для смещения W имеет вид

$$\begin{gathered}
W = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos(kx)\cos(qy)}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_3^2-\xi_1^2)}\times \\
\times\Bigg\{\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_1(t-\zeta)\big]d\zeta+ \\
+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_2(t-\zeta)\big]d\zeta+ \\
+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}\int_0^t F_0(k,\,q,\,\zeta)\sin\big[\xi_3(t-\zeta)\big]d\zeta\Bigg\}dk\,dq,
\end{gathered} \quad (10)$$

Если

$$F(x, y, t) = \sigma_0\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

где σ_0 – константа, размерности напряжения; $\delta(\zeta)$ – дельта-функция Дирака.

Тогда, решения задачи запишется в виде

$$\begin{gathered}
W = \sigma_0\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos(kx)\cos(qy)}{(\xi_1^2-\xi_2^2)(\xi_2^2-\xi_3^2)(\xi_3^2-\xi_1^2)}\Bigg[\frac{\xi_2^2-\xi_3^2}{\xi_1}\sin(\xi_1t)+ \\
+\frac{\xi_3^2-\xi_1^2}{\xi_2}\sin(\xi_2t)+\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{\xi_3}+\sin(\xi_3t)\Bigg]dk\,dq.
\end{gathered} \quad (11)$$

ВЫВОДЫ

Из аналитического решения задачи о воздействии нормальной нагрузки на поверхность двуслойной пластинки следует, что прогиб зависит от геометрических и механических характеристик материала пластинки, а также позволяет достаточно точно описать напряженно – деформированное состояние пластинки в любой ее точке с течением времени.

Литература

1. *Рахимов Р.Х.*, *Умаралиев Н.*, *Джалилов М.Л.* Колебания двухслойных пластин постоянной толщины // Computational Nanotechnology. 2018. № 2. ISSN: 2313-223X.
2. *Jalilov M.L.*, *Rakhimov R.Kh*. Analysis of the general equations of the transverse vibration of a piecewise uniform viscoelastic plate // Computational Nanotechnology. 2020. Vol. 7. No. 3. Pp. 52–56.
3. *Филиппов И.Г.*, *Егорычев О.А.* Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. М.: Машиностроение, 1983. 272 с.
4. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
5. *Achenbach J.D*. An asymptotic method to analyze the vibrations of elastic layer // Trans. ASME. 1969. Vol. E 34. No. 1. Pp. 37–46.
6. *Brunelle E.J*. The elastics and dynamics of a transversely isotropic Timoshenko beam // J. Compos. Mater. 1970. Vol. 4. Pp. 404–416.
7. *Gallahan W.R*. On the flexural vibrations of circular and elliptical plates // Quart. Appl. Math. 1956. Vol. 13. No. 4. Pp. 371–380.
8. *Dong S*. Analysis of laminated shells of revolution // J. Esg. Mech. Div. Proc. Amer. Sac. Civil Engrs. 1966. Vol. 92. No. 6.

Статья проверена программой Антиплагиат

Р е ц е н з е н т: *Раджапов С.А.*, доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник Физико-технического института НПО «Физика-Солнце» АН РУз

Статья поступила в редакцию 25.01.2021, принята к публикации 01.03.2021
The article was received on 25.01.2021, accepted for publication 01.03.2021

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Джалилов Маматиса Латибджанович, кандидат технических наук; заведующий кафедрой «Компьютерные системы» Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада Ал-Хоразмий. Ташкент, Республика Узбекистан. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9471-4893; E-mail: mamatiso2015@yandex.ru

Рахимов Рустам Хакимович, доктор технических наук, профессор; заведующий лабораторией № 1 Института материаловедения Научно-производственного объединения «Физика-Солнце» Академии наук Республики Узбекистан. Ташкент, Республика Узбекистан. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6964-9260. E-mail: rustam-shsul@yandex.com

ABOUT THE AUTHORS

Mamatisa L. Djalilov, Cand. Sci. (Eng.); Head at the Department “Computer Systems” of the Fergana branch of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khorazmiy. Tashkent, Republic of Uzbekistan. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9471-4893; E-mail: mamatiso2015@yandex.ru

Rustam Kh. Rakhimov, Dr. Sci. (Eng.); Head at the Laboratory No. 1 of the Institute of Materials Science “Physics-Sun” of the Republic of Uzbekistan. Tashkent, Republic of Uzbekistan. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6964-9260; E-mail: rustam-shsul@yandex.com