УДК 514.754+514.764.3

НОРМАЛЬНАЯ СВЯЗНОСТЬ В ГЕОМЕТРИИ ОСНАЩЕННЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

А. В. Чакмазян

ВВЕДЕНИЕ

Понятие нормальной связности подмногообразия M_m риманова многообразия M_n ввел Э. Картан в своих лекциях в Сорбонне в 1926—1927 гг. (см. [8]). Подмногообразия с плоской нормальной связностью в евклидовом пространстве исследовали и почти одновременно Д. И. Перепелкин [15], [16] и Фабрициус-Бьерре [25], а также Э. Картан. Итоги исследований этих первых работ подведены в монографии Чена [24].

Нормальная связность снова привлекла внимание в связи с исследованиями подмногообразий M_m с параллельным полем вектора средней кривизны в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$. Одним из дополнительных условий, наряду с другими (полнота, компактность, неотрицательность секционной кривизны, постоянство скалярной кривизны и др.), являлось условие, чтобы нормальная связность была плоская. Обзор исследований этого направления дан в [10], [11].

Понятие нормальной связности нормализованного подмногообразия M_m в проективном пространстве P_n ввели в 1976 г. независимо А. П. Норден [13] и автор [17]. Итоги исследований локального строения подмногообразия M_m в P_n с помощью нормальной связности даны в обзоре [19]. В настоящей работе излагаются результаты, относящиеся к изучению строения оснащенного подмногообразия M_m в аффинном пространстве A_n с помощью нормальной связности.

§ 1. ОБ ОСНАЩЕНИЯХ С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ ЦЕНТРОАФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n и присоединим к текущей его точке x подвижной репер $\{x, e_I\}$, I, K, $L=1,\dots,n$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера имеют вид:

$$dx=\omega^I e_I, \quad de_I=\omega_I^K e_K, \tag{1}$$

где ω^I, ω_I^K — линейные формы от дифференциалов параметров. Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к структурным уравнениям для форм ω^I и ω_I^K:

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I, \quad d\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K. \tag{2}$$

Пусть в A_n задано m-мерное гладкое подмногообразие M_m, оснащенное при помощи гладкого поля $(n-m)$-мерных нормальных плоскостей (нормалей первого рода [13]), дополняющих касательные плоскости до всего A_n. На M_m возникает его касательное и нормальное векторные расслоения $T(M_m)$ и $N(M_m)$. Если к текущей точке x подмногообразия M_m присоединить подвижной репер 1-го порядка, то уравнения его инфинитезимального перемещения примут вид:

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha, \quad de_\alpha = \omega_\alpha^i e_i + \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad (\omega^\alpha = 0), \tag{3}$$
$$i, j, k = 1, \ldots, m, \quad \alpha, \beta, \gamma = m+1, \ldots, n.$$

Подмногообразие M_m в A_n определяется при этом системой уравнений

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \tag{4}$$

Пусть слой нормального расслоения $N(M_m)$ определяется векторами

$$\tilde{e}_\alpha = e_\alpha + N_\alpha^i e_i.$$

Величины N_α^i представляют собой компоненты объекта, который, следуя Г. Ф. Лаптеву [9], будем называть объектом оснащения. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям [9]

$$dN_\alpha^i + N_\alpha^j \omega_j^i - N_\beta^i \omega_\alpha^\beta + \omega_\alpha^i = C_{\alpha j}^i \omega^j. \tag{5}$$

Частичная канонизация репера, при которой векторы e_α помещаются в слой нормального расслоения $N(M_m)$, приводит к обращению в нуль компонент объекта $\{N_\alpha^i\}$, и уравнения (5) принимают вид:

$$\omega_\alpha^i = C_{\alpha j}^i \omega^j. \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (4) и (6) и применяя лемму Картана, получаем

$$db_{ij}^\alpha - b_{kj}^\alpha \omega_i^k - b_{ik}^\alpha \omega_j^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad b_{ijk}^\alpha = b_{ikj}^\alpha,$$
$$dC_{\alpha j}^i - C_{\alpha k}^i \omega_j^k - C_{\beta j}^i \omega_\alpha^\beta + C_{\alpha j}^k \omega_k^i = C_{\alpha jk}^i \omega^k, \quad C_{\alpha jk}^i = C_{\alpha kj}^i.$$

Отсюда следует, что b_{ij}^α, $C_{\alpha j}^i$ — тензоры на M_m. Тензор b_{ij}^α называется вторым фундаментальным тензором оснащенного подмногообразия $M_m \subset A_n$. Если учесть (2), (4) и (6), то структурные уравнения касательного расслоения $T(M_m)$ и нормального расслоения $N(M_m)$ для подмногообразия M_m примут следующий вид:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{7}$$

$$d\omega_j^i = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \frac{1}{2} R^j_{ikl} \omega^k \wedge \omega^l, \tag{8}$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha kl} \omega^k \wedge \omega^l, \tag{9}$$

где

$$R^i_{jkl} = 2b^\alpha_{j[k} C^i_{|\alpha|l]}, \tag{10}$$

$$R^\beta_{\alpha kl} = 2b^\beta_{i[k} C^i_{|\alpha|l]}. \tag{11}$$

Из уравнений (8), (9) следует, что 2-формы

$$\Omega_i^j \equiv d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad \Omega_\alpha^\beta \equiv d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

являются полубазовыми (т. е. выражаются только через произведения $\omega^h \wedge \omega^l$) на $T(M_m)$ и $N(M_m)$. В силу теоремы Картана—Лаптева [14], в касательном расслоении $T(M_m)$ возникает аффинная связность без кручения с формами связности ω^i, ω_j^i и 2-формами кривизны Ω_i^j, а в нормальном расслоении $N(M_m)$ — центроаффинная связность с формами связности ω_α^β и 2-формами кривизны Ω_α^β. Эту последнюю связность в дальнейшем будем называть нормальной центроаффинной связностью оснащенного подмногообразия.

Векторные пространства $T_x(M_m)$ и $N_x(M_m)$ также будем рассматривать как центроаффинные плоскости с центром в точке $x \in M_m$. Горизонтальное распределение Γ_m, которое индуцирует центроаффинную связность в $N(M_m)$, получается присоединением к точке $y \in N_x(M_m)$ m-мерной плоскости, проходящей через эту точку y и параллельной касательной плоскости $T_x(M_m)$.

Найдем систему форм Пфаффа, которая определяет горизонтальное распределение Γ_m. Точка $y \in N_x(M_m)$ задается радиусом-вектором $y = x + \xi^\alpha e_\alpha$. При этом

$$dy = (\delta_j^i + \xi^\beta C^i_{\beta j}) \omega^j e_i + \theta^\alpha e_\alpha, \tag{12}$$

где $\theta^\alpha = d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha$ составляют ковариантный дифференциал нормального векторного поля ξ в нормальной связности $\nabla^\perp$, т. е. $\theta^\alpha = \nabla^\perp \xi^\alpha$. Отсюда ясно, что горизонтальное распределение определяется как аннулятор инвариантной системы форм θ^α. Рассмотрим поле точек $y(x) \in N_x(M_m)$, заданное вдоль некоторой линии $x = x(t)$ на оснащенном подмногообразии M_m.

Говорят, что поле точек $y(x)$ параллельно, если направление смещения dy принадлежит горизонтальному распределению Γ_m (ср. [20]). Из (12) следует, что при параллельном перенесении удовлетворяется система уравнений Пфаффа

$$\theta^\alpha = d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha = 0.$$

Определение. Нормальная центроаффинная связность в нормальном расслоении $N(M_m)$ подмногообразия M_m называется локально плоской, если параллельный перенос любой точки $y(x) \in N_x(M_m)$ относительно этой связности не зависит от пути $x=x(t)$, соединяющего две произвольно заданные точки в некоторых областях на M_m. В силу известной теоремы (см. [12]), для горизонтального распределения Γ_m нормальной центроаффинной связности справедлива

Теорема 1. Для того чтобы нормальная центроаффинная связность в нормальном расслоении $N(M_m)$ была локально плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение Γ_m было инволютивным.

Доказательство. Простые вычисления показывают, что

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \xi^\beta \Omega_\beta^\alpha.$$

Отсюда следует, что система форм θ^α будет вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда $\Omega_\beta^\alpha = 0$. Таким образом, для того чтобы нормальная центроаффинная связность в расслоениях $N(M_m)$ была локально плоской, необходимо и достаточно обращение в нуль форм кривизны $\Omega_\beta^\alpha = 0$, или, что равносильно, компонент тензора кривизны: $R_{\beta ij}^\alpha = 0$.

2. Поставим следующий вопрос: возможно ли к произвольному подмногообразию $M_m \subset A_n$ присоединить оснащение так, чтобы индуцируемая им нормальная связность была плоской и если да, то каково должно быть строение этого оснащения?

Оснащение подмногообразия M_m в A_n называется параллельным (или тривиальным: см. [6]), если оснащающие плоскости $N(x)$ во всех точках подмногообразия M_m параллельны некоторой постоянной плоскости Π_{n-m}.

Теорема 2. Если подмногообразие M_m в A_n оснащено параллельно, то индуцируемые нормальная центроаффинная связность и внутренняя (тангенциальная) связность плоские.

Доказательство. Из условия параллельности оснащения следует, что

$$e_\alpha = \psi_\alpha^\beta a_\beta,$$

где $a_{m+1}, \ldots, a_n$ — постоянные линейно независимые векторы, принадлежащие Π_{n-m}. Отсюда $de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta$, где $\omega_\alpha^\beta = d\psi_\alpha^\gamma \psi_\gamma^{-1\beta}$, и, сравнивая это равенство с (1), получим $\omega_\alpha^i = 0$, в силу чего $C_{\alpha j}^i = 0$. Поэтому из (10) и (11) следует:

$$R_{\beta ij}^\alpha = 0, \quad R_{jkl}^i = 0.$$

Это и означает справедливость утверждения.

Оснащение подмногообразия M_m в A_n называется осевым (см. [6]), если все оснащающие $(n-m)$-плоскости составляют пучок с $(n-m-1)$-мерной осью Π_{n-m-1}.

Легко заметить, что параллельное оснащение есть предельное по отношению к осевому. В случае гиперповерхности оснащение будет осевым, если все оснащающие прямые проходят через одну и ту же точку. В этом случае оснащение называется центральным [6]. Клингенберг [26] ввел понятие многомерной аффинной сферы как такой m-мерной поверхности, у которой инвариантно оснащающие ее плоскости (аффинные нормали) образуют пучок с $(n-m-1)$-мерной осью, т. е. задают осевое оснащение.

Теорема 3 ([22]). Осевое оснащение подмногообразия M_m в A_n индуцирует плоскую нормальную связность.

Назовем оснащенное подмногообразие M_m в A_n подмногообразием общего типа, если существуют 2 набора элементов $\lambda_\alpha{}^a$ $(a=1, 2)$ таких, что матрицы $\lambda_\alpha{}^a b_{ij}{}^\alpha$ одновременно приводятся к диагональному виду и имеют попарно непропорциональные собственные значения. Имеет место следующая теорема, в некотором смысле обратная к теореме 3.

Теорема 4 ([22]). Если оснащенное подмногообразие M_m в A_n общего типа не имеет попарно сопряженных направлений, то всякое оснащение, определяющее на нем плоскую нормальную связность, является осевым.

3. Рассмотрим частный случай тангенциально невырожденной гиперповерхности M_{n-1} в A_n.

Пусть задана оснащенная гиперповерхность M_{n-1} в A_n. Тогда в силу (4), (6)

$$\omega_i^n = b_{ij}\omega^j, \quad b_{ij}=b_{ji}, \quad b_{ij}=b_{ji}^n, \quad \det\|b_{ij}\|\neq 0, \tag{13}$$

$$\omega_n^i = C_{nj}^i\omega^j,$$

а (10) и (11) сводятся к

$$R_{jkl}^i = 2b_{j[k}C_{|n|l]}^i, \quad R_{nkl}^n = 2C_{n[k}^i b_{|i|l]},$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n-1$.

Последовательные продолжения системы (13) приводят к системе дифференциальных уравнений [5]

$$\nabla b_{ij} + b_{ij}\omega_n^n = b_{ijk}\omega^k, \tag{14}$$

$$\nabla b_{ijk} + b_{ijk}\omega_n^n = \left[3b_{(ij}b_{k)p}C_{nl}^p + b_{ijkl}\right]\omega^l, \tag{15}$$

где b_{ijk}, b_{ijkl} симметричны по всем индексам.

Пусть $\det\|b_{ij}\|\neq 0$, т. е. гиперповерхность M_{n-1} тангенциально невырожденая. Тогда существует тензор b^{ij}, обратный к b_{ij}:

$$b^{ij}b_{jk} = \delta_k{}^i, \tag{16}$$

где $\delta_k{}^i$ — символ Кронекера. Если продифференцировать (16) и учесть (14), то получим

$$\nabla b^{ij} - b^{ij}\omega_n^n = b^{ip}b^{jq}b_{pqk}\omega^k. \tag{17}$$

Пусть

$$b_k=\frac{1}{n-1}b^{ij}b_{ijk}.$$

В силу (15) и (17), имеем

$$\nabla b_k=\frac{n+1}{n-1}\left(b_{kp}C^p_{nl}+B_{kl}\right)\omega^l,$$

где

$$B_{kl}=\frac{1}{n-1}(b^{ij}b_{ijkl}-b^{ip}b^{jq}b_{ijk}b_{pql}),\quad B_{kl}=B_{lk}.$$

Вектор

$$e=e_n-\frac{n-1}{n+1}b^le_l \tag{18}$$

определяет оснащение, инвариантным образом присоединенное к тангенциально невырожденной гиперповерхности M_{n-1} в A_n (см., например, [5]), где $b^i=b^{ij}b_j$, а e_n — вектор произвольного оснащения. Нормаль, определяемая вектором (18), называется аффинной нормалью гиперповерхности или нормалью Бляшке. Она определяется в дифференциальной окрестности третьего порядка точки гиперповерхности. Гиперповерхность, у которой оснащение аффинной нормалью является центральным, называется аффинной гиперсферой (см. [23, с. 214]). Примером аффинной гиперсферы является поверхность второго порядка.

Для нормальной связности имеет место следующая

Теорема 5 ([18]). *Если гиперповерхность M_{n-1} в A_n оснащена полем аффинных нормалей Бляшке, то индуцируемая нормальная аффинная связность является плоской, а внутренняя (тангенциальная) связность эквиаффинной.*

4. Покажем далее, что среди подмногообразий, несущих сеть сопряженных линий, существуют подмногообразия, допускающие оснащения с плоской нормальной связностью, не являющиеся осевыми.

Рассмотрим подмногообразие $M_m\subset A_n$, несущее сеть сопряженных линий и допускающее оснащение с помощью семейства нормалей Фосса [3]. Выберем репер на M_m так, чтобы i-я линия его сопряженной сети определялась уравнениями $\omega^h=0$, $k\neq i$. В этом репере основные уравнения подмногообразия M_m запишутся в виде

$$\omega^\alpha=0,\quad \omega^\alpha_i=b^\alpha_i\omega^i,\quad b^\alpha_i=b^\alpha_{ii},\quad \omega^i_j=\sum_k d^i_{jk}\omega^k,\quad i\neq j,$$

причем в последних уравнениях и всюду в этом пункте суммирование по индексам i, j, k, α мы будем производить только тогда, когда на это указывает знак Σ. Предположим, что сопряженная сеть на M_m голономна. В этом случае разложения форм ω_j^i по базисным формам ω^i имеют вид [7]:

$$\omega^i_j = d^i_{ji}\omega^i + d^i_{jj}\omega^j, \quad i \neq j.$$

Векторы $\widetilde{b}_i = b_i^\alpha e_\alpha$ определяют вместе с векторами e_i соприкасающуюся плоскость $T_x^{(2)}(M_m)$ подмногообразия M_m; ее размерность равна $m+m_1$, где $m_1 \leqslant m$. Поместим векторы e_{m+i_1} $(i_1, j_1, k_1 = m+1, \ldots, m+m_1)$ репера в эту соприкасающуюся плоскость, а векторы e_{α_1} $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = m+m_1+1, \ldots, n)$ вне ее. Тогда $\widetilde{b}_i = \sum\limits_{i_1} b_i^{m+i_1} e_{m+i_1}$ и матрица компонент этих векторов принимает вид

$$\left\| \begin{matrix} b_1^{m+1} & b_2^{m+1} & \ldots & b_m^{m+1} \\ b_1^{m+2} & b_2^{m+2} & \ldots & b_m^{m+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{m+m_1} & b_2^{m+m_1} & \ldots & b_m^{m+m_1} \end{matrix} \right\|. \qquad (19)$$

Ранг этой матрицы равен m_1. Как известно [2], матрица (19) достаточно полно характеризует строение подмногообразия M_m.

В [2] доказано, что если $m_1 < m$ и ранг каждой подсистемы векторов $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_m$, состоящий из $m-1$ векторов, равен m_1, то подмногообразие M_m целиком лежит в своей соприкасающейся $(m+m_1)$-плоскости $T_x^{(2)}(M_m)$.

Если в этом случае удовлетворено и (19), то будем говорить о подмногообразии M_m с сопряженной сетью типа A.

Плоскость $N^{m_1}(x)$, проходящая через точку $x \in M_m$, лежащая в соприкасающейся плоскости $T_x^{(2)}(M_m)$ и имеющая с касательной плоскостью $T_x(M_m)$ только одну общую точку x, называется нормалью Фосса [3], если все двумерные соприкасающиеся плоскости сопряженных линий подмногообразия M_m, проходящих через точку x, пересекают плоскость $N^{m_1}(x)$ по прямым линиям. Имеет место следующая

Теорема 6 ([22]). Пусть M_m — гладкое подмногообразие в A_n, несущее сопряженную сеть типа A, гладко оснащенное полем нормалей Фосса $N^{m_1}(M_m)$. Если $m \geqslant 3$, $m_1 < m-1$ и в системе векторов $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_m$ ранг каждой подсистемы, состоящей из $m-2$ векторов, совпадает с рангом всей системы, то аффинная связность в нормальном расслоении, определяемом полем нормалей Фосса $N^{m_1}(M_m)$, является плоской. В [3] доказано, что в общем случае фокусная поверхность конгруэнции нормалей Фосса подмногообразия M_m распадается на m (m_1-1)-мерных плоскостей. Это означает, что оснащение подмногообразия M_m нормалью Фосса N^{m_1} не будет осевым.

§ 2. ОСНАЩЕННОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОЛЕМ p-МЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

1. Рассмотрим грассманово расслоение p-мерных подпространств в слоях нормального расслоения $N(M_m)$. Гладкое сечение этого грассманова расслоения называется полем нормальных p-направлений ν_p на M_m. Это поле определяет нормальное подрасслоение $N^p(M_m)$, p-мерными слоями которого являются p-мерные центроаффинные подпространства $N^p(x)$, $x \in M_m$.

Плоскость $N^p(x)$ этого поля, соответствующую произвольной фиксированной точке $x \in M_m$, можно определить этой точкой x и векторами $\tilde{e}_\pi$ $(\pi, \rho, \sigma = m+1, \ldots, m+p)$, заданными с помощью следующих разложений:

$$\tilde{e}_\pi = \xi^\alpha_\pi e_\alpha. \tag{1}$$

Система уравнений, выражающих условие инвариантности p-мерной плоскости $N^p(x)$ относительно преобразований репера в $N_x(M_m)$, имеет следующий вид:

$$d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta - \tilde{\theta}^\rho_\pi \xi^\alpha_\rho = 0 \ (\mathrm{mod}\ _j\omega^i),$$

где $\tilde{\theta}^\rho_\pi$ — некоторые линейные формы. Поэтому дифференциальные уравнения поля p-мерных плоскостей $N^p(M_m)$ в расслоении $N(M_m)$ имеют вид

$$d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta - \tilde{\theta}^\rho_\pi \xi^\alpha_\rho = \xi^\alpha_{\pi j} \omega^j. \tag{2}$$

Векторы $\tilde{e}_\pi$ в $N^p(x)$ можно выбрать так, чтобы $\xi^\rho_\pi = \delta^\rho_\pi$, т. е. чтобы $\tilde{e}_\pi = e_\pi + \xi^a_\pi e_a$, где $a, b, c = m+p+1, \ldots, n$.

Тогда уравнения поля запишутся в следующем виде

$$d\xi^a_\pi + \xi^b_\pi \omega^a_b - \xi^a_\rho \omega^\rho_\pi + \omega^a_\pi - \xi^a_\rho \xi^b_\pi \omega^\rho_b = (\xi^a_{\pi j} - \xi^a_\rho \xi^\rho_{\pi j})\ \omega^j. \tag{3}$$

Определение. Поле ν_p называется параллельным, если при любом инфинитезимальном перемещении произвольной точки x в M_m смещение p-мерного направления ν_p происходит в $(m+p)$-мерной плоскости, натянутой на касательную плоскость $T_x(M_m)$ и на это направление $\nu_p(x)$ (ср. [24, с. 180]).

Найдем аналитическое условие, при котором нормальное поле p-мерных направлений ν_p будет параллельным. Любой вектор ξ, принадлежащий $\nu_p(x)$, можно представить в виде

$$\xi = \xi^\pi \tilde{e}_\pi. \tag{4}$$

Если продифференцировать (4) и учесть (1.4), то получим

$$d\xi = d\xi^\pi \tilde{e}_\pi + \xi^\pi \xi^\alpha_\pi \omega^i_\alpha e_i + \xi^\pi (d\xi^\alpha_\pi + \xi^\beta_\pi \omega^\alpha_\beta)\ e_\alpha.$$

По определению поле ν_p является параллельным тогда и только тогда, когда

$$(d\xi_\pi^\alpha+\xi_\pi^\beta\omega_\beta^\alpha)e_\alpha=\hat{\theta}_\pi^\rho\tilde{e}_\rho.$$

Отсюда, в силу (1),

$$d\xi_\pi^\alpha+\xi_\pi^\beta\omega_\beta^\alpha=\hat{\theta}_\pi^\rho\xi_\rho^\alpha. \tag{5}$$

Подмногообразие M_m в A_n называется тангенционально вырожденным ранга r, если его касательная плоскость зависит от r параметров, $r<m$. Такое подмногообразие состоит из $(m-r)$-мерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная плоскость не меняется [1].

Теорема 7 ([18]). Для того чтобы поле ν_p нормальных p-мерных направлений на оснащенном подмногообразии M_m в A_n было параллельным, необходимо и достаточно, чтобы все плоскости $N^p(x)$, $x\in M_m$, образовали тангенционально вырожденное подмногообразие V_{m+p} пространства A_n размерности $m+p$ ранга m.

Рассмотрим подрасслоение $N^p(M_m)$, определяемое параллельным полем нормальных p-мерных направлений ν_p. Каждый слой $N^p(x)$ этого подрасслоения представляет собой p-мерную центроаффинную плоскость, на которой векторы $\tilde{e}_\pi$ вместе с точкой x составляют аффинный репер. При этом

$$d\tilde{e}_\pi=\varphi_\pi^\rho\tilde{e}_\rho+\varphi_\pi^a e_a+\varphi_\pi^i e_i. \tag{6}$$

Так как $\tilde{e}_\pi=\xi_\pi^\alpha e_\alpha$, то, в силу (1.1) и (5),

$$d\tilde{e}_\pi=\xi_\pi^\alpha\omega_\alpha^i e_i+\hat{\theta}_\pi^\rho e_\rho.$$

Сравнивая последнее равенство с (6), получим

$$\varphi_\pi^\rho=\hat{\theta}_\pi^\rho,\quad \varphi_\pi^a=0,\quad \varphi_\pi^i=\xi_\pi^\alpha C_{\alpha j}^i\omega^j. \tag{7}$$

Составим следующие 2-формы $\Phi_\pi^\rho=d\varphi_\pi^\rho-\varphi_\pi^\sigma\wedge\varphi_\sigma^\rho$, которые, в силу (7), примут вид

$$\Phi_\pi^\rho=d\hat{\theta}_\pi^\rho-\hat{\theta}_\pi^\sigma\wedge\hat{\theta}_\sigma^\rho. \tag{8}$$

Имеет место следующая

Теорема 8 ([21]). В подрасслоении $N^p(M_m)$, определяемом параллельным полем ν_p нормальных p-мерных направлений, индуцируется центроаффинная связность. Формы (8) являются 2-формами кривизны этой связности. Горизонтальное распределение Γ_m, которое индуцирует центроаффинную связность в $N^p(M_m)$, получается присоединением к точке $y=(x+\xi^\pi\tilde{e}_\pi)\in N^p(x)$ m-мерной плоскости, проходящей через эту точку y параллельной касательной плоскости $T_x(M_m)$.

Теорема 9 ([21]). Для того чтобы нормальная центроаффинная связность в нормальном аффинном подрасслоении

$N^p(M_m)$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение Γ_m было инволютивным.

Далее рассмотрим оснащенное подмногообразие M_m, допускающее параллельное поле нормальных p-направлений ν_p с плоской нормальной связностью в $N^p(M_m)$. Специализируем репер в $N_x(M_m)$ так, чтобы его векторы e_π принадлежали инвариантной p-мерной плоскости $N^p(x)$. Тогда $\xi^a_\pi=0$ и уравнения поля (3) примут вид $\omega^a_\pi=\xi^a_{\pi k}\omega^k$. Если в условие (5) параллельности поля нормальных p-направлений ν_p подставить $\xi^a_\pi=0$, $\xi^\rho_\pi=\delta^\rho_\pi$, то они примут вид

$$\omega^a_\pi=0. \tag{9}$$

При этом $\hat{\theta}^\pi_\rho=\omega^\pi_\rho$. Из (1.2), в силу (9), (1.4), (1.6), находим:

$$C^l_{\rho|k}b^a_{l|i}=0. \tag{10}$$

Легко заметить, что в этом репере условия плоскостности нормальной центроаффинной связности в $N^p(M_m)$ имеют вид:

$$C^l_{\rho|k}b^\pi_{l|i}=0.$$

Объединение последнего соотношения с (10) дает

$$C^l_{\rho[k}b^\alpha_{e]i}=0. \tag{11}$$

Определение. Пучок $\tilde{C}_j{}^i=\xi^\rho C_{\rho j}{}^i$ в подрасслоении $N^p(M_m)$ называется простым, если на M_m существует нормальное векторное поле $\xi_0 \in \nu_p$, для которого аффинор $\tilde{C}_j{}^i(\xi_0)$ имеет простую структуру, т. е. его матрица приводима к диагональному виду.

Пусть $\tilde{C}^l_j(\xi_0)$ имеет s собственных значений с кратностями $p_1, \ldots, p_s$ $(p_1+\ldots+p_s=m)$ соответственно. Имеет место следующая

Теорема 10 ([21]). Пусть оснащенное подмногообразие M_m в A_n допускает параллельное поле нормальных p-направлений ν_p с плоской нормальной связностью в подрасслоении $N^p(M_m)$ и пусть пучок $\xi^\rho C^l_{\rho j}$ является простым, т. е. содержит $\tilde{C}^l_j(\xi_0)$ простой структуры. Тогда подмногообразие M_m несет сопряженную систему распределений размерностей $p_1, \ldots, p_s$ $(p_1+p_2+\ldots$ $\ldots+p_s=m)$, совпадающих с кратностями собственных значений аффинора $\tilde{C}^l_j(\xi_0)$.

2. Рассмотрим специальный случай, когда $p=1$, т. е. когда подмногообразие M_m допускает параллельное поле одномерных нормальных направлений ν_1.

Дифференциальные уравнения геометрического объекта, определяющего поле одномерных нормальных ν_1 в $N(M_m)$, можно получить из (2), если в нем положить $\pi, \rho=1$. Оно имеет следующий вид

$$d\xi_1^\alpha + \xi_1^\beta \omega_\beta^\alpha - \tilde{\theta}_1^1 \xi_1^\alpha = \xi_{ij}^\alpha \omega^j.$$

Тогда из (5) получим аналитическое условие, определяющее параллельное поле одномерных нормальных направлений в следующем виде

$$d\xi_1^\alpha + \xi_1^\beta \omega_\beta^\alpha = \hat{\theta}_1^1 \xi_1^\alpha. \tag{12}$$

Из теоремы 1 в случае $p=1$ следует: в расслоении $N^1(M_m)$, определенном параллельным полем нормальных направлений ν_1, индуцируется центроаффинная связность. Из (8) для 2-форм кривизны индуцируемой центроаффинной связности (см. теорему 8) получим выражение

$$\Phi_1^1 = d\hat{\theta}_1^1.$$

Рассмотрим оснащенное подмногообразие M_m аффинного пространства A_n, с параллельным полем нормальных одномерных направлений ν_1 и с плоской нормальной связностью в расслоении $N^1(M_m)$.

Условием, определяющим плоскую нормальную центроаффинную связность в расслоении $N^1(M_m)$, будет $\Phi_1{}^1=0$, т. е.

$$d\hat{\theta}_1^1 = 0.$$

Отсюда следует, что в случае плоской связности в $N^1(M_m)$ форма $\hat{\theta}_1^1$ локально является полным дифференциалом, и вектор $\xi = \xi_1^\alpha e_\alpha$, определяющий направление поля ν_1, можно пронормировать так, чтобы $\hat{\theta}_1^1=0$. После этого уравнения (12) примут вид

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$d\xi = \nabla^\perp \xi + \xi^\alpha \omega_\alpha^i e_i,$$

где

$$\nabla^\perp \xi = \nabla^\perp \xi^\alpha e_\alpha = (d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha) e_\alpha$$

представляет собой ковариантный дифференциал векторного поля в нормальной связности оснащенного подмногообразия M_m в A_n. Поле ξ называется параллельным векторным полем [4], если $\nabla^1 \xi = 0$. Сравнение с (13) показывает, что параллельное поле одномерных нормальных направлений ν_1 с плоской нормальной связностью в $N^1(M_m)$ определяет параллельное нормальное векторное поле на M_m, и наоборот.

3. Пусть M_m является оснащенным подмногообразием в A_n и пусть подмногообразие M'_m пересекает его произвольную нормальную плоскость $N(x)$ в точке x'. Подмногообразие M'_m называется параллельным к M_m, если касательные плоскости $T_x(M_m)$ и $T_{x'}(M'_m)$ во всех соответствующих точках x и x' параллельны.

Теорема 11 ([4]). Оснащенное подмногообразие M_m аффинного пространства A_n допускает параллельное поле одномерных направлений ν_1 с плоской нормальной связностью в расслоении $N^1(M_m)$ тогда и только тогда, когда существует параллельное ему подмногообразие M_m'. Введем тензор

$$C_j^i = \xi^\beta C_{\beta j}^i$$

и назовем его основным аффинором нормального векторного поля ξ на оснащенном подмногообразии M_m. Из теоремы 7 следует, что совокупность прямых $N^1(x)$, проходящих через точки $x \in M_m$ в направлениях векторов параллельного нормального векторного поля ξ, образует тангенциально вырожденное подмногообразие V_{m+1} размерности $m+1$ ранга m. Найдем фокусы образующей $N^1(x)$ этого подмногообразия V_{m+1}. Точка

$$y = x + \lambda\xi$$

будет фокусом образующей $N^1(x)$, если вектор dy параллелен вектору ξ [1]. Легко установить, что для фокусов имеют место уравнения

$$(\delta_j^i + \lambda C_j^i)\,\omega^j = 0,$$

где основной аффинор C_j^i построен для рассматриваемого параллельного векторного поля ξ. Положим в этих уравнениях $\lambda = -\dfrac{1}{\mu}$. Тогда они перепишутся в виде

$$(C_j^i - \mu\delta_j^i)\,\omega^j = 0.$$

Значения параметров μ, определяющие фокусы на образующей, находятся из уравнения

$$\det(C_j^i - \mu\delta_j^i) = 0,$$

которое представляет собой характеристическое уравнение аффинора C_j^i. Образующая $N^1(x)$ несет столько различных фокусов, сколько различных собственных значений имеет аффинор C_j^i.

Теорема 12 ([4]). Пусть оснащенное подмногообразие M_m в A_n допускает параллельное нормальное векторное поле ξ и пусть основной аффинор поля ξ является простым. Тогда подмногообразие M_m несет голономную сопряженную систему распределений размерностей $p_1, \ldots, p_s$ $(p_1 + \ldots + p_s = m)$, совпадающих с кратностями собственных значений аффинора C_j^i.

§ 3. ГЕОМЕТРИЯ ОСНАЩЕННОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

1. В § 1 рассматривалось оснащение подмногообразия M_m в A_n, которое индуцирует плоскую нормальную связность. Рассмотрим теперь более подробно локальное строение оснащен-

ных подмногообразий M_m с плоской нормальной связностью в A_n.

Условие того, чтобы связность в нормальном расслоении была плоской, геометрически означает, что результат параллельного переноса любого нормального вектора не зависит от пути на подмногообразии M_m.

Теорема 13 ([18]). Для того чтобы нормальная аффинная связность оснащенного подмногообразия M_m была плоской, необходимо и достаточно, чтобы подмногообразие M_m допускало $(n-m)$-параметрическое семейство параллельных подмногообразий.

Из того, что в предположениях теоремы 1 система (2.13) вполне интегрируема, следует, что нормальное векторное поле на M_m, векторы которого соединяют соответствующие точки параллельных подмногообразий M_m и M_m', является параллельным в нормальной связности. Следовательно, если нормальная связность плоская, то произвольный вектор пространства $N_x(M_m)$ можно включить в параллельное векторное поле.

Отметим следующий результат, который тесно связан с теоремой 10 и получается из нее, если в ней положить $p=n-m$.

Теорема 14 ([18]). Пусть оснащенное подмногообразие M_m в A_n обладает плоской нормальной аффинной связностью и пусть пучок основных аффиноров оснащения простой. Тогда подмногообразие M_m несет сопряженную систему распределений размерностей $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(p_1+p_2+\ldots+p_s=m)$, совпадающих с кратностями собственных значений аффинора $C_j^i(\lambda_0)$, где $\lambda_0=\lambda_0^\alpha e_\alpha$.

Теорема 15 ([18]). Если оснащенное подмногообразие M_m аффинного пространства A_n обладает плоской нормальной связностью, то индуцируемая этим оснащением внутренняя геометрия M_m будет эквиаффинной.

2. Пусть M_{n-1} является оснащенной гиперповерхностью в A_n. Нормали образуют тогда конгруэнцию, фокусы которой находятся из условия

$$dy=\lambda e_n,$$

где $y=x+\rho e_n$ — радиус-вектор произвольной точки нормали, определяемой вектором e_n. Для определения фокусов и фокальных направлений этой конгруэнции получим систему уравнений

$$\left(\delta_j^i+\rho C_j^i\right)\omega^j=0, \quad i, j=1,\ldots,n-1,$$

где

$$\det\left(\delta_j^i+\rho C_j^i\right)=0.$$

Если конгруэнция нормалей имеет $n-1$ различных фокусов на каждой нормали, то через каждую прямую этой конгруэнции проходит $n-1$ развертывающихся поверхностей. Эти развертывающиеся поверхности пересекают гиперповерхность M_{n-1} по линиям, называемым линиями кривизны оснащенной гиперповерхности, соответствующим данному оснащению. Каждое оснащение гиперповерхности в общем случае индуцирует на ней сеть линий кривизны.

Оснащение гиперповерхности M_{n-1} называется сопряженным [13], если определяемая им сеть линий кривизны на M_{n-1} является сопряженной сетью.

Теорема ([18]). Нормальная аффинная связность на оснащенной гиперповерхности M_{n-1} является плоской тогда и только тогда, когда оснащение сопряженно.

Из теоремы 5, теоремы 1, теоремы 13 вытекает следующее геометрическое следствие. Семейство аффинных нормалей (т. е. нормалей Бляшке) гиперповерхности M_{n-1} является сопряженным оснащением, и M_{n-1} по этому оснащению допускает однопараметрическое семейство параллельных гиперповерхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акивис М. А.* Фокальные образы поверхности ранга r // Изв. высш. учеб. заведений. Математика.— 1957.— № 1.— С. 9—19 (РЖМат, 1959, 11523)
2. — О многомерных поверхностях, несущих сеть сопряженных линий // Докл. АН СССР.— 1961.— *139*, № 6.— С. 1279—1282 (РЖМат, 1962, 7А375)
3. — О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий // Мат. сб.— 1962.— *58*, № 2.— С. 695—706 (РЖМат, 1963, 4А310)
4. —, *Чакмазян А. В.* Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства, допускающих параллельное нормальное векторное поле // Докл. АН АрмССР.— 1975.— *60*, № 3.— С. 137—143 (РЖМат, 1975, 12А637)
5. *Алшибая Э. Д.* Дифференциальная геометрия гиперповерхности в многомерном аффинном пространстве // Тр. Тбилис. ун-та.— 1968.— *129*.— С. 319—341 (РЖМат, 1969, 8А499).
6. *Атанасян Л. С.* Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве // Тр. сем. по вектор. и тензор. анализу.— М.: МГУ, 1952.— вып. 9.— С. 351—410
7. *Базылев В. Т.* О многомерных сетях и их преобразованиях // В сб. «Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1965.— С. 138—164 (РЖМат, 1966, 11А340)
8. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере.— М.: МГУ, 1960 (РЖМат, 1963, 5А467К)
9. *Лаптев Г. Ф.* Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности // Докл. АН СССР.— 1959.— *126*, № 3.— С. 490—493 (РЖМат, 1960, 4526)
10. *Лумисте Ю. Г.* Дифференциальная геометрия подмногообразий // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1975.— *13*.— С. 273—340 (РЖМат, 1976, 6А623)
11. —, *Чакмазян А. В.* Нормальная связность и подмногообразие с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии.— 1980.— *12*.— С. 3—30 (РЖМат, 1981, 10А533)
12. *Номидзу К.* Группа Ли и дифференциальная геометрия.— М., 1960.— 128 с. (РЖМат, 1961, 6А526К)

13. *Норден А. В.* Пространства аффинной связности, 2-ое изд.— М.: Наука, 1976.— 432 с.
14. *Остиану Н. М., Рыжков В. В., Швейкин П. И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геометр. семинара Всес. ин-т научн. и техн. информ.— 1973.— *4*.— С. 7—70 (РЖМат, 1974, 3А451).
15. *Перепелкин Д. И.* Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n // Мат. сб.— 1935.— *42*, № 1.— С. 81—120
16. — О параллельных подмногообразиях в евклидовом (или римановом) пространства // Докл. АН СССР. — 1935. — *1*. — С. 593—598
17. *Чакмазян А. В.* Подмногообразие проективного пространства с параллельным подрасслоением нормального расслоения // Тезисы докл. Всес. геометр. конференции «150 лет неэвклидовой геометрии», Казань, 1976, 209
18. — Об оснащенных подмногообразиях аффинного пространства с плоской нормальной аффинной связностью // Дифференц. геометрия. Калинин.— 1977. — С. 120—129 (РЖМат, 1977, 12А755)
19. — Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. — 1978. — *10*. — С. 55—75 (РЖМат, 1979, 5А626)
20. — О нормализованных подмногообразиях с плоской нормальной связностью в проективном пространстве // Мат. заметки.— 1983.— *33*, № 2.— С. 281—288 (РЖМат, 1983, 7А631)
21. — Аффинная геометрия нормализованного подмногообразия с параллельным полем нормальных P-направлений // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1984. — № 665. — С. 81—89 (РЖМат, 1984, 7А610)
22. — Об оснащениях с плоской нормальной связностью для подмногообразий аффинного пространства // Изв. вузов. Математика.— 1987.— *1*.— С. 74—79
23. *Широков П. А., Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия.— М.: Физматгиз, 1959.— 319 с. (РЖМат, 1961, 9А567К)
24. *Chen B. Y.* Geometry of submanifolds, New York, Marcel. Dekker.— 1973.— 308 с. (РЖМат, 1974, 5А753К)
25. *Fabricius-Bierre F.* Sur variètès à torsion nulle // Acta math.— 1936.— *66*.— С. 49—77.
26. *Klinqenberg W.* Zur affinen Differential geometrie, I. über p-dimensionale Minimalflächen and Sphären in n-dimensionalen Ramm // Math. Z.— 1951. — *54*, № 1. — С. 65—80