В. Г. Журавлев, Многоцветные множества ограниченного остатка, *Чебышевский сб.*, 2015, том 16, выпуск 2, 93–116

https://www.mathnet.ru/cheb392

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 2 (2015)

УДК 511.95

МНОГОЦВЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА[1]

В. Г. Журавлев (г. Владимир)

Аннотация

Пусть $r(i, X^1)$ — количество точек орбиты длины i относительно вращения $S_\alpha :\ \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$ окружности единичной длины $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол α, попавших в X^1, и пусть $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$ — отклонение функции распределения $r(i, X^1)$ от ее среднего значения $i|X^1|$, где $|X^1|$ означает длину X^1. В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему: если X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, то для отклонения $\delta(i, X^1)$ выполняется неравенство $|\delta(i, X^1)| \leqslant h$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

В 1981 г. И. Орен перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов X^1 и для таких множеств получил оценку $\delta(i, X^1) = O(1)$ при $i \to \infty$.

В общем случае, если X^d принадлежит d-мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие $\delta(i, X^d) = O(1)$ при $i \to \infty$, то X^d называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен В. Г. Журавлевым, при котором вместо отдельных множеств X^d_k на торе $\mathbb{T}^d$ рассматриваются полные разбиения торов $\mathbb{T}^d_{c,\lambda} = X^d_0 \sqcup X^d_1 \sqcup \dots \sqcup X^d_s$ с некоторыми параметрами c, λ. Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$ так, чтобы повороту тора S_α отвечало перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ из $\mathbb{R}^d$. Если число таких множеств X'_k окажется $s+1 \leqslant d+1$, то каждый из образов $X^d_k = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR-множеством, а соответствующее объединение $T^d_{c,\lambda} = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$ из $\mathbb{R}^d$ — торической разверткой для $\mathbb{T}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d-мерного единичного куба C^d и отрезков.

В 2012 г. В. Г. Журавлевым по указанной схеме были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка $X^d = P^d$, являющиеся d-мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин $\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2$. Для размерностей $d = 1$ и 2 это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00360.

и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ — параллелоэдры Вороного, среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова.

В настоящей работе с помощью разбиений многомерных торов строятся множества ограниченного остатка, представляющие собою конечные объединения выпуклых многогранников. Для отклонений распределения точек орбит относительно сдвигов тора по указанным множествам доказывается многомерный вариант теоремы Гекке о распределении дробных долей на окружности.

Ключевые слова: многомерная теорема Гекке, множества ограниченного остатка, многогранники.

Библиография: 9 названий.

MULTI-COLOUR BOUNDED REMAINDER SETS

V. G. Zuravlev (Vladimir)

Abstract

Let $r(i, X^1)$ be the number of points in the S_α-orbit of the length i with respect to a rotation $S_\alpha : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$ of the unit circle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ by an angle α hit the X^1. Denote by $\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$ the deviation of the function $r(i, X^1)$ from its average value $i|X^1|$, where $|X^1|$ is the length of X^1.

In 1921 E. Hecke had proved the theorem: if X^1 has the length $|X^1| = h\alpha + b$, where $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, then the inequality $|\delta(i, X^1)| \leqslant h$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ holds for all $i = 0, 1, 2, \ldots$

In 1981 г. I. Oren was able to generalize the Hecke theorem to the case of a finite union of intervals X^1. He proved the estimation $\delta(i, X^1) = O(1)$ as $i \to \infty$.

In the general case, if X^d belongs to the d-dimensional torus $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ and there is $\delta(i, X^d) = O(1)$ as $i \to \infty$, then X^d is called a bounded remainder set.

Global approach to search of bounded remainder sets was proposed by V.G. Zhuravlev in 2011 when, instead of separate sets X_k^d on the torus $\mathbb{T}^d$, the complete toric decompositions $\mathbb{T}^d_{c,\lambda} = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \ldots \sqcup X_s^d$ with parameters c, λ began to be considered. The main idea was to determine a lifting $\pi^{-1} : \mathbb{T}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ of the torus $\mathbb{T}^d$ into the covering space $\mathbb{R}^d$ so the rotation S_α maps to a rearrangement S_v of the corresponding sets $X_0', X_1', \ldots, X_s'$ in $\mathbb{R}^d$. In the case $s + 1 \leqslant d + 1$, each set $X_k^d = \pi(X_k')$ is a bounded remainder set and the union $T^d_{c,\lambda} = X_0' \sqcup X_1' \sqcup \ldots \sqcup X_s'$ in $\mathbb{R}^d$ is a toric development for $\mathbb{T}^d$. These developments T^d were built with the help of rearrangement parallelohedra, and the parallelohedra obtained as the Minkowskii sums of the unit cube C^d and intervals. If $d = 3, 4$ we have the Voronoi parallelohedra and the Fedorov rhombic dodecahedron.

In the present paper, by using tilings of multidimensional tori, bounded remainder sets are constructed. The tilings consist of a finite combination of convex polyhedra. A multi-dimension version of Hecke theorem with respect to the uniform distribution of fractional parts on the unit circle is proved for these sets.

Keywords: multi-dimension Hecke theorem, bounded remainder sets, polyhedra.

Bibliography: 9 titles.

Введение

Пусть $r(i, X^1)$ — количество точек орбиты длины i относительно вращения

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod 1$$

окружности единичной длины $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол α, попавших в X^1. Обозначим через

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$$

отклонение функции распределения $r(i, X^1)$ от ее среднего значения $i|X^1|$, где $|X^1|$ означает длину X^1. В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему [1]: если X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, то для отклонения $\delta(i, X^1)$ выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leqslant h \tag{1}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Орен [2] перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов X^1 и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \to \infty \tag{2}$$

Отметим, что интервалы из множества X^1 сами в отдельности могут и не обладать свойством (2).

В общем случае, если X^d принадлежит d-мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие (2), то X^d называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен в [3], где вместо отдельных множеств X_k^d на торе $\mathbb{T}^d$ стали рассматриваться полные разбиения торов

$$\mathbb{T}^d_{c,\lambda} = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \ldots \sqcup X_s^d$$

с некоторыми параметрами c, λ. Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^d & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi\,, \\ & \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d & \end{array} \tag{3}$$

при котором повороту тора S_α отвечает перекладывание S_v некоторых множеств $X_0', X_1', \dots, X_s'$ из $\mathbb{R}^d$. Если число таких множеств X_k' окажется $s + 1 \leqslant d + 1$, то каждый из образов $X_k^d = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR-множеством, а соответствующее объединение

$$T^d_{c,\lambda} = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \ldots \sqcup X'_s$$

из $\mathbb{R}^d$ — торической разверткой для $\mathbb{T}^d$, т.е. фундаментальной областью в пространстве $\mathbb{R}^d$ относительно трансляций кубической решеткой $\mathbb{Z}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы в [4] с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d-мерного единичного куба C^d и отрезков.

В [5] по схеме (3) были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка $X^d = P^d$, являющиеся d-мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин

$$\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2.$$

Для размерностей $d = 1$ и 2 это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ — параллелоэдры Вороного [6], среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова [7]. Для указанных многогранников ограниченного остатка $X^d = P^d$ в [5] доказано неравенство

$$|\delta(i, X^d)| \leqslant dh, \tag{4}$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1). Здесь в неравенстве (4) отклонения $\delta(i, X^d)$ рассматриваются для сдвига тора S_β на вектор $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$, где h — любое натуральное число и l — произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Следующим шагом исследования общих многомерных множеств ограниченного остатка может служить задача о построении более сложные множества X^d, отличных от вытянутых кубов $X^d = P^d$ и их малых деформаций. Основная идея состоит в том, чтобы использовать многоцветные разбиения

$$\mathbb{T}^d_{A,c,\lambda} = X^d_0 \sqcup X^d_1 \sqcup \ldots \sqcup X^d_D$$

тора $\mathbb{T}^d$ с числом областей $D+1 > d+1$, получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений

$$\mathbb{T}^D_{A,c,\lambda} = X^D_0 \sqcup X^D_1 \sqcup \ldots \sqcup X^D_D$$

тора $\mathbb{T}^D$ бóльшей размерности $D > d$. При таком подходе возникают множества ограниченного остатка X^d, представляющие собою конечные объединения d-мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого D-мерного многогранника из разбиения $\mathbb{T}^D_{A,c,\lambda}$, т.е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелоэдра P^D. В теореме 5.1 доказывается, что отклонения $\delta(i, X^d)$ для таких многоцветных множеств ограниченного остатка X^d снова удовлетворяют неравенству (4).

1. Торические развертки

1.1. Перекладывающиеся торические развертки. Пусть дан D-мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L, \tag{1}$$

где L — невырожденная решетка из векторного пространства $\mathbb{R}^D$, т.е. решетка L имеет размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod L. \tag{2}$$

Разверткой T^D тора $\mathbb{T}^D$ назовем такое подмножество T^D из $\mathbb{R}^D$, для которого ограничение фактор-отображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto x \bmod L$$

на указанное подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ задает биекцию

$$T^D \overset{\bmod L}{\underset{\sim}{\rightarrow}} \mathbb{T}^D. \tag{3}$$

Пусть дана торическая развертка T^D, удовлетворяющяя следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D \tag{4}$$

развертки T^D, что если с помощью биекции (3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D, то индуцированное отображение

$$T^D \xrightarrow{S_v} T^D$$

для сдвига тора (2) будет эквивалентно перекладыванию областей $T_0, T_1, \ldots, T_D$ развертки T^D:

$$S_v(x) = x + v(x), \tag{5}$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T^D$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если} \quad x \in T_k, \tag{6}$$

при этом $v_0, v_1, \ldots, v_D$ — некоторая фиксированная система векторов. Развертка T^D, удовлетворяющая условиям (3)–(6), называется *перекладывающейся.*

Заметим, что в силу биекции (3) разбиению (4) развертки T^D отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D \tag{7}$$

тора $\mathbb{T}^D$ на соответствующие области $\mathbb{T}_k \equiv T_k \bmod L$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в *обычном (строгом)* смысле, когда рассматриваются покрытия множеств

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \ldots$$

с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \neq k'$, а также в *расширенном* смысле

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots,$$

предполагая в данном случае, что различные множества X_k, $X_{k'}$ не имеют общих внутренних точек $X_k^{\text{int}} \cap X_{k'}^{\text{int}} = \emptyset$.

1.2. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига. Из определений (2), (5) и (6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \bmod L \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{8}$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D \tag{9}$$

принадлежат основной решетке периодов L тора (1). В дальнейшем на протяжении всей статьи будем предполагать, что L является невырожденной решеткой, порождаемой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D] \tag{10}$$

векторами (9) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\text{векторы} \quad l_1, \ldots, l_D \quad \text{имеют ранг} \quad D \quad \text{над} \quad \mathbb{R}. \tag{11}$$

При этом условии вектор сдвига α можно разложить по данному базису

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_D l_D. \tag{12}$$

Пусть α — произвольный вектор из $\mathbb{R}^D$ с координатами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ в базисе (12). Определим его *ранг относительно решетки* L равенством

$$\operatorname{rank}_L(\alpha) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \tag{13}$$

где

$$M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$$

обозначает *модуль* над кольцом $\mathbb{Z}$, порождаемый числами $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D$;

$$\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D]$$

— размерность этого модуля над $\mathbb{Z}$. Если $\alpha' \subset \mathbb{R}^D$ — другой вектор, удовлетворяющий условию $\alpha' \equiv \alpha \bmod L$, то из определения (13) вытекает равенство

$$\operatorname{rank}_L(\alpha') = \operatorname{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг $\operatorname{rank}_L(\alpha)$ корректно определен для векторов α на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. Из определения (13) также следуют неравенства

$$0 \leqslant \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leqslant D.$$

Назовем вектор α *иррациональным*, если $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*. Это равносильно тому, что вектор α имеет рациональные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ в базисе (12).

Для вектора α отвечающие ему сдвиг S_α тора (2) и перекладывание S_v из (6) будем называть соответствующим образом.

2. Торические развертки и множества ограниченного остатка

2.1. Цветные k-отклонения. Пусть $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D$ — разбиение тора (7), отвечающее разбиению (4) развертки тора T^D. Зададим сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \,\mathtt{mod} L \tag{1}$$

на вектор

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + b \circ l), \tag{2}$$

при этом h — произвольное натуральное число,

$$b \circ l = b_1 l_1 + \cdots + b_D l_D$$

и $b = (b_1, \cdots, b_d) \in \mathbb{Z}^D$ — целый вектор. Из определения следует, что вектор $b \circ l$ принадлежит решетке L. Любому сдвигу тора (1) можно сопоставить *считающую функцию*

$$r_k(i, x_0) = \sharp\{j; S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k; 0 \le j < i\}. \tag{3}$$

По условию L — невырожденная решетка (10). Поэтому для ее базиса $l_1, \ldots \ldots, l_D$ существует двойственный базис $l_1^*, \ldots, l_D^*$, связанный с исходным базисом соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \tag{4}$$

где $x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_D y_D$ — скалярное произведение для $x = (x_1, \ldots x_D)$, $y = (y_1, \ldots y_D)$ из $\mathbb{R}^D$ и δ_{km} — символ Кронекера.

Для $k = 0, 1, \ldots, D$ обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k. \tag{5}$$

Здесь коэффициенты a_k $(k = 1, \ldots, D)$ задаются равенствами

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k, \tag{6}$$

где α_k — координаты (12) вектора α относительно базиса $l_1, \ldots, l_D$, а коэффициент a_0 определяется из равенства

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_D = 1. \tag{7}$$

Назовем $\delta_k(i, x_0)$ отклонением распределения точек *орбиты*

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \bmod L;\ i = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{8}$$

относительно области $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T}^D$, или кратко — *$k$-отклонением* или *цветным отклонением.*

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим его крайние значения

$$\underline{m}_k(X) = \inf\nolimits_{x \in X} \quad l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup\nolimits_{x \in X} \quad l_k^* \cdot x, \tag{9}$$

где векторы $l_1^*, \ldots, l_D^*$ определены в (4) и

$$l_0^* = -l_1^* - \ldots - l_D^*. \tag{10}$$

Относительно отклонений $\delta_k(i, x_0)$ в [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T)\, h \tag{11}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots,$ где константы

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T), \tag{12}$$

не зависят от h, i и определяются исключительно размерами развертки тора $T = T^D$, определенной в (4).

2.2. Вырождение орбит. Пусть вектор сдвига α будет произвольным, т.е. не обязательно иррациональным, и пусть $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ — орбита (8) произвольной начальной точки $x_0 \in T$ относительно сдвига S_β, где вектор сдвига β определен равенством (2). Обозначим $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c$ замыкание орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)$.

Если вектор сдвига α будет максимально иррациональным, то есть иметь ранг $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то вектор β также будет максимально иррациональным. Известно [8], что для указанных β будет выполняться равенство

$$\dim \mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = D$$

и, таким образом, в этом случае выполняется формула

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c = T^c. \tag{13}$$

В общем случае будет выполняться лишь включение

$$\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subseteq T^c, \tag{14}$$

поэтому для констант (12) из (14) будет следовать неравенство

$$c_k(X) \leq c_k(T). \tag{15}$$

Здесь множество X определяется с помощью биекции (3):

$$T^D \supseteq X \quad \overset{\mathrm{mod}\, L}{\overset{\longrightarrow}{\sim}} \quad \mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0)^c \subset \mathbb{T}^D. \tag{16}$$

Если неравенство (15) будет строгим, то, как следствие, в случае произвольного вектора сдвига α мы получим для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ усиление оценки (11).

В этом случае теорема 1 принимает вид [5].

Теорема 2. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X) h \tag{17}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots,$ где константы $c_k(X)$ вычисляются по формуле

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \tag{18}$$

не зависят от h, i и определяются исключительно размерами множества X из (16). Величины $\overline{m}_k(X)$ и $\underline{m}_k(X)$ определены в (9).

2.3. Единичный базис. Константы $c_k(X)$ из теоремы 2 можно конкретизировать, если перейти

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots \quad l_D = -\mathbf{e}_D \tag{19}$$

от базиса (11) к единичному базису

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1). \tag{20}$$

При таком выборе базиса решетка L, определенная в (10), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \tag{21}$$

т.е. будет *кубической решеткой* $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

Если решетка L имеет вид (21), то выполняется следующая теорема [5].

Теорема 3. *Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ выбраны в виде (19) и x_0 — произвольная начальная точки из тора $\mathbb{T}^D$.*

1. Тогда k-отклонения (5) принимают вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D, \tag{22}$$

где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$.

2. Пусть выбран вектор сдвига $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l)$ с произвольным натуральным h и вектором l из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$. Тогда при любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \tag{23}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ с константами

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X),$$

где множество X определено в (16),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup\nolimits_{x \in X} \quad \mathbf{e}_k \cdot x, \qquad \overline{m}_k(X) = -\inf\nolimits_{x \in X} \quad \mathbf{e}_k \cdot x$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\underline{m}_0(X) = \inf\nolimits_{x \in X} \quad \mathbf{e}_0 \cdot x, \qquad \overline{m}_0(X) = \sup\nolimits_{x \in X} \quad \mathbf{e}_0 \cdot x$$

для $k = 0$, где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$.

3. В случае $h = 1$ выполняются точные неравенства:

$$x_{0k} - \sup_{x \in X} \quad \mathbf{e}_k \cdot x \leq \delta_k(i, x_0) \leq x_{0k} - \inf_{x \in X} \quad \mathbf{e}_k \cdot x \tag{24}$$

для $k = 1, \dots, D$, где начальная точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ — записана в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$; и

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leq \delta_0(i, x_0) \leq \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \tag{25}$$

где $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$.

3. Разбиения вытянутых параллелоэдров

3.1. Вытянутые кубы C_s. Приведем из [4] основные понятия и результаты, необходимые нам для дальнейшего. Пусть $C = C^D$ — замкнутый D-мерный *куб*, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Обозначим $\mathbb{R}^D_+$ *положительный конус*, состоящий из $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}^D_+$ определим операцию *вытягивания* $\mathrm{Str}_\mathbf{s}$ произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ как сумму по Минковскому

$$\mathrm{Str}_\mathbf{s}(X) = X + I\mathbf{s} \quad = \bigcup\nolimits_{t\in I} (X + t\mathbf{s}) \tag{1}$$

самого множества X и вложенного в пространство $\mathbb{R}^D$ отрезка $I\mathbf{s} = \{t\mathbf{s};\ t \in I\}$, где $I = [0, 1]$. Условимся $\mathbf{s}$ из (1) называть *вытягивющим вектором.*

Применяя данную операцию к единичному кубу C, построим из него многогранник

$$C_\mathbf{s} = \mathrm{Str}_\mathbf{s}(C), \tag{2}$$

представляющий собою *вытянутый куб*, имеющий объем

$$\mathrm{vol}\, C_\mathbf{s} = \sigma(\mathbf{s}) + 1.$$

Здесь обозначили

$$\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \cdots + s_D$$

для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$. Вытянутые кубы $C_\mathbf{s}$ обладают следующим важным для наших целей свойством ([4], теорема 1.1):

для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^D_+$ имеет место разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l\in L_\mathbf{s}} C_\mathbf{s}[l], \tag{3}$$

где $C_\mathbf{s}[l] = C_\mathbf{s} + l$ — множество, полученное сдвигом куба C_s на вектор l, и

$$L_\mathbf{s} = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,s}, \dots, \mathbf{e}_{D,s}]$$

— полная решетка, порождаемая векторами $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ для $k = 1, \dots, D$.

3.2. Вытянутые параллелоэдры $\mathcal{C}_\mathbf{c}$. Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_\mathbf{s}} \mathbb{R}^D : \quad \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k \quad k = 1, \dots, D \tag{4}$$

задает изоморфизм решеток

$$M_\mathbf{s} : L^+_\mathbf{s} \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{Z}^D$$

и переводит D-мерный единичный куб C в *параллелоэдр*

$$\mathcal{C} = M_\mathbf{s}(C), \tag{5}$$

натянутый соответственно на векторы

$$\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c},$$

где вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = \operatorname{inv}(\mathbf{s}). \tag{6}$$

Здесь

$$\operatorname{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

представляет собою *линейно-инверсное преобразование* пространства $\mathbb{R}^D$.

Согласно (5), вытянутый куб $C_\mathbf{s}$ отображается

$$M_\mathbf{s} : C_\mathbf{s} \longrightarrow \mathcal{C}_\mathbf{c}$$

в многогранник

$$\mathcal{C}_\mathbf{c} = \operatorname{Str}_\mathbf{c}(\mathcal{C}), \tag{7}$$

получающийся вытягиванием параллелоэдра $\mathcal{C}$ вдоль вектора $\mathbf{c}$, связанного с вектором $\mathbf{s}$ формулой (6). *Вытянутый параллелоэдр* $\mathcal{C}_\mathbf{c}$ имеет объем

$$\operatorname{vol} \mathcal{C}_\mathbf{c} = 1 \tag{8}$$

и число вершин $\sharp V(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = 2^{D+1} - 2$.

3.3. Вытягивающие векторы для параллелоэдров. Согласно [5], имеет место биекция

$$\operatorname{inv} : \quad \mathbf{S}_{<1} \overrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1} \tag{9}$$

между $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_+^D$ и множеством

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \tag{10}$$

где $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \ldots + c_D$. Множество $\mathbf{C}_{<1}$ является D-мерным симплексом, замыкание которого содержит $(D-1)$-мерный симплекс

$$\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^D)^c; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}.$$

В [9] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *1. Множество*

$$\mathbf{C}_{\leq 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$$

— внутренность симплекса $\mathbf{C}_1^c$, представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелоэдров (7): любому вектору $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ соответствует $\mathbf{c} \mapsto \mathcal{C}_\mathbf{c}$ — выпуклый параллелоэдр $\mathcal{C}_\mathbf{c}$.

2. Вытянутые параллелоэдры $\mathcal{C}_\mathbf{c}$ разбивают пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_\mathbf{c}[l] \tag{12}$$

на многогранники $\mathcal{C}_\mathbf{c}[l] = \mathcal{C}_\mathbf{c} + l$ без общих внутренних точек.

3.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелоэдров. Используя (12), определим разбиение пространства $\mathbb{R}^D$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]. \tag{13}$$

Обозначим

$$\partial\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$$

множество всех границ разбиения $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$. Для любого $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, $0 < \lambda < 1$, определим множество границ

$$\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cup [\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cap (\partial\mathcal{T}_{\mathbf{c}} - \alpha)] \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}.$$

Границы $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ разбивают вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ на $D+1$ область без общих внутренних точек [5]:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0^c \cup \ldots \cup \mathcal{P}_D^c, \tag{14}$$

где $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 1, \ldots, D$ — параллелоэдры, содедержащие точки

$$e_k = (0, \ldots, \overset{(k)}{1}, \ldots, 0),$$

а

$$\mathcal{P}_0^c = [\mathcal{C}_c \setminus (\mathcal{P}_1^c \cup \ldots \cup \mathcal{P}_D^c)]^c$$

— вытянутый параллелоэдр вида $\mathcal{P}_0^c = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C})$.

Зададим перекладывание

$$S_v(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) \overset{\text{def}}{=} S_v(\mathcal{P}_0^c) \cup S_v(\mathcal{P}_1^c) \cup \ldots \cup S_v(\mathcal{P}_D^c) \tag{15}$$

вытянутого параллелоэдра с разбиением (14), где

$$S_v(\mathcal{P}_k^c) = \mathcal{P}_k^c[v_k] = \mathcal{P}_k^c + v_k$$

— параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}_k^c$ на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если} \quad k > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Перекладывание S_v индуцирует многозначное отображение

$$S_v : \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \tag{17}$$

определяемое условиями

$$x \mapsto S_v(x) = x + v_k, \quad \text{если} \quad x \in \mathcal{P}_k^c.$$

Из ([4], предложение 1.1) вытекает следующее свойство перекладывания $\mathcal{S}_v$.

Предложение 1. *Вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C})$ с разбиением (14) замкнут $S_v(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ относительно операции перекладывания (15).*

Из определения (16) векторов сдвигов v_k вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ для любого $k = 0, 1, \ldots, D$. Отсюда и (17) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D, \tag{18}$$

означающее, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом параллелоэдре $S_v : \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$, если отображение S_v рассмотреть по $\bmod \mathbb{Z}^D$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D.$$

Тогда из (15)-(18) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} & \\ \bmod \mathbb{Z}^D & \downarrow & & \downarrow & \bmod \mathbb{Z}^D. \\ & \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{19}$$

3.5. Построение перекладывающихся торических разверток. Чтобы построить для вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ с разбиением (14) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathbb{R}^D$ (см. определение в п. 1.1), нам потребуется следующий i-алгоритм [4], определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$.

Согласно i-алгоритму, любая точка x из вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ имеет однозначно определенный *индекс*

$$i(x) = -1, 0, 1, \ldots, D.$$

Если точка x принадлежит внутренности некоторого параллелоэдра $\mathcal{P}_k^c$, то она имеет индекс $i(x) = k$. Так что смысл индекса $i(x)$ состоит в том, что он распределяет общие граничные точки между параллелоэдрами $\mathcal{P}_0^c, \mathcal{P}_1^c, \ldots, \mathcal{P}_D^c$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие незамкнутые многогранники

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\} \tag{20}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. Они состоят из всех внутренних точек параллелоэдров $\mathcal{P}_k^c$ и части их граничных точек. Из однозначности индекса $i(x)$ следует $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \emptyset$ с номерами $k_1 \neq k_2$. Так определенные многогранники $\mathcal{P}_k$ обладают следующим свойством [4].

Теорема 5. *Пусть параметр $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ определен равенством $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leqslant 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}_k$ — многогранники (20). Тогда их объединение*

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}_D \tag{21}$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

Итак, любому вытянутому параллелоэдру $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ из (14) i-алгоритм ставит в соответствие

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \quad \Rightarrow \quad T(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) = T_{\mathbf{c},\lambda}^D \tag{22}$$

перекладывающуюся торическую развертку $T^D_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением (21). Ее роль состоит в том, посредством биекции (3) она задает *каноническое разбиение* тора

$$\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{23}$$

на множества $\mathbb{T}^D_k = \mathcal{P}_k \operatorname{mod} \mathbb{Z}^D$, являющиеся по теореме 1 множествами ограниченного остатка.

Из последовательности шагов (14), (22) и (23) получается следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}$.

Общая схема для канонического разбиения тора $\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}$ **:**

$$\mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; T^D_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}. \tag{24}$$

4. Теорема Гекке для BR-многогранников

4.1. Многомерная теорема Гекке. Пусть

$$T^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}_D$$

— перекладывающаяся торическая развертка (21) с заданным на ней перекладыванием S_v (см. определение (5)). Указанной развертке $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$ по схеме (24) соответствует разбиение тора

$$\mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D,$$

на котором определен сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \operatorname{mod} \mathbb{Z}^D$. Введем обозначение (ср. (2))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \tag{1}$$

при этом h — произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j; S^j_\beta(x_0) \in \mathbb{T}^D_k; 0 \le j < i\},$$

где S_β — сдвиг тора на вектор (1) и x_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_D$. Относительно отклонений

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) - i \operatorname{vol}(\mathbb{T}^D_k) \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D \tag{2}$$

доказана следующая теорема [4].

Теорема 6. ***(многомерное обобщение теоремы Гекке).***

1. Пусть $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leqslant 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Тогда в формуле (2) объемы равны

$$\mathrm{vol}(\mathbb{T}_k^D) = \alpha_k \tag{3}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$ и для отклонений (2) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \tag{4}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ Константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формуле

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = \max_{v \in V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v, \tag{5}$$

где $\mathbf{e}_k$ — единичные векторы для $k = 1, \ldots, D$ и $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \cdots - \mathbf{e}_D$. Здесь в (5) через $V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра $\mathcal{C}_c$. Таким образом, константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ в неравенстве (4) не зависят от выбора множителя h в определении (1) вектора сдвига β.

2. Если вектор $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_D$, то константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D-1)c_k \tag{6}$$

для $k = 1, \ldots, D$; и соответственно

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D-1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \tag{7}$$

для $k = 0$.

3. Для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ из (6), (7) выполняется общее неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) \leq D \quad \textit{для любого} \quad \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}. \tag{8}$$

4.2. BR-многогранники. Замкнутые многогранники $\mathcal{P}_k^c$ с номерами $k = 1, \ldots, D$, определенные в (14), допускают простое описание

$$\mathcal{P}_k^c = P_k^c + \omega. \tag{9}$$

Здесь $P_k^c \subset \mathbb{R}^D$ обозначает замкнутый *параллелепипед*, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' = 1, \ldots, D, \quad k' \neq k, \tag{10}$$

где $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ и $\mathbf{e}_{k'}$ — единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D-1)\mathbf{c} - \alpha, \tag{11}$$

где $\mathbf{e}_0 = (1, \ldots, 1)$, является общей для всех могогранников $\mathcal{P}_k^c$ для $k = 0, 1, \ldots \ldots, D$. При этом в случае $k = 0$ многогранник P_0^c также задается равенством (9), в котором полагаем $\omega = 0$ и $\mathcal{P}_0^c$ — вытянутый параллелоэдр вида (см. (7))

$$\mathcal{P}_0^c = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}). \tag{12}$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ и $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$, то из определения (10) следует

$$\operatorname{vol} P_k^c = \alpha_k. \tag{13}$$

В (20) были определены незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k$, содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника $\mathcal{P}_k^c$. Используя $\mathcal{P}_k$, определим соответсвующие незамкнутые многогранники P_k равенством (ср. (9))

$$\mathcal{P}_k = P_k + \omega \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D. \tag{14}$$

Множество $X \subset \mathbb{R}^D$ назовем $\mathbb{Z}^D$-*различимым*, если оно удовлетворяет свойству

$$\forall x, y \in X: \quad x - y \in \mathbb{Z}^D \quad \Rightarrow \quad x = y. \tag{15}$$

Из определения (14) следует, что все многогранники P_k являются $\mathbb{Z}^D$-различимыми, так как, согласно теореме 4.1, все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку $T^D_{\mathbf{c},\lambda}$. Пусть дан произвольный вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h = 1, 2, 3, \ldots$ — такое, что существует вектор α, удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \quad \alpha \equiv h\beta \bmod \mathbb{Z}^D. \tag{16}$$

Обозначим

$$P_k = P_{\beta,h,\lambda,k} \tag{17}$$

многогранники, определенные равенствами (14) для векторов α из (16) и $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leqslant 1$.

Для сдвига S_β тора $\mathbb{T}^D$ и многогранника P_k зададим *считающую функцию*

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \sharp\{j;\ S_\beta^j(x_0) \in P_k \bmod \mathbb{Z}^D,\ 0 \le j < i\},$$

где x_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$; и, принимая во внимание равенство (13), определим отвечающее функции $r(i; \beta, x_0, P_k)$ *отклонение*

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = r(i; \beta, x_0, P_k) - i \operatorname{vol} \mathbb{P}_k^D \tag{18}$$

распределения точек орбиты $\operatorname{Orb}(S_\beta, x_0)$ относительно области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, имеющие, согласно (3) и (13), объемы $\operatorname{vol} \mathbb{P}_k^D = \operatorname{vol} P_k^c = \alpha_k$ для $k = 0, 1, \ldots, D$.

Из теоремы 6 вытекает следствие [5].

Теорема 7. *Пусть даны вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и $h = 1, 2, 3, \ldots$, удовлетворяющие условиям (16), $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leqslant 1$, и пусть $P_k = P_{\beta,h,\lambda,k}$ — отвечающие этим параметрам многогранники (17). При этих условиях имеют место следующие утверждения.*

1. Для отклонений (18) выполняются неравенства

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leqslant h\gamma_k \tag{19}$$

с константами

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)c_k \tag{20}$$

для $k = 1, \ldots, D$ *и*

$$\gamma_k = 1 + (D-1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \tag{21}$$

для $k = 0$, *где* $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_D)$.

2. Также для отклонений выполняется общее неравенство

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leqslant hD. \tag{22}$$

Как уже отмечалось, многогранники P_k, определенные в (14), являются $\mathbb{Z}^D$-различимыми, а из теоремы 7 следует, что относительно сдвига S_β многогранники P_k, если их рассматривать как области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, являются множествами ограниченного остатка. По аналогии с определением (2) многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, BR-*многогранниками.*

Для произвольной размерности D многогранники P_k с номерами $k = 1, \ldots \ldots, D$ по своей конструкции — параллелепипеды (10) — представляют собою простейший вид BR-многогранников. Многогранник P_0 также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, когда $\lambda = 1$. Если же $\lambda < 1$, то P_0 — параллелоэдр с числом вершин $\sharp V(P_k) = 2^{D+1} - 2$.

Заметим, что приведенное во введении неравенство (4) вытекает из неравенства (22).

Далее мы предполагаем построить более сложные BR-множества, состоящие из объединения нескольких многогранников, каждый их которых уже не обязан быть BR-многогранником.

5. Многоцветные разбиения торов

5.1. Вложения торов и торические обмотки. Определим вложение

$$\mathbb{R}^d \overset{\wedge}{\hookrightarrow} \widehat{\mathbb{R}}^d \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^D, \tag{1}$$

полагая $\widehat{x} = (x, 0)$ для $x \in \mathbb{R}^d$. Здесь считает, что $\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, где $D = d + d'$.

Поскольку кубическая решетка $\mathbb{Z}^D$ также разлагается в прямое произведение $\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^{d'}$, то вложение (1) можно факторизовать

$$x \bmod \mathbb{Z}^d \quad \mapsto \quad \widehat{x} \bmod \mathbb{Z}^D \tag{2}$$

в виде вложения

$$\mathbb{T}^d \overset{\wedge}{\hookrightarrow} \widehat{\mathbb{T}}^d \quad \subseteq \quad \mathbb{T}^D \tag{3}$$

тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$. Так определенное вложение (3) согласовано

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{T}^d & \overset{\wedge}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D & \\ S_\alpha & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & S_{\widehat{\alpha}} \\ & \mathbb{T}^d & \overset{\wedge}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{4}$$

с действием соответствующих сдвигов торов

$$S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d, \quad S_{\widehat{\alpha}}(\widehat{x}) \equiv \widehat{x} + \widehat{\alpha} \bmod \mathbb{Z}^D. \tag{5}$$

Укажем, что в (5) при определении сдвига S_α — в отличие от п. 1.1 — мы теперь выбираем d-мерный вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$.

Тор ме́ньшей размерности $\widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D$ будем называть *торической обмоткой* в $\mathbb{T}^D$. Из (3) и (4) следует, что торическая обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d$ — инвариантное множество

$$S_{\widehat{\alpha}} \widehat{\mathbb{T}}^d = \widehat{\mathbb{T}}^d \tag{6}$$

относительно сдвига $S_{\widehat{\alpha}}$.

Начиная с этого места, если не оговорено противное, будем предполать, что вектор сдвига α тора $\mathbb{T}^d$ максимально иррациональный, т.е. $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{Z}^d) = d$.

5.2. Автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$. С помощью автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$ исходя из некторой фиксированной обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ можно получить богатое семейство других торических обмоток на торе $\mathbb{T}^D$. Обозначим $\mathrm{Aut}\,\mathbb{T}^D$ группу автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$. Ее можно разложить в прямое произведение

$$\mathrm{Aut}\,\mathbb{T}^D \simeq \mathrm{Aut}_h \times \mathrm{Aut}_s$$

ее некоммутативной подгруппы гиперболических автоморфизмов $\mathrm{Aut}_h \simeq \simeq \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ и коммутативной подгруппы сдвигов тора $\mathrm{Aut}_s \simeq \mathbb{T}^D$. Здесь $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ обозначает *группу унимодулярных матриц* или, иначе, матриц с целыми коэффициентами определителя ± 1.

1. Гиперболические автоморфизмы тора $\mathbb{T}^D$. Любая матрица $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ следующим образом

$$A : \mathbb{T}^D \overset{\to}{\sim} \mathbb{T}^D : \quad x^D \bmod \mathbb{Z}^D \mapsto Ax^D \bmod \mathbb{Z}^D. \tag{7}$$

Это непосредственно вытекает из свойства $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ быть группой автоморфизмов кубической решетки $\mathbb{Z}^D$: для любого A из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ отображение $x^D \mapsto Ax^D$ задает изоморфизм решетки $\mathbb{Z}^D$.

2. Сдвиги тора $\mathbb{T}^D$. Если элемент $t^D \in \mathbb{T}^D$, то отвечающий ему автоморфизм тора $\mathbb{T}^D$ из подгруппы Aut_s будет обычным сдвигом тора

$$S_{t^D} : \mathbb{T}^D \overset{\to}{\sim} \mathbb{T}^D : \quad x^D \mapsto x^D + t^D \bmod \mathbb{Z}^D. \tag{8}$$

5.3. Согласованность сдвига S_α с автоморфизмами тора $\mathbb{T}^D$. Для произвольного преобразования $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ обозначим

$$A^\wedge \alpha = A\widehat{\alpha} \tag{9}$$

и определим вектор сдвига $\widehat{\alpha}_A$ тора $\mathbb{T}^D$:

$$\widehat{\alpha}_A \equiv A^\wedge \alpha \bmod \mathbb{Z}^D,$$

полагая при этом, что вектор $\widehat{\alpha}_A$ имеет вид

$$\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \dots, \widehat{\alpha}_{A,D}), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \widehat{\alpha}_{A,k} < 1. \tag{10}$$

При автоморфизме тора (7) преобразование сдвига $S_{\widehat{\alpha}}$ переходит в преобразование $S_{\widehat{\alpha}_A}$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbb{T}^D & \overset{A}{\underset{\sim}{\to}} & \mathbb{T}^D & \\ S_{\widehat{\alpha}} & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & S_{\widehat{\alpha}_A}. \\ & \mathbb{T}^D & \overset{A}{\underset{\sim}{\to}} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{11}$$

Из диаграммы (11) и коммутируемости сдвигов

$$S_{t^D} \circ S_{\widehat{\alpha}_A} = S_{\widehat{\alpha}_A} \circ S_{t^D}$$

получаем еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{T}^D & \overset{A_{t^D}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \mathbb{T}^D & \\ S_{\widehat{\alpha}} & \downarrow\!\sim & & \downarrow\!\sim & S_{\widehat{\alpha}_A}, \\ & \mathbb{T}^D & \overset{A_{t^D}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{12}$$

где автоморфизм A_{t^D} тора $\mathbb{T}^D$ определяется как композиция

$$A_{t^D}(x^D) \equiv Ax^D + t^D \mod \mathbb{Z}^D. \tag{13}$$

5.4. Стационарные разбиения тора $\mathbb{T}^d$. Пусть $t = t^D$ и

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} = A_t^{\wedge}\, \mathbb{T}^d = S_t A\, \widehat{\mathbb{T}}^d \subseteq \mathbb{T}^D \tag{14}$$

— торическая обмотка, где полагаем

$$A_t^{\wedge}(x) = A_t(\widehat{x}).$$

Из диаграммы (12) и инвариантности (6) торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ вытекает инвариантность

$$S_{\widehat{\alpha}_A} \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \tag{15}$$

обмотки (14), при этом, как нетрудно убедиться, имеют место следующие коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{T}^d & \overset{A_t^{\wedge}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} & \\ S_{\alpha} & \downarrow\!\sim & & \downarrow\!\sim & S_{\widehat{\alpha}_A} \\ & \mathbb{T}^d & \overset{A_t^{\wedge}}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} & \end{array} \tag{16}$$

и

$$\begin{array}{ccccc} & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} & \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D & \\ S_{\widehat{\alpha}_A} & \downarrow\!\sim & & \downarrow\!\sim & S_{\widehat{\alpha}_A}. \\ & \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} & \overset{\mathrm{id}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{17}$$

Здесь id обозначает тождественное вложение обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d$ в содержащий ее тор $\mathbb{T}^D$.

Пусть вектор сдвига α будет иррациональным. Для таких α в [9] доказано, что существуют преобразования A из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ с условием

$$\sigma(\widehat{\alpha}_A) < 1, \tag{18}$$

где

$$\sigma(\widehat{\alpha}_A) = \widehat{\alpha}_{A,1} + \ldots + \widehat{\alpha}_{A,D}$$

для вектора (10). Неравенство (18) означает, что $\widehat{\alpha}_A$ принадлежит

$$\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{<1} \tag{19}$$

— множеству параметров (10). Определим вектор $\mathbf{c}$ равенством

$$\widehat{\alpha}_A = \lambda \mathbf{c}, \quad \text{где} \quad \sigma(\widehat{\alpha}_A) < \lambda \le 1. \tag{20}$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{c}$ также, как и вектор $\widehat{\alpha}_A$, удовлетворяет условию

$$\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}. \tag{21}$$

Для таких векторов $\mathbf{c}$ по схеме (24) мы можем построить

$$\mathbb{T}^D_{c,\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{22}$$

— каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$. Используя разбиение (22) и вложение (17), можем естественным образом задать разбиение торической обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \subset \mathbb{T}^D$, полагая

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,c,\lambda} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,0} \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,1} \sqcup \ldots \sqcup \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,D}, \tag{23}$$

где

$$\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \cap \mathbb{T}^D_k$$

и множества $\mathbb{T}^D_k$ взяты из разбиения (22).

Теперь с помощью изоморфизма (2) мы можем перенести разбиение (23) обмотки $\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t}$ на изоморфный ей тор $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}^d_{A_t,c,\lambda} = \mathbb{T}^d_{A_t,0} \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^d_{A_t,D}. \tag{24}$$

Разбиение $\mathbb{T}^d_{A_t,c,\lambda}$ назовем *стационарным* разбиением тора $\mathbb{T}^d$. Такое название обусловлено тем, что в п. 7.1 мы определим еще другой вид, так называемых, динамических разбиений.

5.5. Распределение точек орбит на торе $\mathbb{T}^D$: общий случай. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x^D_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j; S^j_{\widehat{\beta}_A}(x^D_0) \in \mathbb{T}^D_k; 0 \le j < i\} \tag{25}$$

для сдвига тора $S_{\widehat{\beta}_A}$ на вектор $\widehat{\beta}_A = A^\wedge\beta$. Здесь x^D_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$ и

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d), \tag{26}$$

где h — произвольное натуральное число и l^d из решетки $\mathbb{Z}^D$. Обозначим

$$\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x^D_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i; \widehat{\beta}_A, x^D_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}) - i\widehat{\alpha}_{A,k} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D \tag{27}$$

— отклонение распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}(S_{\widehat{\beta}_A}, x_0)$ относительно области $\mathbb{T}^D_k$ на торе $\mathbb{T}^D$, где согласно (19) координаты вектора $\widehat{\alpha}_A = (\widehat{\alpha}_{A,1}, \ldots, \widehat{\alpha}_{A,D})$ удовлетворяют условиям:

$$\widehat{\alpha}_{A,1} + \ldots + \widehat{\alpha}_{A,D} < 1 \quad \text{и} \quad \widehat{\alpha}_{A,k} > 0. \tag{28}$$

Аналогично, как это было сделано в теореме 3, дополнительно определяем нулевую координату

$$\widehat{\alpha}_{A,0} = 1 - \widehat{\alpha}_{A,1} - \ldots - \widehat{\alpha}_{A,D} = 1 - \sigma(\widehat{\alpha}_A). \tag{29}$$

Из (28) следует, что $\widehat{\alpha}_{A,0} > 0$. Тогда, согласно теореме 6, для отклонений (27) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \widehat{\beta}_A, x_0^D, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \tag{30}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ в силу (6) и (7) вычисляются по следующим формулам:

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D-1)c_k \tag{31}$$

для $k = 1, \ldots, D$ и

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})) \tag{32}$$

для $k = 0$, где вектор $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_D)$ определен в (20). Для констант $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ из формул (31) и (32) вытекает грубое неравенство

$$c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) < D \tag{33}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, D$.

5.6. Отклонения на $\mathbb{T}^d$: стационарный случай. Выберем произвольную начальную точку x_0^d на торе $\mathbb{T}^d$ и для стационарного разбиения $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$ из (15) определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j;\, S^j_\beta(x_0^d) \in \mathbb{T}^D_{A_t,k};\ 0 \leq j < i\}, \tag{34}$$

а также отклонение

$$\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) - i\,\widehat{\alpha}_{A,k} \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D \tag{35}$$

распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\beta}(x_0^d)$ относительно области $\mathbb{T}^D_{A_t,k}$ из разбиения тора $\mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}$, определенного в (24).

Теорема 8. *1. Пусть параметр* $\mathbf{c}$ *определен равенством (20), где* $\widehat{\alpha}_A \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ *для некоторого преобразования* $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$. *Тогда для отклонений (35) имеют место неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})| \leq c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})h \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D, \tag{36}$$

где константы $c_k(\mathcal{C}_{\mathbf{c}})$ *определены в (31) и (32).*

2. При тех же условиях, независимо от выбора параметра $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{<1}$, *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda})| < Dh \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D. \tag{37}$$

Доказательство. Пусть вектор сдвига $\widehat{\beta}_A$ определен согласно (10). Так как по условию $\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l^d)$, где $l^d \in \mathbb{Z}^D$, то обмотка $\widehat{\mathbb{T}}^d \subset \mathbb{T}^D$ инвариантна $S_{\widehat{\beta}}(\widehat{\mathbb{T}}^d) = \widehat{\mathbb{T}}^d$ относительно сдвига $S_{\widehat{\beta}}$. Отсюда следует инвариантность

$$S_{\widehat{\beta}_A}\widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} = \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t} \tag{38}$$

обмотки (14).

Пусть $x_0^D = A_t^\wedge x_0^d$. Согласно коммутативной диаграмме (17), имеем согласование

$$S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k} \quad \Leftrightarrow \quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D) \in \mathbb{T}^D_k,$$

а в силу диаграммы (16) и (38) — еще одно согласование

$$S^j_{\beta}(x_0^d) \in \mathbb{T}^d_k \quad \Leftrightarrow \quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D) \in \widehat{\mathbb{T}}^d_{A_t,k}.$$

Отсюда для любого k выводим равносильность

$$S^j_{\beta}(x_0^d) \in \mathbb{T}^d_{A_t,k} \quad \Leftrightarrow \quad S^j_{\widehat{\beta}_A}(x_0^D) \in \mathbb{T}^D_k. \tag{39}$$

Из определений (34), (35) и согласования (39) для любого i вытекает равенство отклонений

$$\delta_k(i;\beta, x_0^d, \mathbb{T}^d_{A_t,\mathbf{c},\lambda}) = \delta_k(i;\widehat{\beta}_A, x_0^D \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda}), \tag{40}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. Теперь из равенства (40) и теоремы 6 следуют неравенства (36) и (37). □

6. Заключение

Чтобы продвигаться дальше, было бы интересно на первом шаге более подробно рассмотреть случай $d = 1$, когда описанным выше методом получаются конечные разбиения

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{T}^1_{A_t,\mathbf{c},\lambda} \quad \subset \quad \mathbb{T}^1$$

единичной окружности или, что равносильно — единичного полуинтервала $\mathbb{T}^1$. По теореме 8 разбиения $\mathbb{X}^1$ состоят

$$\mathbb{X}^1 = \mathbb{X}^1_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{X}^1_D \tag{41}$$

из множеств ограниченного остатка $\mathbb{X}^1_k$ для $k = 0, 1, \ldots, D$.

Каждое такое $\mathbb{X}^1_k$ есть конечное объединение полуинтервалов и при этом для отклонений $\delta_k(i;\beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i;\beta, x_0^1, \mathbb{X}^1)| \le c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})h \tag{42}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

С другой стороны, ранее [2] Орен также рассматривал конечные объединения полуинтервалов X^1 и для них получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \to \infty. \tag{43}$$

Более того, А. В. Шутов [10] получил явные оценки в (43).

Из сопоставления двух оценок (42) и (43) сразу возникает несколько задач.

1. Образуют ли совокупности всех множеств $\mathbb{X}^1_k$ из (41) и X^1 из (43) один и тот же класс множеств ограниченного остатка на $\mathbb{T}^1$.

2. Как ведут себя отклонения из (42) с ростом размерности $D \to \infty$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^D$.

3. Описать развертки T^D тора $\mathbb{T}^D$, минимизирующие границы отклонений в неравенствах (42).

4. Чему соответствуют размерность D и развертки тора T^D в терминах работ [2] и [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Bd. 1. S. 54–76.

2. Oren I. Admissible functionswithmultiple discontinuities // Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City. 1981. Vol. V. I. P. 217—230.

3. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.

4. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95—145.

5. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка. Математика и информатика, 1 — К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. — Совр. пробл. матем. Москва: МИАН, 2012. 128 с.

6. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. т. 2. Киев: Из-во АН Украинской ССР, 1952. 420 с.

7. Федоров Е. С. Начала учения о фигурах. Москва: Из-во АН СССР, 1953. 418 с.

8. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352.

9. Журавлев В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 97–136.

10. Шутов А. В. Проблема Гекке – Кестена для нескольких интервалов // Чебышевский сб. 2011. Т. 12, вып. 1. С. 172—177.

REFERENCES

1. Hecke, E. 1922, "Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 1*, no. 1, pp. 54–76. (German)

2. Oren, I. 1981, "Admissible functionswithmultiple discontinuities", *Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City*, vol. V. I., pp. 217—230.

3. Zhuravlev, V. G. 2012, "A multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 1, pp. 95–130. (Russian); translation in St. Petersburg Math. J. 2013. vol. 24, no. 1, pp. 71–97.

4. Zhuravlev, V. G. 2011, "Exchanged toric developments and bounded remainder sets", *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 392, Analiticheskaya Teoriya Chisel i Teoriya Funktsii. 26, pp. 95–145, 219–220. (Russian); translation in J. Math. Sci. (N. Y.) 184 (2012), no. 6, pp. 716–745.

5. Zhuravlev, V. G. 2012, "Polyhedra bounded remainder", *Mathematics and informatics, 1 — the 75th anniversary of Anatolia Alekseevicha Karatsuba. — Sovrem. probl. Mat. Moscow, Steklov Mathematical Institute*, 2012. 128 p. (Russian)

6. Voronoi, G. F. 1952, 1953, "Sobranie socinenii v treh tomah", [Collected works in three volumes.] *Izdatel'stvo Akademii Nauk Ukrainskoi SSR, Kiev*, vol. I, 1952, 399 p.; vol. II, 1952, 391 p.; vol. III, 1953, 306 p. (Russian)

7. Fedorov, E. S. 1953, "Nacala uceniya o figurah", [Elements of the study of figures.] *Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow*, 410 p. (Russian)

8. Weyl, H. 1916, "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins", *Math. Ann.* Bd. 77. S. 313–352.

9. Zhuravlev, V. G. 2012, "Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words", *Algebra i Analiz*, vol. 24, no. 4, pp. 97–136. (Russian); translation in St. Petersburg Math. J. 2013, vol. 24, no. 4, pp. 601–629.

10. Shutov, A. V. 2011, "The Hecke-Kesten problem for some integrals", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 12, no. 1(37), pp. 172–177. (Russian)

Владимирский государственного университета им. братьев Столетовых.
Поступило 15.04.2015