А. Марков, Неразрешимость проблемы гомеоморфии, *Докл. АН СССР*, 1958, том 121, номер 2, 218–220

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 121, № 2

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. МАРКОВ

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ГОМЕОМОРФИИ

1. Будем называть проблемой гомеоморфии проблему разыскания алгорифма, распознающего для любых двух данных полиэдров, гомеоморфны ли они. Полиэдры при этом задаются комбинаторно их триангуляциями, что дает возможность понимать здесь термин «алгорифм» в его точном смысле, т. е., например, как «нормализуемый алгорифм» ([3]).

Наряду с общей проблемой гомеоморфии естественно возникают различные частные проблемы гомеоморфии, относящиеся к полиэдрам того или иного класса. Можно, например, фиксируя натуральное число n, ставить проблему гомеоморфии для полиэдров размерности не выше n. Можно также ставить проблему гомеоморфии для n-мерных многообразий, если условиться в определенном понимании термина «многообразие».

Другим естественным ограничением, налагаемым на сравниваемые полиэдры, является фиксация одного из них. При этом возникает проблема гомеоморфии данному полиэдру A, состоящая в разыскании алгорифма, распознающего для любого полиэдра, гомеоморфен ли он полиэдру A.

Некоторые из этих проблем давно решены, например, проблема гомеоморфии 2-мерных многообразий или проблема гомеоморфии данному 2-мерному многообразию. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякого натурального числа n, большего трех, можно указать такое n-мерное многообразие M^n, что проблема гомеоморфии многообразий многообразию M^n явится неразрешимой.*

Термин «многообразие» мы понимаем здесь в смысле Пуанкаре ([4]) и Веблена ([5]).

Следствие 1. *Проблема гомеоморфии n-мерных многообразий неразрешима при $n > 3$.*

Следствие 2. *Проблема гомеоморфии полиэдров размерности не выше n неразрешима при $n > 3$.*

Следствие 3. *Общая проблема гомеоморфии неразрешима.*

2. Доказательство теоремы 1 основано на следующем построении. Для любого натурального числа r рассматривается $2r$-буквенный алфавит

$$\Gamma_r = \{\alpha_1^1, \ldots, \alpha_r^1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha^{-1}\}.$$

Для любого r и любой системы слов P_i $(i = 1, \ldots, m)$ в алфавите Γ строится 4-мерное многообразие $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ таким образом, чтобы соблюдались следующие условия.

У1. Фундаментальная группа многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ изоморфна группе, определяемой системой соотношений

$$P_i \leftrightarrow \Lambda \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

между производящими элементами $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_r^1$. Буквы $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r^{-1}$ рассматриваются при этом как элементы, обратные элементам $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_r^1$ *.

* Соответствующее этой группе групповое исчисление (см. ([3]), стр. 341) в алфавите Γ_r может быть определено системой соотношений, получаемой из системы (1) после присоединения соотношений $\alpha_i^\varepsilon \alpha_i^{-\varepsilon} \longleftrightarrow \Lambda$ $(i = 1, \ldots, r;\ \varepsilon = \pm 1)$.

У2. Многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ $\mathfrak{M}(Q_1 * \ldots * P_m * r)$ гомеоморфны, если система слов $Q_1 * \ldots * Q_m$ получается из системы слов $P_1 * \ldots * P_m$ в результате подстановки пустого слова вместо вхождения слова $\alpha_i^\varepsilon \alpha_i^{-\varepsilon}$ $(i = 1, \ldots, r;\ \varepsilon = \pm 1)$.

У3. Многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ и $\mathfrak{M}(Q_1 * \ldots * Q_m * r)$ гомеоморфны, если среди чисел $1, \ldots, m$ имеется число i такое, что Q_i есть результат циклической перестановки букв в слове P_i и что

$$Q_j = P_j \tag{2}$$

при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $j \neq i$.

У4. Многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ и $\mathfrak{M}(Q_1 * \ldots * Q_m * r)$ гомеоморфны, если среди чисел $1, \ldots, m$ имеется число i такое, что Q_i есть групповое обращение слова P_i и что при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $j \neq i$ имеет место равенство (2).

Групповое обращение слова P в алфавите Γ_r мы определяем здесь как слово, получаемое из P в результате изменения порядка букв на обратный с последующей заменой всякой буквы α_i^ε буквой $\alpha_i^{-\varepsilon}$.

У5. Многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ и $\mathfrak{M}(Q_1 * \ldots Q_m * r)$ гомеоморфны, если среди чисел $1, \ldots, m$ имеются числа i и h такие, что $i \neq h$,

$$Q_i = P_i P_h$$

и что при $1 \leqslant j \leqslant m$ и $j \neq i$ имеет место равенство (2).

У6. Многообразия $\mathfrak{M}(*^k \alpha_1^1 * \ldots * \alpha_r^1 * r)$ и $\mathfrak{M}(*^k 0)$ гомеоморфны, каково бы ни было натуральное число k.

Построение многообразия $\mathfrak{M}(P_1 * \ldots * P_m * r)$ может быть проведено как некоторое уточнение указанного Зейфертом и Трельфаллем построения 4-мерного многообразия с заданой фундаментальной группой (см. ([2]), стр. 208).

Лемма 1. *Если группа с производящими элементами* $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_r^1$, *определяемая системой соотношений*

$$R_i \leftrightarrow \Lambda \ (i = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

в алфавите Γ_r, *единична, то многообразие* $\mathfrak{M}(R_1 * \ldots * R_k *^{r+1} r)$ *гомеоморфно многообразию* $\mathfrak{M}(*^k 0)$.

Лемма 2. *Если группа, о которой идет речь в лемме* 1, *не единична, то многообразие* $\mathfrak{M}$ $(R_1 * \ldots * R_k *^{r+1} r)$ *не гомеоморфно многообразию* $\mathfrak{M}(*^k 0)$.

Фиксируем теперь натуральные числа r и k. Будем рассматривать группы с производящими элементами $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_r^1$, определяемые всевозможными системами k соотношений (3) в алфавите Γ_r. Будем называть такие группы (r, k)-группами.

Из лемм 1 и 2 вытекает, что с помощью всякого алгорифма, распознающего для любого многообразия, гомеоморфно ли оно многообразию $\mathfrak{M}(*^k 0)$, может быть построен алгорифм, распознающий для всякой (r, k)-группы, является ли она единичной. Между тем, из построения, проведенного С. И. Адяном в работе ([1]), следует, что числа r и k могут быть заданы так, что алгорифм, распознающий единичность (r, k)-группы, не будет возможен. Возьмем такую пару чисел (r, k) и положим

$$M^4 = \mathfrak{M}(*^k 0).$$

Тогда проблема гомеоморфии многообразий 4-мерному многообразию M^4 окажется неразрешимой.

Наконец, нетрудно видеть, что для всякого натурального числа n, большего четырех, неразрешима проблема гомеоморфии n-мерному многообразию

$$M^n = M^4 \times S^{n-4},$$

где S^h означает h-мерную сферу.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

3. Аналогично проблемам гомеоморфии могут быть поставлены проблемы гомотопической эквивалентности. Их формулировки получаются из формулировок проблем гомеоморфии путем замены слов «гомеоморфны», «гомеоморфен», «гомеоморфно» словами «гомотопически эквивалентны», «гомотопически эквивалентен», «гомотопически эквивалентно». Но такая замена, очевидно, допустима в леммах 1 и 2. Это дает следующие результаты.

Теорема 2. *Для всякого натурального числа n, большего трех, проблема гомотопической эквивалентности многообразий многообразию M^n неразрешима.*

Следствие 1. *Проблема гомотопической эквивалентности n-мерных многообразий неразрешима при $n>3$.*

Следствие 2. *Проблема гомотопической эквивалентности полиэдров размерности не выше n неразрешима при $n>3$.*

Следствие 3. *Общая проблема гомотопической эквивалентности неразрешима.*

Поступило
21 III 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. И. Адян, ДАН, **103**, № 4, 533 (1955). [2] Г. Зейферт, В. Трельфалль, Топология, М.— Л., 1938. [3] А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **42** (1954). [4] H. Poincaré, Rend. Circolo Mat. Palermo, **13**, 285 (1899). [5] O. Veblen, Analysis Situs, N. Y., 1931.