Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Адельные формулы для гамма- и бета-функций в полях алгебраических чисел, *Докл. РАН*, 1996, том 347, номер 1, 11–15

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
12 февраля 2025 г., 13:48:19

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 347, № 1, с. 11–15

МАТЕМАТИКА

УДК 512.625.5+512.626.6+517.523+53.02

АДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИЙ В ПОЛЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

© 1996 г. Академик В. С. Владимиров

Поступило 14.12.95 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] были получены регуляризованные адельные формулы для гамма- и бета-функций неразветвленных квазихарактеров для всех пополнений произвольного поля алгебраических чисел $\mathbb{K}$. Эта формула для гамма-функций имеет вид

$$\Gamma_{\infty}^{\sigma}(\alpha)\Gamma_{-\infty}^{\tau}(\alpha)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_p}\Gamma_{q_{pj}}(\alpha) = |D|^{1/2-\alpha}, \quad (1.1)$$

где σ – число вещественных и τ – число комплексных корней минимального полинома степени $n = \sigma + 2\tau$ для алгебраического числа ε, порождающего поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\varepsilon)$; D – дискриминант поля $\mathbb{K}$; m_p – число различных простых дивизоров, входящих в разложение простого числа p [8]; Γ_{∞} и $\Gamma_{-\infty}$ – гамма-функции для неразветвленных квазихарактеров полей $\mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_{-\infty} = \mathbb{C}$ соответственно [2]; функция

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{1-q^{\alpha-1}}{1-q^{-\alpha}} \quad (1.2)$$

есть гамма-функция локального p-поля с модулем $q = p^f$.

Формулы, аналогичные (1.1), справедливы и для бета-функций [1, 2]:

$$B_{\infty}^{\sigma}(\alpha, \beta)B_{-\infty}^{\tau}(\alpha, \beta)\operatorname{reg}\prod_{p=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m_p}B_{q_{pj}}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D|}, \quad (1.3)$$

где бета-функция локального поля (характеристики 0) определяется как произведение соответствующих этому полю гамма-функций:

$$B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (1.4)$$

Для неразветвленных квазихарактеров регуляризованные адельные формулы (1.1) и (1.3) были конкретизированы для следующих конкретных частных случаев: для поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – в [3], для квадратичных полей $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – в [4], для m-круговых полей – в [1, 2], для некоторых кубических полей – в [2].

В этой работе мы обобщаем полученные результаты на случай разветвленных квазихарактеров. Соответствующие адельные формулы выписаны в (4.19) для гамма-функций и в (5.1) для бета-функций.

Адельные формулы для бета-функций применяются для получения связей между амплитудами Венециано и Вирасоро–Шапиро со струнными амплитудами (для открытых и замкнутых струн соответственно) [5, 6, 1, 2].

Для бета-функций разветвленных квазихарактеров мы вводим новые амплитуды (6.2) и (6.4), аналогичные амплитудам Венециано и Вирасоро–Шапиро. Регуляризованные адельные формулы для них непосредственно следуют из формулы (5.1). Заметим, что новые амплитуды, вообще говоря, не являются кроссинг-симметричными: они обладают более общей симметрией – векторной инвариантностью на многообразиях (6.3) и (6.5) соответственно.

Следует отметить, что впервые адельные формулы были предложены в 1987 г. Фрёйндом и Виттеном [5] для амплитуды Венециано (в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$) и для амплитуды Вирасоро–Шапиро (в комплексном квадратичном поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$). Немного позже и независимо адельные формулы для амплитуды Венециано были получены Воловичем [6].

В этой работе используются обозначения, принятые в статье автора [2]. Необходимые сведения из теории чисел и анализа можно найти в книгах [7–14].

2. КВАЗИХАРАКТЕРЫ НА ГРУППЕ ИДЕЛЕЙ $A^{\times}/\mathbb{K}^{\times}$

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\varepsilon)$ – поле алгебраических чисел степени $n = \sigma + 2\tau$. Обозначим: $(\sigma_v, \mathbb{K}_v, v = 1, 2, \ldots)$ – все точки поля $\mathbb{K}$, для локальное поле $\mathbb{K}_v = \mathbb{R}$, $v = 1, 2, \ldots, \sigma$, – для бесконечных вещественных точек; $\mathbb{K}_v = \mathbb{C}$, $v = \sigma + 1, \ldots, \sigma + \tau$, – для бесконечных мнимых точек; $\mathbb{K}_v = \mathbb{Q}_p(\sigma_v(\varepsilon))$, $v = \sigma + \tau + 1, \ldots,$ – для конечных точек [7]. Обозначим: $\theta_v(x_v)$ – мультипликативный характер локального поля $\mathbb{K}_v$ и ρ_v – его ранг.

Пусть $A^{\times}$ – группа иделей $X = (x_1, x_2, \ldots, x_v, \ldots \ldots, x_v \in \mathbb{K}_v)$ поля $\mathbb{K}$. Квазихарактер этой группы –

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

это представление ее в $\mathbb{C}$. Мы будем использовать квазихарактеры, тривиальные на ее подгруппе $\mathbb{K}^\times$ главный иделей $\mathbf{x} = (\sigma_v(x), x \in \mathbb{K}^\times)$, т.е. квазихарактеры на группе $A^\times/\mathbb{K}^\times$. Всякий квазихарактер $\Omega(X)$ этой группы представляется в виде

$$\Omega(X) = \omega(X)\prod |x_v|_v^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

где

$$\omega(X) = \prod \omega_v(x_v), \quad \omega_v(x_v) = \theta_v(x_v)|x_v|_v^{i\alpha_v}, \quad \alpha_v \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

– характер группы $A^\times/\mathbb{K}^\times$. Обозначим:

$$\theta(X) = \prod \theta_v(x_v) \tag{2.3}$$

– характер группы $A^\times$.

Существуют необходимые и достаточные условия того, чтобы характер на $A^\times$ был тривиален на $\mathbb{K}^\times$ [7]. Для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ эти условия выписываются в явном виде [12]: характер

$$\omega(X) = \theta(X)|x|^{i\alpha_\infty}\prod_{p=2}^{\infty}|x_p|_p^{i\alpha_p}, \tag{2.4}$$

где

$$\theta(X) = \operatorname{sign}^\nu x\prod_{p=2}^{\infty}\theta_p(x_p), \quad \theta_p(p) = 1, \tag{2.5}$$

тривиален на $\mathbb{Q}^\times$ тогда и только тогда, когда

$$\theta(-1) = 1, \quad p^{i\alpha_p} = p^{i\alpha_\infty}\theta(p). \tag{2.6}$$

3. ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИИ В ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Такие поля $\mathbb{K}$ хорошо известны: это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_p$ и конечные алгебраические расширения $\mathbb{Q}_p(\varepsilon)$. Пусть dx – нормированная мера Хаара на $\mathbb{K}$, $|x|$ – нормирование на $\mathbb{K}$, $q = p^f, f \in Z_+$ – модуль поля $\mathbb{K}$, r – ранг аддитивного характера $\chi_p(\mathrm{Sp}x)$, $q^{-r/2}dx$ – самодвойственная мера относительно этого характера. Пусть θ – мультипликативный характер поля $\mathbb{K}$, ρ – его ранг. Введем следующие определения [7, 12].

Гамма-функцией $\Gamma(\alpha; \theta)$ характера θ поля $\mathbb{K}$ называется аналитическое продолжение из области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ интеграла

$$\Gamma(\alpha; \theta) = q^{-r/2}\int\theta(x)|x|^{\alpha-1}\chi_p(\mathrm{Sp}x)dx.$$

Бета-функцией $B(\alpha, \theta; \beta, \theta')$ характеров θ и θ' поля $\mathbb{K}$ называется аналитическое продолжение из трубчатой области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\mathrm{Re}\,\beta > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha + \beta) < 1$ интеграла

$$B(\alpha, \theta; \beta, \theta') = \int\theta(x)|x|^{\alpha-1}\theta'(1-x)|1-x|^{\beta-1}dx.$$

Преобразованием Меллина $\Phi(\alpha; \theta)$ функции $\varphi \in S(\mathbb{K})$ относительно характера θ поля $\mathbb{K}$ называется аналитическое продолжение из области $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ интеграла

$$\Phi(\alpha; \theta) = \int\varphi(x)\theta(x)|x|^\alpha d^\times x,$$

где $d^\times x$ – мера Хаара на $\mathbb{K}^\times$.

Справедливы формулы

$$\Gamma(\alpha; \theta)\Gamma(1-\alpha; \bar\theta) = \theta(-1), \tag{3.1}$$

$$B(\alpha, \theta; \beta, \theta') = q^{1/2}\Gamma(\alpha; \theta)\Gamma(\beta; \theta')\Gamma(\gamma; \theta'')\theta''(-1), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \theta\theta'\theta'' = 1, \tag{3.2}$$

$$\Phi(\alpha; \theta) = \Gamma(\alpha; \theta)\tilde\Phi(1-\alpha; \bar\theta)\theta(-1), \tag{3.3}$$

где $\tilde\Phi$ – преобразование Меллина относительно характера θ преобразования Фурье $\tilde\varphi$.

В конкретных локальных полях эти величины имеют следующий вид.

Поле $\mathbb{K}_v = \mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$, $v = 1, 2, \ldots, \sigma$. Здесь dx – мера Лебега, $d^\times x = |x|^{-1}dx$, $q = 1$, $r = \rho = 0$,

$$\chi_p(\mathrm{Sp}x) = \exp(-2\pi i x), \quad \theta_\nu = \operatorname{sign}^\nu x, \quad \nu \in F_2$$

($x \in F_2$ обозначает $\nu \equiv 0, 1 (\mathrm{mod}\,2)$).

$$\Gamma(\alpha; \theta_\nu) = i^{-\nu}\Gamma_\infty(\alpha; \nu),$$

$$B(\alpha, \theta; \beta, \theta_\mu) = B_\infty(\alpha, \nu; \beta, \mu),$$

где

$$\Gamma_\infty(\alpha; \nu) = \pi^{1/2-\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\alpha+\nu}{2}\right)}, \quad \nu = 0, 1, \tag{3.4}$$

$$B_\infty(\alpha, \nu; \beta, \mu) = \Gamma_\infty(\alpha; \nu)\Gamma_\infty(\beta; \mu)\Gamma_\infty(1-\alpha-\beta; -\nu-\mu). \tag{3.5}$$

В силу (3.5) бета-функция B_∞ симметрична относительно перестановок точек (α, ν), (β, μ), (γ, η) на многообразии

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \quad \nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in F_2^3. \tag{3.6}$$

Поле $\mathbb{K}_v = \mathbb{C} = \mathbb{Q}_{-\infty}$, $v = \sigma + 1, \ldots, \sigma + \tau$. Здесь

$$d^\times x = (x\bar x)^{-1}|dx \wedge d\bar x|, \quad q = 1, \quad r = \rho = 0,$$

$$\chi_p(\mathrm{Sp}x) = \exp(-4\pi i\,\mathrm{Re}x), \quad \theta_\nu = x^\nu(x\bar x)^{-\nu/2}, \quad \nu \in Z,$$

$$\Gamma(\alpha; \theta_\nu) = \Gamma_{-\infty}(\alpha; \nu),$$

$$B(\alpha, \theta_\nu; \beta, \theta_\mu) = B_{-\infty}(\alpha, \nu; \beta, \mu),$$

где

$$\Gamma_{-\infty}(\alpha; \nu) = (2\pi)^{1-2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha + |\nu|/2)}{\Gamma(1-\alpha+|\nu|/2)}, \quad \nu \in Z, \tag{3.7}$$

$$B_{-\infty}(\alpha, \nu; \beta, \mu) = \\ = \Gamma_{-\infty}(\alpha; \nu)\Gamma_{-\infty}(\beta; \mu)\Gamma_{-\infty}(1-\alpha-\beta; -\nu-\mu). \quad (3.8)$$

В силу (3.8) бета-функция $B_{-\infty}$ симметрична относительно перестановок точек (α, ν), (β, μ), (γ, η) на многообразии

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 1, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3, \\ \nu+\mu+\eta &= 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in Z^3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поля $\mathbb{K}_v = \mathbb{Q}_p(\varepsilon)$, $p = 2, 3, 5, \ldots$, $v = \sigma+\tau+1, \ldots$ Здесь

$$q = p^f, \quad d_v^\times x = (1-q^{-1})^{-1}|x|_v^{-1}d_vx.$$

Характер θ_v нормируем условием $\theta_v(\pi) = 1$, где $\pi = \pi_v$ – образующий элемент (простой дивизор) поля $\mathbb{K}_v$ [8].

Для неразветвленных характеров ($\theta \equiv 1$, $\rho = 0$, $v \in F$) имеем [2]

$$\Gamma_v(\alpha) = q^{(\alpha-1/2)r}\Gamma_q(\alpha), \quad (3.10)$$

где $\Gamma_q(\alpha)$ определена равенством (1.4).

Отметим, что $\Gamma_v(\alpha)$ есть преобразование Меллина основной функции [2]

$$\varphi_v(x) = (1-q^{-1})q^{-r/2}\chi_p(\mathrm{Sp}x)\Omega(q^{-r-1}|x|_v). \quad (3.11)$$

Для разветвленных характеров ($\theta \not\equiv 1$, $\rho \geq 1$, $v \in R$)

$$\Gamma_v(\alpha; \theta) = \kappa(\theta)q^{(\alpha-1/2)(r+\rho)}, \quad (3.12)$$

где

$$\kappa(\theta) = q^{r/2}\int_{|x_v|=1}\theta(x)\chi_p(\mathrm{Sp}(\pi^{r+\rho}x))dx, \quad |\kappa| = 1. \quad (3.13)$$

Отметим, что $\Gamma_v(\alpha; \theta)$ есть преобразование Меллина основной функции

$$\varphi_v(x) = (1-q^{-1})q^{-r/2}\chi_p(\mathrm{Sp}x)\delta(|x|_v - q^{r+\rho}). \quad (3.14)$$

4. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАММА- И БЕТА-ФУНКЦИЙ

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \prod_{v<V}\varphi_v(x_v)\prod_{v\geq V}\Omega(|x_v|_v), \\ \varphi_v &\in S(\mathbb{K}_v), \quad V \geq \sigma+\tau+1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

– стандартная функция из $S(A)$ [7].

Преобразованием Меллина $\Phi(\alpha; \omega)$ стандартной функции φ относительно характера ω (2.2) группы $A^\times/\mathbb{K}^\times$ называется аналитическое продолжение из области $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$ интеграла

$$\Phi(\alpha; \omega) = \int_{A^\times}\varphi(X)\omega(X)|X|_A^\alpha d^\times X,$$

где $d^\times X$ – мера Хаара на $A^\times$.

Формула Тейта для стандартной функции φ (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\prod_{v<V}\Phi_v(\alpha; \omega)L_V(\alpha; \omega) = \\ &= \prod_{v<V}\tilde{\Phi}_v(1-\alpha; \bar{\omega})L_V(1-\alpha; \bar{\omega}), \quad V \geq V_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

если конечная точка V_0 лежит выше всех разветвленных точек (их конечное число, так что $\rho_v = r_v = 0$, $v \geq V_0$). Если ω – разветвленный характер, то обе части равенства (4.2) суть целые функции.

В (4.2) L_V – V-усеченная L-функция Дирихле. При $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$

$$\begin{aligned} L_V(\alpha; \omega) &= \prod_{v\geq V}[1-\lambda(v)q_v^{-\alpha}]^{-1}, \\ \lambda(v) &= q_v^{i\alpha_v} = \omega_v(\pi_v), \quad V \geq V_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Выберем в формуле Тейта (4.2) стандартную функцию φ (4.1) следующим образом. При $v = 1, 2, \ldots, \sigma$ положим

$$\varphi_v(x) = x^\nu\exp(-\pi x^2), \quad \nu \in F_2$$

и тогда

$$\begin{aligned} \Phi_v(\alpha; \omega_v) &= G_\infty(\alpha+i\alpha_v+\nu), \\ \tilde{\Phi}_v(\alpha; \bar{\omega}_v) &= i^{-\nu}G_\infty(\alpha-i\alpha_v+\nu), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где [7, 2]

$$G_\infty(\alpha) = \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2),$$

причем в силу (3.4)

$$\Gamma_\infty(\alpha; \nu) = \frac{G_\infty(\alpha+\nu)}{G_\infty(1-\alpha+\nu)}. \quad (4.5)$$

При $v = \sigma+1, \ldots, \sigma+\tau$ положим

$$\varphi_v(x) = \begin{cases} x^\nu\exp(-2\pi x\bar{x}), & \nu \geq 0, \\ \bar{x}^{|\nu|}\exp(-2\pi x\bar{x}), & \nu < 0, \end{cases}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \Phi_v(\alpha; \omega_v) &= G_{-\infty}\left(\alpha+i\alpha_v+\frac{|\nu|}{2}\right), \\ \tilde{\Phi}_v(\alpha; \bar{\omega}_v) &= i^{-\nu}G_{-\infty}\left(\alpha-i\alpha_v+\frac{|\nu|}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где [7, 2]

$$G_{-\infty}(\alpha) = (2\pi)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha),$$

причем в силу (3.7)

$$\Gamma_{-\infty}(\alpha; \nu) = \frac{G_{-\infty}(\alpha+|\nu|/2)}{G_{-\infty}(1-\alpha+|\nu|/2)}. \quad (4.7)$$

При $v \in F_V$ (т.е. $v \in F$, $v < V$) функцию φ_v возьмем в виде (3.11). Тогда в силу (3.10)

$$\Phi_v(\alpha; \omega_v) = q_v^{(\alpha+i\alpha_v-1/2)r_v}\Gamma_{q_v}(\alpha+i\alpha_v) \quad (4.8)$$

и в силу (3.1), (3.3) и (4.8)

$$\tilde{\Phi}_V(\alpha; \bar{\omega}_v) = 1. \tag{4.9}$$

При $v \in R$ функцию φ_v возьмем в виде (3.14). Тогда в силу (3.12)

$$\Phi_v(\alpha; \omega_v) = \kappa_v q_v^{(\alpha + i\alpha_v - 1/2)(r_v + \rho_v)}, \tag{4.10}$$

где $\kappa_v = \kappa(\theta_v)$ определяется равенством (3.13), и в силу (3.1), (3.3) и (4.10)

$$\tilde{\Phi}(\alpha; \bar{\omega}_v) = \theta_v(-1). \tag{4.11}$$

Подставляя выражения (4.4)–(4.11) в формулу Тейта (4.2), получим ключевую формулу (формулу Тейта) для гамма-функций

$$\prod_{v=1}^{\sigma} \Gamma_\infty(\alpha + i\alpha_v; \nu_v) \prod_{v=\sigma+1}^{\sigma+\tau} \Gamma_{-\infty}(\alpha + i\alpha_v; \nu_v) \times$$

$$\times \prod_{v \in F_V} \Gamma_{q_v}(\alpha + i\alpha_v) L_V(\alpha; \omega) =$$

$$= \kappa\omega(A)[|D|N(J)]^{1/2-\alpha} L_V(1-\alpha; \bar{\omega}), \quad V \ge V_0, \tag{4.12}$$

где

$$\kappa = \prod \kappa_v, \quad |\kappa| = 1, \tag{4.13}$$

причем $\kappa_v = i^{-\nu_v}$, $\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + \tau$, $\kappa_v = 1$, $v \in F$ и в силу (3.13)

$$\kappa_v = \theta_v(-1)\bar{\kappa}(\theta_v) =$$

$$= q_v^{\frac{r_v}{2}} \int_{|x|_v = 1} \bar{\theta}_v(x)\chi_p(\mathrm{Sp}_v(\pi_v^{r_v + \rho_v} x)) d_v x, \quad v \in R; \tag{4.14}$$

$$A = \prod \pi_v^{-\rho_v - r_v}, \quad \omega(A) = \prod q_v^{i\alpha_v(\rho_v + r_v)}; \tag{4.15}$$

$$N(J) = \prod q_v^{-\rho_v}, \quad |D| = \prod q_v^{r_v}; \tag{4.16}$$

N – норма ведущего идеала для ω и D – дискриминант поля $\mathbb{K}$.

В силу (4.3) при $\operatorname{Re}\alpha < 0$

$$\lim_{V \to \infty} L_V(1 - \alpha; \bar{\omega}) = 1, \tag{4.17}$$

и, стало быть, в силу (4.12) существует предел

$$\lim_{V \to \infty} \prod_{v \in F_V} \Gamma_{q_v}(\alpha + i\alpha_v) L_V(\alpha; \omega) =$$

$$= \operatorname{reg} \prod_{v \in F} \Gamma_{q_v}(\alpha + i\alpha_v), \tag{4.18}$$

и этот предел удовлетворяет соотношению

$$\prod_{v=1}^{\sigma} \Gamma_\infty(\alpha + i\alpha_v; \nu_v) \prod_{v=\sigma+1}^{\sigma+\tau} \Gamma_{-\infty}(\alpha + i\alpha_v; \nu_v) \times$$

$$\times \operatorname{reg} \prod_{v \in F} \Gamma_{q_v}(\alpha + i\alpha_v) = \kappa\omega(A)[|D|N(J)]^{1/2-\alpha}. \tag{4.19}$$

При $\operatorname{Re} \ge 0$ правая часть равенства (4.18) вычисляется по формуле (4.19) как аналитическое продолжение по α из области $\operatorname{Re}\alpha < 0$, определяя тем самым мероморфную функцию при всех α.

Равенство (4.19) есть *регуляризованная адельная формула для гамма-функций всех пополнений поля* $\mathbb{K}$.

Для неразветвленных характеров ($\nu_v = 0$, $\alpha_v = 0$, $\kappa = 1$, $\omega(A) = 1$, $N(J) = 1$) равенство (4.19) превращается в формулу (1.1) [1, 2].

Для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ($\sigma = 1$, $\tau = 0$, $\alpha_\infty = 0$, $r_v = 0$, $D = 1$) адельная формула (4.19) принимает вид

$$\Gamma_\infty(\alpha; \nu) \operatorname{reg} \prod_{p \in F} \Gamma_p(\alpha + i\alpha_p) = \kappa\omega(A) N^{1/2-\alpha}(J), \tag{4.20}$$

где числа ν, α_p, κ, $\omega(A)$, $N(J)$ определяются равенствами (2.6), (4.13)–(4.16). Отметим, что в силу (2.6) и (1.4) в этом случае

$$\Gamma_p(\alpha + \alpha_p) = \frac{1 - \theta(p)p^{\alpha-1}}{1 - \bar{\theta}(p)p^{-\alpha}}. \tag{4.21}$$

5. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ АДЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ БЕТА-ФУНКЦИЙ

Предположим, что ранги ρ_v, ρ_v' и ρ_v'' характеров ω_v, ω_v' и $\omega_v'' = \omega_v\omega_v'$ вида (2.2) поля $\mathbb{K}_v$ равны, $\rho_v = \rho_v' = \rho_v''$. Тогда величины $N(J)$ и $\omega(A)$ и множество F будут одинаковыми для характеров ω, ω' и $\omega'' = \omega\omega'$ поля $A^\times/\mathbb{K}^\times$.

Пользуясь ключевой формулой (4.12) и формулами (3.5), (3.8) и (1.4) и действуя, как в п. 4, для бета-функций получим регуляризованную адельную формулу

$$\prod_{v=1}^{\sigma} B_\infty(\alpha + i\alpha_v, \nu_v; \beta + i\beta_v, \mu_v) \times$$

$$\times \prod_{v=\sigma+1}^{\sigma+\tau} B_{-\infty}(\alpha + i\alpha_v, \nu_v; \beta + i\beta_v, \mu_v) \times$$

$$\times \operatorname{reg} \prod_{v \in F} B_{q_v}(\alpha + i\alpha_v, \beta + i\beta_v) = \kappa\sqrt{|D|N(J)}, \tag{5.1}$$

где

$$\kappa = \prod_{v \in R} \kappa_v \kappa'_v \kappa''_v, \quad |\kappa| = 1. \tag{5.2}$$

Для неразветвленных характеров формула (5.1) превращается в формулу (1.3) [1, 2].

Для поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ адельная формула (5.1) принимает следующий явный вид:

$$B_\infty(\alpha, \nu; \beta, \mu)\mathrm{reg}\prod_{p \in F} B_p(\alpha + i\alpha_p, \beta + i\beta_p) = \kappa\sqrt{N(J)}, \tag{5.3}$$

где в силу (2.6)

$$\theta(-1) = \theta'(-1) = 1, \quad p^{i\alpha_p} = \theta_p,$$
$$p^{i\beta_p} = \theta'(p), \quad p \in F. \tag{5.4}$$

Аналогично, более сложно, выписываются адельные формулы и для тех случаев, когда ранги характеров ω, ω' и ω'' различны.

6. ПРИМЕНЕНИЯ К АМПЛИТУДАМ ВЕНЕЦИАНО И ВИРАСОРО–ШАПИРО И ИХ ОБОБЩЕНИЯМ

Принимая во внимание симметрию бета-функции B_∞ (см. п. 3), наряду с кроссинг-симметричной амплитудой Венециано

$$V(s, t, u) = B_\infty(-1 - s/2, 0; -1 - t/2, 0),$$
$$s + t + u = -8, \tag{6.1}$$

введем 3-векторную амплитуду

$$V(s, \nu; t, \mu; u, \eta) = B_\infty(-1 - s/2, \nu; -1 - t/2, \mu) \tag{6.2}$$

при $(\nu, \mu, \eta) = (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$, составляющие которой переставляются при перестановках точек (s, ν), (t, μ), (u, η) на многообразии

$$s + t + u = -8, \quad (s, t, u) \in \mathbb{C}^3,$$
$$\nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in F_2^3 \tag{6.3}$$

и выражаются через одну из них.

Аналогично, для бета-функции $B_{-\infty}$ (см. п. 3) введем бесконечное число новых амплитуд

$$V_-(s, \nu; t, \mu; u, \eta) = B_{-\infty}(-1 - s/8, \nu; -1 - t/8, \mu) \tag{6.4}$$

на многообразии

$$s + t + u = -32, \quad (s, t, u) \in \mathbb{C}^3,$$
$$\nu + \mu + \eta = 0, \quad (\nu, \mu, \eta) \in Z^3. \tag{6.5}$$

При $\nu = \mu = \eta = 0$ формула (6.4) дает кроссинг-симметричную амплитуду Вирасоро–Шапиро

$$V_-(s, t, u) = V_-(s, o; t, 0; u, 0) =$$
$$= B_{-\infty}(-1 - s/8, 0; -1 - t/8, 0), \tag{6.6}$$
$$s + t + u = -32.$$

Остальные амплитуды (6.4) разбиваются на бесконечное число 3-векторных (с индексами (ν, ν, η), (ν, η, ν), (η, ν, ν)) и 6-векторных (с индексами – шестью перестановками различных целых чисел ν, μ, η) амплитуд, составляющие которых переставляются при перестановках точек (s, ν), (t, μ), (u, η) на многообразии (6.5) и выражаются через одну из них.

Аналогично вводятся через бета-функцию B_q струнные амплитуды [2].

Адельные формулы, связывающие амплитуды (6.2) и (6.4) со струнными амплитудами, легко выписываются на основе адельной формулы (5.1) для бета-функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93–011–140) и Международного научного фонда и Российского правительства (грант № JJ11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vladimirov V.S., Sapuzhak T.M.* // Lett. Math. Phys. 1995 (in press).
2. *Владимиров В.С.* // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60. № 1.
3. *Vladimirov V.S.* // Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. P. 123–131.
4. *Владимиров В.С.* // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 3–38.
5. *Freund P.G.O., Witten E.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 199. № 2. P. 191–194.
6. *Volovich I.V.* // Lett. Math. Phys. 1988. V. 16. P. 61–67.
7. *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972. 408 с.
8. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985. 503 с.
9. *Ленг С.* Алгебраические числа. М.: Мир, 1966. 225 с.
10. *Schikhof W.H.* Ultrametric Calculus. An Introduction to *p*-Adic Analysis. Cambridge Univ. Press, 1984. XI + 306 p.
11. *Коблиц Н.* *p*-Адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982. 192 с.
12. *Гельфанд И.М., Граев М.М., Пятецкий-Шапиро И.И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966. 512 с.
13. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* *p*-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994. 352 с.
14. *Khrennikov A.* *p*-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Kluver Acad. Publ. 1994. XIV + 264 p.