В. Г. Кановей, О существенности параметров и сложности основной формулы в схеме аксиом свертки в арифметике второго порядка, *Докл. АН СССР*, 1978, том 243, номер 6, 1384–1386

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 243, № 6

УДК 519.5 МАТЕМАТИКА

В. Г. КАНОВЕЙ

О СУЩЕСТВЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ И СЛОЖНОСТИ ОСНОВНОЙ ФОРМУЛЫ В СХЕМЕ АКСИОМ СВЕРТКИ В АРИФМЕТИКЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 VI 1978)

Через $\mathscr{L}$ обозначаем язык арифметики второго порядка с переменными для множеств, описанный в ([1]), стр. 492. Переменные для натуральных чисел и соответствующие кванторы будем для краткости называть переменными и кванторами типа 0, а переменные и кванторы для множеств натуральных чисел — переменными и кванторами типа 1. Сама арифметика второго порядка A_2^- содержит следующие схемы аксиом в этом языке (см., например ([3])):

1) все аксиомы Пеано для переменных типа 0, кроме аксиомы индукции;

2) аксиому индукции в виде $\forall\alpha[0\in\alpha\,\&\,\forall m[m\in\alpha\to m+1\in\alpha]\to\forall m[m\in\alpha]]$ (здесь и ниже α и β — переменные типа 1, а m — переменная типа 0);

3) аксиому экстенсиональности $\forall\alpha\forall\beta[\forall m[m\in\alpha\equiv m\in\beta]\to\alpha=\beta]$;

4) схему CA аксиом свертки $\exists\alpha\forall m[m\in\alpha\equiv\varphi(m)]$, где $\varphi(m)$ есть произвольная формула языка $\mathscr{L}$, не содержащая переменной α.

Более подробно о теории A_2^- см. обзоры ([2], [3]).

Рассматриваются также следующие схемы аксиом выбора в языке $\mathscr{L}$, см. ([3]):

схема AC *независимого выбора* $\forall m\exists\alpha\varphi(m,\alpha)\to\exists\alpha\forall m\varphi(m,(\alpha)_m)$ (где $(\alpha)_m=\{k\in\omega\colon 2^m(2k+1)-1\in\alpha\}$ для $m\in\omega$ и $\alpha\subseteq\omega$; ω — натуральный ряд, начинающийся с 0);

схема DC з а в и с и м о г о в ы б о р а $\forall\alpha\exists\beta\varphi(\alpha,\beta)\to\exists\alpha\forall m\varphi((\alpha)_m,(\alpha)_{m+1})$ (формула $\varphi(\alpha,\beta)$ не содержит m).

В схемах CA, AC и DC допускается вхождение в формулу φ (которая называется о с н о в н о й формулой схемы) и других свободных переменных, кроме указанных явно (т. е. кроме m в CA, кроме m и α в AC и кроме α и β в DC). Эти не указанные явно свободные переменные основной формулы φ называются п а р а м е т р а м и.

Исследование подсистем теории A_2^- названо в ([2]) «центральной проблемой». Наибольший интерес из таких подсистем представляют теории, получающиеся из A_2^- заменой схемы CA некоторой ее частью.

Например, рассматривается схема $CA(\Sigma_n^1)$, получающаяся из CA ограничением «$\varphi(m)$ есть Σ_n^1-формула». Формула языка $\mathscr{L}$ называется Σ_n^1-ф о р м у л о й, если она имеет предваренный вид с Σ_n^1-префиксом (([1]), стр. 497). В свою очередь, Σ_n^1-п р е ф и к с о м ($n\geqslant1$) называется такой префикс, который после удаления всех кванторов типа 0 будет начинаться с $\exists$ и иметь ровно $n-1$ перемен кванторов; отдельно, Σ_0^1-п р е ф и к с о м называется префикс, не имеющий кванторов типа 1, см. (([1]), стр. 479). Если в этих определениях заменить квантор $\exists$ на $\forall$, то получится определение Π_n^1-п р е ф и к с а и Π_n^1-ф о р м у л ы.

Другим ослабленным вариантом CA является схема CA^*, получающаяся из CA ограничением «формула $\varphi(m)$ не содержит параметров, т.е.

других свободных переменных, кроме m». На важность изучения «эффекта параметров» в схемах аксиом указано в ([2]).

Аналогичные ослабленные варианты вводятся и для схем AC и DC (например, AC^*, $DC(\Sigma_n^1)$).

Наконец, через T обозначим теорию, полученную удалением из A_2^- схемы CA, а через E — теорию $T+CA(\Sigma_0^1)$ — так называемую предикативную арифметику второго порядка.

В ([4]) указаны весьма простые примеры схемы CA (такие, как $\exists\alpha\forall m[m\in\alpha\equiv m\notin\beta]$ с параметром β), не выводимые в теории $T+CA^*$. В ([5]) доказано, что некоторый пример CA не выводим даже в теории $E+AC^*+AC(\Sigma_2^1)$ (заметим в скобках, что CA^* доказуемо в $E+AC^*$). Последний результат допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Пусть $n\geqslant2$ и теория A_2^- непротиворечива.*

Тогда в теории $E+AC^*+CA(\Sigma_n^1)+DC(\Sigma_n^1)$ недоказуем некоторый конкретный пример схемы $CA(\Sigma_{n+1}^1)$.

Если в формулировке теоремы 1 заменить формулы их геделевыми номерами и известным способом (([6]), 6.6) формализовать понятие доказуемости в теории с рекурсивной совокупностью геделевых номеров аксиом, то результат такого изменения теоремы 1 может быть доказан в арифметике Пеано (первого порядка).

Справедлив следующий вариант теоремы 1:

Теорема 2 (в теории множеств ZF ([6]), гл. 9). *Для каждого $n\geqslant2$ найдется такое счетное семейство X подмножеств натурального ряда ω, что (ω, X) будет моделью теории $E+AC^*+CA(\Sigma_n^1)+DC(\Sigma_n^1)$, но не будет моделью схемы $CA(\Sigma_{n+1}^1)$.*

Несколько замечаний. 1. В определении Σ_n^1-префикса (([1]), стр. 479) под кванторами типа 1 понимаются кванторы, применяемые к функциональным переменным (т.е. переменным для функций из ω в ω). Однако в соответствии с соглашением (([1]), стр. 489) определение Σ_n^1-префикса переносится и на кванторы типа 1 по множествам натуральных чисел.

2. Теория E достаточно сильна для доказательства известных правил преобразования кванторов (i), (ii) и (iii) на стр. 480 и (i), (ii) и (iii) на стр. 484 в ([1]). Однако правило (iv) на стр. 480 в ([1]), утверждающее возможность преобразований $\forall^0\exists^1\to\exists^1\forall^0$ и $\exists^0\forall^1\to\forall^1\exists^0$, недоказуемо даже в теории A_2^-, так как доказательство правила (iv) опирается на схему AC. Как установлено в ([7]), схема AC недоказуема в A_2^- (и даже в ZF).

3. В теории $E+AC^*$ можно доказать схему CA^*. В силу этого из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $n\geqslant2$ и теория A_2^- непротиворечива.*

Тогда в теории $E+CA^*+CA(\Sigma_n^1)$ недоказуем некоторый конкретный пример схемы $CA(\Sigma_{n+1}^1)$.

Таким образом, как параметры, так и сложность основной формулы играют существенную роль в схеме CA.

Укажем еще два следствия.

Следствие 2. *Пусть теория A_2^- непротиворечива.*

Тогда A_2^- не является конечно-аксиоматизируемым расширением $E+CA^*+CA(\Sigma_n^1)$ ни при каком натуральном n (иными словами, если $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ — произвольная конечная совокупность аксиом теории A_2^-, то найдется такая аксиома φ теории A_2^-, которая недоказуема в $E+CA^*+$ $+CA(\Sigma_n^1)+[\varphi_1\,\&\dots\&\,\varphi_m]$).

Следствие 3. *Если теория A_2^- непротиворечива, то она не является конечно-аксиоматизируемым расширением теории $E+CA^*$.*

4. Эквивалентность схем $CA(\Sigma_n^1)$ и $CA(\Pi_n^1)$ доказуема в E, и поэтому рассмотрение $CA(\Pi_n^1)$ вместо $CA(\Sigma_n^1)$ не дает ничего нового. Интересно, что для AC и DC имеют место другие эквивалентности: $AC(\Pi_n^1)\equiv$ $\equiv AC(\Sigma_{n+1}^1)$ и $DC(\Pi_n^1)\equiv DC(\Sigma_{n+1}^1)$.

5. Можно усилить теоремы 1 и 2 и следствие 1, заменив в их формулировках схему $CA(\Sigma^1_{n+1})$ следующей более слабой схемой: $\forall m[\varphi(m)\equiv\equiv\psi(m)]\rightarrow\exists\alpha\forall m[m\in\alpha\equiv\varphi(m)]$, где предполагается, что $\varphi(m)$ есть Σ^1_{n+1} формула, не содержащая α, а $\psi(m)$ есть Π^1_{n+1}-формула, также не содержащая α.

6. Схема зависимого выбора иногда формулируется в следующем виде DC': $\forall\alpha\exists\beta\varphi(\alpha,\beta)\rightarrow\forall\alpha\exists\beta[\alpha=(\beta)_0\&\forall m\varphi((\beta)_m,(\beta)_{m+1})]$, где формула $\varphi(\alpha,\beta)$ не содержит m ([8]). В ([2]) эта схема обозначена DC_{11}.

Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми после замены в их формулировках DC на DC'.

7. Вопрос о справедливости теорем 1 и 2 и следствия 1 при $n=0$, 1 остается для автора открытым.

8. Следствия 2 и 3 показывают, что теория A_2^- значительно сильнее в смысле выводимости, чем ее «беспараметрический» вариант $E+CA^*$. Являются ли теории A_2^- и $E+CA^*$ равнонепротиворечивыми?

9. В теории $E+DC(\Sigma^1_{n+1})$ доказуемы $AC(\Sigma^1_{n+1})$ и $CA(\Sigma_n^1)$, но недоказуема схема $CA(\Sigma^1_{n+1})$ (например, если выполняется аксиома конструктивности и X есть совокупность всех Δ^1_{n+1}-множеств натуральных чисел, то (ω, X) будет моделью для $E+DC(\Sigma^1_{n+1})$, но не для $CA(\Sigma^1_{n+1})$. В связи с этим возникает вопрос о следующем усилении теоремы 1: выводима ли схема $CA(\Sigma^1_{n+1})$ в теории $E+AC^*+DC(\Sigma^1_{n+1})$?

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
18 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Х. Роджерс,* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972. [2] *G. Kreisel,* J. Symb. Logic, v. 33, № 3, 321 (1968). [3] *K.-P. Apt, W. Marek,* Ann. Math. Logic, v. 6, 177 (1974). [4] *А. М. Левин,* В сб.: IV Всесоюзн. конфер. по математической логике, Кишинев, 1976, стр. 75. [5] *В. Г. Кановей,* В сб.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам, М., «Наука», 1976, стр. 5. [6] *Дж. Шенфилд,* Математическая логика, М., «Наука», 1975. [7] *A. Levy,* In: Math. Logic and Found. of Set Theory, Amsterdam, 1970, p. 129. [8] *W. Gusicki,* Fund. math., v. 93, № 2, 131 (1976).