И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов, О телах, связанных с обертывающими алгебрами алгебр Ли, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 3, 503–505

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 3

УДК 519.46 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР И. М. ГЕЛЬФАНД, А. А. КИРИЛЛОВ

О ТЕЛАХ, СВЯЗАННЫХ С ОБЕРТЫВАЮЩИМИ АЛГЕБРАМИ АЛГЕБР ЛИ

Во многих вопросах анализа естественно возникают некоммутативные кольца. В качестве примеров можно указать кольца операторов в гильбертовом пространстве, дифференциальных операторов на гладком многообразии, операторов квантовой теории поля, групповые кольца группы и обертывающие алгебры алгебр Ли. Один из наиболее общих и интересных примеров — это кольцо всех дифференциальных операторов на гладком многообразии X, инвариантных относительно заданной группы G диффеоморфизмов X. Изучение алгебраической структуры этого кольца существенно для анализа.

В настоящей заметке мы ограничиваемся только частным случаем таких колец — обертывающими алгебрами алгебр Ли. Так же как в алгебраической геометрии, ситуация здесь упрощается, если встать на бирациональную точку зрения и вместо колец рассматривать тела отношений. Перейдем к точным определениям.

Пусть G — алгебра Ли, определенная над полем L характеристики 0, $U(G)$ — обертывающая алгебра алгебры G. Можно показать, что $U(G)$ является (двусторонней) областью Оре, т. е. кольцом без делителей нуля, в котором любые два элемента имеют общее (правое и левое) кратное. Поэтому можно определить тело отношений алгебры $U(G)$, каждый элемент которого можно записать в виде ab^{-1} и в виде $c^{-1}d$, где $a, b, c, d \in U(G)$. Мы будем обозначать это тело $D(G)$ и называть телом Ли алгебры G. Центр $D(G)$ обозначим через $C(G)$.

Пусть теперь K — произвольное тело над полем L. Определим размерность K над L следующей формулой:

$$\mathrm{Dim}_L K = \sup_{\alpha} \inf_{b\neq 0} \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\ln d(\alpha b, N)}{\ln N}, \tag{1}$$

где $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ — произвольный конечный набор элементов из K; $\alpha b = (a_1 b, a_2 b, \ldots, a_s b)$; $d(\alpha, N)$ — размерность подпространства в K, состоящего из всех элементов, которые можно записать в виде многочлена степени $\leqslant N$ (с коэффициентами из L) от элементов набора α. Для случая, когда тело K коммутативно, введенное нами понятие размерности совпадает, как легко проверить, со степенью трансцендентности.

Теорема 1. *Пусть A — алгебра над полем L характеристики 0. Предположим, что в A существует такая фильтрация*

$$L = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots; \quad A_k A_l \subset A_{k+l},$$

что присоединенная градуированная алгебра

$$\mathrm{gr}\, A = \sum A_k / A_{k-1}$$

изоморфна алгебре всех многочленов от n переменных (градуировка в которой не обязана совпадать со стандартной).

Тогда A является областью Оре и тело отношений K алгебры A имеет размерность n.

Доказательство этой теоремы использует следующее свойство тела K. Пусть p_i — естественная проекция A_i на $A_i / A_{i-1} \subset \operatorname{gr} A$. Для каждого ненулевого элемента $a \in A$ существует единственное число i, для которого $p_i(a) \neq 0$. Мы будем называть $p_i(a)$ *старшим членом элемента* a и обозначать $[a]$.

Каждый элемент $b \in K$ может быть записан в виде $a_1 a_2^{-1}$, $a_1, a_2 \in A$. Оказывается, что рациональная функция $[a_1] / [a_2]$ зависит только от элемента b, а не от его записи в виде $a_1 a_2^{-1}$. Обозначим эту функцию через $[b]$.

Лемма 1. *Отображение $b \to [b]$ является гомоморфизмом мультипликативной группы тела K в группу рациональных функций вида PQ^{-1}, где P, Q — однородные многочлены (вообще говоря, разной степени) от n переменных.*

Эта лемма полезна также при изучении автоморфизмов тела K.

Пусть теперь G — алгебраическая алгебра Ли. Тогда имеет место

Теорема 2. *Числа n и k, определенные равенствами*

$$2n + k = \operatorname{Dim}_L D(G), \quad k = \operatorname{Dim}_L C(G), \tag{2}$$

являются целыми неотрицательными. Кроме того, справедливы равенства

$$2n + k = \dim G, \quad k = \operatorname{codim} O, \tag{3}$$

где O — орбита общего положения в представлении, сопряженном к присоединенному, для алгебраической группы, соответствующей алгебре Ли G.

Наша основная гипотеза состоит в том, что для алгебраических алгебр Ли числа n и k определяют тело $D(G)$ с точностью до изоморфизма.

Обозначим через $D_{n,k}(L)$ тело, порожденное над полем L элементами $x_1, \ldots, x_n$, $\partial / \partial x_1, \ldots, \partial / \partial x_n$, $y_1, \ldots, y_k$ с естественными соотношениями:

$$x_i y_j - y_j x_i = 0, \quad y_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} y_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} x_i - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Тело $D_{n,k}(L)$ играет роль стандартной модели. Центр $D_{n,k}(L)$, как легко проверить, совпадает с подтелом $D_{0,k}(L) \subset D_{n,k}(L)$. Из теоремы 1 вытекает, что

$$\operatorname{Dim}_L D_{n,k}(L) = 2n + k.$$

Основная гипотеза, о которой мы говорили выше, может быть уточнена следующим образом.

(Т). Тело $D(G)$ изоморфно $D_{n,k}(L)$, где числа n и k определены равенствами (2) или (3).

Теорема 3. *Гипотеза* (Т) *справедлива в следующих случаях*: 1) *G — произвольная нильпотентная алгебра Ли,* 2) *G — полная матричная алгебра Ли или алгебра Ли матриц со следом нуль;* 3) *G — полупростая алгебра Ли ранга 2 над алгебраически замкнутым полем.*

Доказательство теоремы 3 проводится совершенно различными способами в каждом из этих случаев. Мы укажем основные этапы доказательств в каждом случае.

1) Гипотеза (Т) заменяется следующим утверждением. В алгебре $U(G)$ существуют элементы $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_k$, которые порождают тело $D(G)$ и удовлетворяют соотношениям

$$x_i x_j - x_j x_i = y_i y_j - y_j y_i = z_i z_j - z_j z_i = x_i z_j - z_j x_i = y_i z_j - z_i y_j = 0;$$
$$x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} C,$$

где C — ненулевой элемент центра $U(G)$.

Это утверждение доказывается индукцией по размерности алгебры G. При этом используются некоторые результаты Диксмье ([1]) и одного из авторов ([2]), касающиеся связи $U(G)$ и $U(G_0)$, где G_0 — идеал коразмерности 1 в G.

2) Рассматривается вспомогательная алгебра Ли G_n, изоморфная алгебре матриц порядка $n+1$, у которых последняя строка состоит из нулей. Справедливость гипотезы (T) для матричных алгебр G вытекает из результатов одного из авторов о структуре центра алгебры $U(G)$ ([3]) и справедливости гипотезы для G_n. Последнее утверждение доказывается индукцией по n на основе следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть e_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n+1$,— естественный базис в G_n. Обозначим через D' подтело $D(G_n)$, состоящее из всех элементов, перестановочных с e_{ii} и $e_{i,n+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда тело D' изоморфно $D(G_{n-1})$.*

Отсюда вытекает, что $D(G_n) \simeq D_{n(n+1)/2,\,0}(L)$.

3) Доказывается непосредственным построением базиса в $D(G)$, обладающего нужными свойствами. Построение облегчается тем, что тело $D(G)$ порождается подтелом, натянутым на максимальную разрешимую подалгебру M в G, и подтелом, состоящим из элементов, перестановочных с элементами из M.

Поступило
8 XII 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Dixmier, Bull. Soc. Math. France, 85, 325 (1957). [2] А. А. Кириллов, УМН, 17, № 4, 57 (1962). [3] И. М. Гельфанд, Матем. сборн., 26, № 1, 103 (1950).