Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

P. A. Borodin, A new proof of Blaschke's ellipsoid theorem, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2003, Number 3, 17–22

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.174
March 27, 2025, 03:06:19

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brown K.A., Goodearl K.R.* Lecture on algebraic quantum groups. Basel; Boston: Birkhäuser, 2002.
2. *Артамонов В.А.* Автоморфизмы тела квантовых рациональных функций // Матем. сб. 2000. **191**, № 12. 3–26.
3. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings // Regional Conference Series in Mathematics. V. 82. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1993.
4. *Артамонов В.А.* Квантовая проблема Серра // Успехи матем. наук. 1998. **53**, № 4. 3–76.
5. *Артамонов В.А.* Общие квантовые многочлены: неприводимые модули и Морита-эквивалентность // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. **63**, № 5. 3–36.
6. *Artamonov V.A., Cohn P.M.* The skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. 1999. **93**, N 6. 824–829.
7. *Osborn J.P., Passman D.* Derivations of skew polynomial rings // J. Algebra. 1995. **176**, N 2. 417–448.
8. *Artamonov V.A., Wisbauer R.* Homological properties of quantum polynomials // Algebras and representation theory. 2001. **4**, N 3. 219–247.
9. *Alev J., Chamarie M.* Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques // Communs Algebra. 1992. **20**, N 6. 1787–1802.
10. *Artamonov V.A.* Valuations on quantum fields // Communs Algebra. 2001. **29**, N 9. 3889–3904.
11. *Artamonov V.A.* Pointed Hopf algebras acting on quantum polynomials // J. Algebra. 2003. **259**, N 2. 323–352.
12. *McConnell J.C., Pettit J.J.* Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. 1988. **38**, N 1. 47–55.
13. *Herstein I.N.* On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring // Amer. J. Math. 1955. **77**. 279–285.

Поступила в редакцию
18.10.02

УДК 514.144.24

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЛЯШКЕ ОБ ЭЛЛИПСОИДЕ

П. А. Бородин

Пусть S — выпуклая замкнутая поверхность в $\mathbf{R}^3$. Каждому направлению $v \in \mathbf{RP}^2$ соответствует цилиндр $C(v)$, образованный прямыми с направлением v, опорными к поверхности S. Пересечение $C(v)\cap S$ принято называть *границей тени* поверхности S в направлении v. Например, у сферы границами теней являются окружности больших кругов, т.е. сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр. Любой эллипсоид получается из сферы некоторым аффинным преобразованием, и поэтому его границы теней также лежат каждая в своей плоскости. Теорема Бляшке об эллипсоиде утверждает, что верно и обратное: если у некоторой выпуклой замкнутой поверхности $S \subset \mathbf{R}^3$ все границы теней плоские, то S — эллипсоид.

Цель настоящей работы — представить новое элементарное доказательство теоремы Бляшке и обобщить ее на комплексный случай.

Теорема. *Пусть в $\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{C}^3$) задана двумерная (соответственно вещественно-пятимерная) выпуклая замкнутая поверхность S, которая касается каждого описанного вокруг нее цилиндра (образующая которого — соответственно вещественная или комплексная прямая) по множеству, лежащему в двумерной (комплексно-двумерной) плоскости. Тогда S — эллипсоид, т.е. задается в декартовых координатах как множество уровня некоторой вещественной (соответственно эрмитовой) положительно определенной квадратичной формы.*

В книге В. Бляшке [1] это утверждение доказано в $\mathbf{R}^3$ для так называемого овалоида (регулярной аналитической замкнутой выпуклой поверхности, кривизна которой везде отлична от нуля). В случае произвольной выпуклой замкнутой поверхности в $\mathbf{R}^3$ оно вытекает из результатов А. Д. Александрова [2]. Прямое (хотя довольно длинное) доказательство теоремы Бляшке в вещественном случае имеется в книге Г. Буземана [3].

Теорема Бляшке используется при доказательстве аппроксимативных критериев гильбертовости банахова пространства, из которых в свою очередь получаются различные ее обобщения и модификации [4, 5].

Доказательство. 1. Обозначим через $\Pi(v)$ плоскость, содержащую множество точек касания S с цилиндром, образующая которого параллельна вектору v. Докажем, что все плоскости $\Pi(v)$ проходят через одну точку. Вначале определим эту точку как точку пересечения трех плоскостей. Вектор v_1 возьмем произвольным. Вектор v_2 возьмем параллельным плоскости $\Pi(v_1)$. Тогда плоскости $\Pi(v_1)$ и $\Pi(v_2)$ не совпадают (иначе v_2 был бы параллелен $\Pi(v_2)$, что, очевидно, невозможно) и не параллельны (поскольку они обе содержат точку касания поверхности S с плоскостью, параллельной плоскости $< v_1, v_2 >$ векторов v_1 и v_2). Поэтому $\Pi(v_1)$ и $\Pi(v_2)$ пересекаются по некоторой прямой a. В качестве v_3 возьмем направляющий вектор прямой a. Так как v_3 не может быть параллелен плоскости $\Pi(v_3)$, то последняя пересекает a в некоторой (единственной) точке O, которая и есть точка пересечения плоскостей $\Pi(v_1)$, $\Pi(v_2)$ и $\Pi(v_3)$. Покажем, что для любого v плоскость $\Pi(v)$ проходит через эту точку O. Положим $< v_1, v_2 > \cap < v, v_3 > := < v' >$, где $< v' >$ — прямая с направляющим вектором v'. Плоскость $\Pi(v')$ содержит прямую $\Pi(v_1) \cap \Pi(v_2) = a$, т.е. $O \in \Pi(v')$. Аналогично $< v > \subset < v', v_3 >$, и поэтому $\Pi(v) \supseteq \Pi(v') \cap \Pi(v_3) \ni O$, что и требовалось.

2. Точка O лежит строго внутри поверхности S, так как описанный цилиндр с образующим вектором v_3 содержит прямую a строго внутри себя и плоскость $\Pi(v_3)$ пересекает внутренность этого цилиндра по выпуклой области, лежащей внутри S. Мы принимаем точку O за начало координат.

3. Пусть e — произвольный единичный вектор в $\mathbf{R}^3$ ($\mathbf{C}^3$), а $\pi(e)$ — ортогональная (соответственно эрмитово ортогональная) к e двумерная плоскость, проходящая через начало координат. Будем двигать $\pi(e)$ параллельно самой себе в направлении e до тех пор, пока она не станет опорной плоскостью $\pi'(e)$ к поверхности S в некоторой точке $k = k(e)$. Докажем, что эта точка k единственна. Если $k, k' \in \pi'(e) \cap S$, $k \neq k'$, то весь отрезок $[k, k'] \subset \pi'(e) \cap S$. Векторы k и k' линейно независимы (в вещественном случае это очевидно; в комплексном случае имеем $k = \lambda e + z$, $k' = \lambda e + w$, где $\lambda > 0$, $z, w \in \pi(e)$, и поэтому коэффициент пропорциональности между k и k' может быть равен только 1). Направление $k - k'$ является опорным к поверхности S во всех точках отрезка $[k, k']$ (в комплексном случае это следует из того, что $[k, k']$ лежит в опорной к S комплексно-двумерной плоскости $\pi'(e)$). Таким образом, плоскость $\Pi(k - k')$ содержит точки k и k', т.е. $k - k' \parallel \Pi(k - k')$, что невозможно.

4. Итак, $e \to k(e)$ есть однозначное отображение единичной сферы S^2 (S^5 в комплексном случае) в поверхность S. Очевидно, оно непрерывно. Поскольку в каждой точке $k \in S$ существует опорная двумерная плоскость и она может быть получена указанным выше способом из плоскости, ортогональной некоторому единичному вектору, то это отображение сюръективно. Докажем еще одно его свойство: каждое пересечение $S^2 \cap \Pi_2$ ($S^5 \cap \Pi_2$) сферы с какой-либо двумерной плоскостью Π_2 переводится этим отображением в пересечение S с некоторой двумерной плоскостью. Действительно, пусть вектор e ортогонален какому-то фиксированному вектору v. Тогда $v \in \pi(e)$, и направление v является опорным к поверхности S в точке $k(e)$. Множество же всех точек поверхности S, в которых v является опорным к S, лежит по условию в одной плоскости $\Pi(v)$, проходящей через начало координат O.

5. Отображение $e \to k(e)$ порождает отображение $F : [e] \to [k(e)]$ проективного пространства $\mathbf{P}^2$ (здесь $\mathbf{P}^2$ есть $\mathbf{RP}^2$ или $\mathbf{CP}^2$, а $[e]$ обозначает точку пространства $\mathbf{P}^2$, соответствующую прямой с направляющим вектором e). Отображение F удовлетворяет условиям следующего утверждения.

Лемма. *Пусть $F : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ — непрерывное сюръективное отображение, при котором всякая проективная прямая переходит в проективную прямую. Тогда существует такое линейное преобразование L соответствующего аффинного пространства $\mathbf{A}^3$, что $F([e]) = [L(e)]$ для всех $e \in \mathbf{A}^3$.*

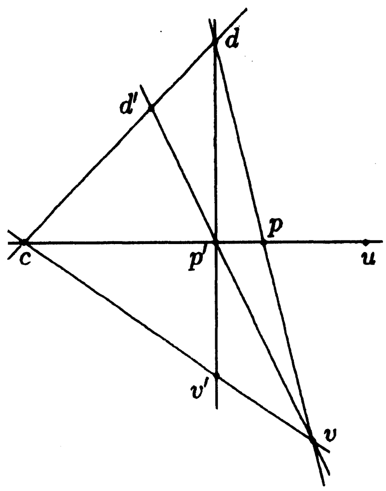
Без условия непрерывности, но с заменой сюръективности на биективность отображения F это утверждение доказывается в [6] (теорема 12.5). В нашей лемме условие непрерывности может быть опущено (см. ниже доказательство).

Доказательство. Докажем сначала, что F — взаимно однозначное отображение. Предположим, что для некоторого $w \in \mathbf{P}^2$ множество $W := \{p \in \mathbf{P}^2 : F(p) = w\}$ содержит по крайней мере две различные точки a и b. Поскольку $F(\mathbf{P}^2) = \mathbf{P}^2$ и прямая ab отображается на некоторую прямую, найдется точка $c \notin (W \cup ab)$. Покажем, что образ $F(d)$ любой точки d лежит на прямой $F(c)w$. Если $F(d) = F(c)$, то это очевидно. Если прямая cd пересекается с W, то $F(d) \in F(cd) = F(c)w$. Пусть теперь $cd \cap W = \emptyset$ и $F(d) \neq F(c)$. Возьмем во множестве W точку v, ближайшую к прямой cd (W замкнуто). Согласно выбору точки c, в W есть такая точка $u \neq v$, что прямые cu и cv различны (см. рисунок). Если для некоторой точки $d' \in cd$ со свойством $F(d') \neq F(c)$ точка $p' = d'v \cap cu$ не лежит в W, то

$$\Big(F(p') \in F(c)F(u) = F(c)w, F(p') \neq w\Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(F(d') \in F(p')F(v) = F(p')w = F(c)w\Big) \Longrightarrow \Big(F(d) \in F(d')F(c) = F(c)w\Big).$$

Предположим, что любая такая точка $p' \in W$. Если d' пробегает окрестность точки d на прямой cd, то p' пробегает окрестность точки $p = dv \cap cu$ на прямой cu, а точка $v' = dp' \cap cv$ пробегает окрестность точки v на прямой cv (см. рисунок). Поскольку v — ближайшая к прямой cd точка во множестве W, среди точек v' обязательно есть не принадлежащие этому множеству и тогда



$$\Big(F(v') \in F(c)F(v) = F(c)w, F(v') \neq w\Big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \Big(F(d) \in F(v')F(p') = F(v')w = F(c)w\Big).$$

Итак, мы получили $F(\mathbf{P}^2) \subseteq F(c)w$, что противоречит сюръективности F.

Доказательство можно было бы завершить ссылкой на теорему 12.5 книги [6], причем оказывается, что лемма справедлива без условия непрерывности отображения F (до сих пор мы не использовали это условие).

Продолжим доказательство для полноты картины.

Из свойств взаимной однозначности и непрерывности вытекает, что образом (проективной) прямой является полная прямая и что разные прямые переходят в разные.

Рассмотрим обычное представление $\mathbf{P}^2$ в виде "конечной" части $\mathbf{A}^2 = \{[x : y : z] : z \neq 0\} \simeq \{(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\}$ и бесконечно удаленной прямой $l = \{[x : y : 0]\}$. Найдется такое невырожденное линейное преобразование $L_1 : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}^3$, что отображение $F_1 : p \to [L_1(F(p))]$ оставляет на месте прямую l и точку $[0 : 0 : 1]$. Отображение F_1 можно рассматривать как непрерывное биективное преобразование (аффинной) плоскости $\mathbf{A}^2$, при котором точка $(0, 0)$ остается на месте и всякая прямая переходит в прямую. Поскольку F_1 взаимно однозначно, параллельные прямые переходят в параллельные. Пусть v и w — два произвольных неколлинеарных вектора в плоскости $\mathbf{A}^2$, исходящие из точки $(0, 0)$. Параллелограмм, построенный на этих векторах, переходит в параллелограмм, построенный на векторах $F_1(v)$, $F_1(w)$, причем диагонали переходят в диагонали, а точка их пересечения — в точку пересечения. Другими словами, $F_1(v + w) = F_1(v) + F_1(w)$ и $F_1\left(\frac{v+w}{2}\right) = \frac{F_1(v+w)}{2}$. Первое равенство означает аддитивность F_1, из второго с учетом непрерывности следует однородность F_1. Таким образом, F_1 — невырожденное линейное отображение по x, y.

Обозначая также через F_1 соответствующую этому отображению матрицу 2×2, в объемлющем пространстве $\mathbf{A}^3$ рассмотрим теперь линейное отображение L_2 с матрицей

$$\begin{pmatrix} & & 0 \\ & F_1 & \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для любой точки $p \in \mathbf{P}^2$ имеет место равенство $F_1(p) = [L_2(p)]$. Отсюда $F(p) = [L_1^{-1} \circ L_2(p)]$, и лемма доказана.

6. Согласно п. 5, отображение $[e] \to [k(e)]$ является проективизацией некоторого невырожденного линейного преобразования объемлющего трехмерного пространства. Нам удобнее будет рассмотреть обратное отображение $k \to e$, которое, опустив требование $|e| = 1$, мы будем считать просто линейным. Итак, в каждой точке k поверхности S единственная опорная двумерная плоскость ортогональна вектору $A(k)$, где A — невырожденное линейное преобразование.

7. Дальнейшие рассуждения проведем только в комплексном случае; в вещественном случае они аналогичны и значительно упрощаются.

Для любой вещественно-пятимерной плоскости Γ, опорной к поверхности S в точке k, можно так подобрать комплексное число $c(k) \neq 0$, что вектор $c(k) \cdot A(k)$ будет вещественно-ортогонален Γ. Это означает, что для любого вектора $m \in S$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(c(k) \cdot A(k), m - k) \leqslant 0 \tag{1}$$

(здесь $(\cdot, \cdot)$ — эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^3$). При этом в случае линейной независимости векторов m и k неравенство (1) строгое — иначе опорные к S комплексно-двумерные плоскости (комплексные касательные) в точках m и k были бы параллельны, что противоречит невырожденности преобразования A. Представим k и m в виде $k = f(z) \cdot z$, $m = f(w) \cdot w$, где векторы z и w имеют единичную евклидову длину, а функция $f(v)$ сопоставляет каждому вектору v длины 1 положительное число, для которого $f(v) \cdot v \in S$. Константу $c(k) = c(z)$ представим в виде $c(z) = \frac{b(z)}{(A(z),z)}$ (здесь $(A(z), z) \neq 0$, иначе комплексная касательная к S в точке $k = f(z) \cdot z$ проходила бы через 0). Итак, для любых векторов z и w единичной длины имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{b(z)f(z)}{(A(z), z)} \cdot A(z), f(w)w - f(z)z\right) \leqslant 0,$$

или после простых преобразований

$$f(w) \cdot \operatorname{Re}\left(b(z)\frac{(A(z), w)}{(A(z), z)}\right) \leqslant f(z) \cdot \operatorname{Re}(b(z)). \tag{2}$$

При $w = e^{i\varphi}z$ неравенство (2) принимает вид

$$f(e^{i\varphi}z) \cdot \operatorname{Re}(b(z)e^{-i\varphi}) \leqslant f(z) \cdot \operatorname{Re}(b(z)),$$

или

$$\operatorname{Re}\frac{b(z)}{f(e^{i\varphi}z)e^{i\varphi} - f(z)} \leqslant 0.$$

Это означает следующее: если в $\mathbf{C}^3$ взять комплексную прямую $l(z) = \{re^{i\varphi} \cdot z : r \geqslant 0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$ и в ней выпуклую замкнутую кривую $S(z) = S \cap l(z) = \{(r, \varphi) : r(\varphi) = f(e^{i\varphi}z)\}$, то в точке $P(z) = (r = f(z), \varphi = 0)$ эта кривая имеет опорную прямую с внешней нормалью $b(z)$. В частности, отсюда следует, что $\operatorname{Re}(b(z)) > 0$ при любом z.

Обратно, для любого комплексного числа $b(z)$, изображающего на комплексной прямой $l(z)$ внешнюю нормаль к какой-то опорной прямой в точке $P(z) \in S(z)$, справедливо неравенство (2), поскольку любую такую прямую можно продолжить до вещественно-пятимерной плоскости, опорной к поверхности S в точке $f(z) \cdot z$ в объемлющем пространстве $\mathbf{C}^3$.

8. Положим $A = D \circ U$, где D — неотрицательное симметрическое преобразование, а U — унитарное преобразование (см. [7, с. 144]), и подставим в (2) $e^{i\varphi}z$ вместо z и $U(z)$ вместо w:

$$f(U(z)) \cdot \operatorname{Re}\left(b(e^{i\varphi}z)e^{i\varphi}\frac{(D \circ U(z), U(z))}{(D \circ U(z), z)}\right) \leqslant f(e^{i\varphi}z) \cdot \operatorname{Re}(b(e^{i\varphi}z)),$$

или

$$f(U(z)) \cdot (D \circ U(z), U(z)) \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{b(e^{i\varphi}z)e^{i\varphi}}{(D \circ U(z), z)}\right) \leqslant f(e^{i\varphi}z) \cdot \operatorname{Re}(b(e^{i\varphi}z)).$$

Для некоторого угла $\varphi = \varphi(z)$ это неравенство примет вид

$$f(U(z)) \cdot (D \circ U(z), U(z)) \cdot \left| \frac{b(e^{i\varphi(z)}z)}{(D \circ U(z), z)} \right| \leqslant f(e^{i\varphi(z)}z) \cdot Re(b(e^{i\varphi(z)}z))$$

(см. замечание в конце п. 7). Отсюда

$$f(U(z)) \cdot (D \circ U(z), U(z)) \leqslant f(e^{i\varphi(z)}z) \cdot |(D \circ U(z), z)| \leqslant f(e^{i\varphi(z)}z) \cdot ((D \circ U(z), U(z)) \cdot (D(z), z))^{1/2}.$$

Сокращая на $(D \circ U(z), U(z))^{1/2}$, получаем

$$f(U(z)) \cdot (D \circ U(z), U(z))^{1/2} \leqslant f(e^{i\varphi(z)}z) \cdot (D(z), z)^{1/2}. \tag{3}$$

Это неравенство строгое, когда векторы z и $U(z)$ линейно независимы (см. замечание после неравенства (1)).

Рассмотрим функцию $g(z) = \max\{f(e^{i\theta}z) \cdot (D(z), z)^{1/2} : \theta \in [0, 2\pi]\}$. Из неравенства (3) следует, что $g(U(z)) \leqslant g(z)$, причем $g(U(z)) < g(z)$ в случае линейной независимости векторов z и $U(z)$. Но интегралы по единичной сфере $S^5 \in \mathbf{C}^3$ от функций $g(z)$ и $g(U(z))$, взятые по пятимерной мере Лебега на S^5, равны. Следовательно, векторы z и $U(z)$ линейно зависимы для любого z, так что $U(z) = \alpha \cdot z$, где α — некоторое число с $|\alpha| = 1$. Поэтому в неравенстве (1) можно положить $A = D$:

$$\mathrm{Re}\,(c(k)D(k), m - k) \leqslant 0. \tag{4}$$

9. Положим $\hat{k} = D^{1/2}(k)$, где линейное преобразование $D^{1/2}$ — квадратный корень из преобразования D, и пусть $\hat{S}$ — поверхность, в которую переходит S при отображении $k \to \hat{k}$. Неравенство (4) принимает вид

$$\mathrm{Re}\,(c(\hat{k}) \cdot D \circ D^{-1/2}(\hat{k}), D^{-1/2}(\hat{m}) - D^{-1/2}(\hat{k})) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\,(c(\hat{k}) \cdot (\hat{k}, \hat{m} - \hat{k})) \leqslant 0, \qquad \hat{k}, \hat{m} \in \hat{S}.$$

Опять подставляя $\hat{m} = \hat{f}(w) \cdot w$, $\hat{k} = \hat{f}(z) \cdot z$ (где $|z| = |w| = 1$, а функция $\hat{f}(v)$ сопоставляет каждому вектору v длины 1 положительное число, для которого $\hat{f}(v) \cdot v \in \hat{S}$), $c(\hat{k}) = \frac{\hat{b}(z)}{(z,z)} = \hat{b}(z)$, получаем

$$\hat{f}(w) \cdot \mathrm{Re}\,(\hat{b}(z) \cdot (z, w)) \leqslant \hat{f}(z) \cdot \mathrm{Re}\,(\hat{b}(z)).$$

Если число (z, w) вещественно, то $\hat{f}(w) \cdot (z, w) \leqslant \hat{f}(z)$ (напомним, что $\mathrm{Re}\,(\hat{b}(z)) > 0$ при любом $\hat{b}(z)$ — см. выше п. 7). Отсюда

$$\hat{f}(z) \geqslant \hat{f}(w)(z, w) = \hat{f}(w)\cos\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Пусть точки $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ лежат на S^5 в плоскости векторов z и w и делят угол между ними на n равных частей. Имеем

$$\hat{f}(z) \geqslant \hat{f}(v_1)\cos(\alpha/n) \geqslant \hat{f}(v_2)\cos^2(\alpha/n) \geqslant \ldots \geqslant \hat{f}(w)\cos^n(\alpha/n).$$

Меняя z и w местами, получаем двойное неравенство:

$$\hat{f}(z)\cos^n(\alpha/n) \leqslant \hat{f}(w) \leqslant \hat{f}(z)/\cos^n(\alpha/n).$$

Устремляя n к $+\infty$, имеем $\hat{f}(z) = \hat{f}(w)$ при любых $z, w \in S^5$, для которых $(z, w) \in \mathbf{R}$. Поскольку для любых двух векторов $z, w \in S^5$ можно найти такой вектор $u \in S^5$, что числа (z, u) и (u, w) вещественны, то равенство $\hat{f}(z) = \hat{f}(w)$ верно при любых $z, w \in S^5$. Это означает, что поверхность $\hat{S}$ получается из единичной сферы S^5 равномерным растяжением, т.е. сама является сферой какого-то радиуса. Так как $\hat{S}$ получалась из S линейным преобразованием, то S — эллипсоид.

Доказательство закончено.

Автор благодарен Ю. Н. Кузнецовой за обнаружение ошибок в одном из первоначальных вариантов доказательства, С. А. Богатому и О. Д. Фролкиной — за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 02-01-00913) и БРФФИ (проект № 02-01-81081).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.
2. *Александров А.Д.* О выпуклых поверхностях с плоскими границами теней // Матем. сб. 1939. **5**, № 2. 309–316.
3. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. М.: ГИФМЛ, 1962.
4. *Бородин П.А.* Квазиортогональные множества и условия гильбертовости банахова пространства // Матем. сб. 1997. **188**, № 8. 63–74.
5. *Бородин П.А., Тихомиров В.М.* Критерии гильбертовости банахова пространства, связанные с теорией приближений // Математическое просвещение. 1999. Вып. 3. 189–207.
6. *Лелон-Ферран Ж.* Основания геометрии. М.: Мир, 1989.
7. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
23.10.02

УДК 517.51

О СУЩЕСТВЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И РЯДОВ

М. И. Дьяченко, К. С. Казарян, П. Сифуэнтес

1. Существенная расходимость по мере. Пусть (X, Σ, ν) — σ-конечное измеримое пространство. Данная работа содержит две части. В первой мы исследуем некоторые понятия, касающиеся расходимости по мере функциональных последовательностей на (X, Σ, ν), точнее, существенной расходимости по мере и неограниченной существенной расходимости по мере. Мы докажем, что в случае конечной меры расходимость функциональной последовательности по мере влечет существование нетривиального множества, на котором данная последовательность существенно расходится по мере. Такой же результат справедлив и для неограниченно расходящихся по мере последовательностей.

Во второй части работы мы докажем, что если ортонормированная система удовлетворяет некоторым специальным условиям и если существует кратный ряд Фурье по соответствующей системе-произведению, кубические частичные суммы которого неограниченно расходятся по мере, то существует и ряд Фурье по той же системе, кубические частичные суммы которого существенно расходятся по мере на множестве полной меры.

Отметим, что, вообще говоря, если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечных действительнозначных измеримых функций на X, которая расходится по мере на X, то отсюда не вытекает, что эта последовательность расходится по мере на произвольном множестве $E \in \Sigma$ с $\nu(E) > 0$.

Определение 1. Пусть (X, Σ, ν) — σ-конечное измеримое пространство, $E \in \Sigma$ и $\nu(E) > 0$. Пусть также последовательность измеримых действительнозначных функций $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена на E. Тогда скажем, что эта последовательность существенно расходится по мере на E, если для любого $E_1 \subseteq E$ с $E_1 \in \Sigma$ и $\nu(E_1) > 0$ последовательность F расходится по мере на E_1.

Прежде всего мы хотим выяснить следующий вопрос. Если последовательность $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится по мере на X, то вытекает ли отсюда существование множества $E \in \Sigma$ с $\nu(E) > 0$, такого, что F существенно расходится по мере на E?

Если последовательность $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится по мере на X, то существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и возрастающие последовательности натуральных чисел $1 \leqslant n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$, такие, что $\varepsilon_0 < \nu(A_k)$, где $A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{m_k}(x)| > \varepsilon_0\}$.