Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Г. Ш. Тамасян, Градиентные методы в вариационной задаче со свободными концами,
Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2012, выпуск 4, 77–84

https://www.mathnet.ru/vspui96

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
14 декабря 2025 г., 19:14:53

УДК 519.85

Г. Ш. Тамасян

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ*)

Введение. В [1] продемонстрирована эффективная техника применения негладкого анализа [2] и теории точных штрафных функций [1, 3] в решении различных задач вариационного исчисления [4, 5]. В данной работе представлены результаты использования указанного в [1] подхода к задаче со свободными (подвижными) концами [6–8]. Получены в «новой» форме необходимые условия экстремума, а на их основе построены численные алгоритмы (прямые методы) наискорейшего спуска (МНС) и метод сопряженных градиентов (направлений) (МСГ) [1, 4, 5]. Из них элементарным образом выводятся «естественные краевые» условия [6–8].

Постановка задачи со свободными концами. Пусть $T > 0$ фиксировано. Через $P^2[0,T]$ обозначим класс непрерывно-дифференцируемых на $[0,T]$ функций с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0,T]$ второй производной.

Начнем изучение данной проблемы со случая фиксированного правого конца. Пусть заданы x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Задача. Среди кривых, принадлежащих классу $P^2[0,T]$, удовлетворяющих условиям $x(T) = x_1$, $x'(T) = x_2$ и имеющих левый конец на прямой, параллельной оси ординат $t = 0$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$I(x) = \int_0^T F(x(t), x'(t), x''(t), t)\, dt, \tag{1}$$

где функцию F будем считать непрерывно-дифференцируемой по всем своим аргументам на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T]$.

Рассмотрим множество

$$\Omega_0 = \left\{ x \in P^2[0,T] \;\middle|\; x(T) = x_1, \quad x'(T) = x_2 \right\}. \tag{2}$$

Переформулируем поставленную выше задачу (1), (2). Обозначим через $z(t) = x''(t)$, тогда

$$x'(t) = x_2 - \int_t^T z(\tau)\, d\tau, \qquad x(t) = x_1 + (t-T)x_2 + \int_t^T \int_\tau^T z(\gamma)\, d\gamma d\tau. \tag{3}$$

Тамасян Григорий Шаликович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории моделирования систем управления факультета прикладной математики–процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета. Количество опубликованных работ: 20. Научные направления: недифференцируемая оптимизация, негладкий анализ, вариационное исчисление, теория управления, вычислительная геометрия. E-mail: grigoriytamasjan@mail.ru.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00752).

© Г. Ш. Тамасян, 2012

Введем функционал

$$f(z) = \int\limits_0^T F\big(x_1 + (t-T)x_2 + \int\limits_t^T \int\limits_\tau^T z(\gamma)\, d\gamma d\tau, x_2 - \int\limits_t^T z(\tau)\, d\tau, z(t), t\big) dt.$$

Несложно показать, что задача (1), (2) $I(x) \longrightarrow \min\limits_{x\in\Omega_0}$ эквивалентна задаче минимизации функционала $f(z)$ на всем пространстве $P[0,T]$. Здесь $P[0,T]$ – множество кусочно-непрерывных, ограниченных на отрезке $[0,T]$ функций. Действительно, любой функции $z \in P[0,T]$ с помощью формул (3) сопоставляется функция $x \in \Omega_0$, т. е. удовлетворяющая ограничениям на правом конце $x(T) = x_1$, $x'(T) = x_2$.

Пусть z_1, $z_2 \in P[0,T]$. На множестве $P[0,T]$ введем в рассмотрение следующие метрики:

$$\rho_1(z_1, z_2) = \max_{t\in[0,T]} \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \big(z_1(\gamma) - z_2(\gamma)\big)\, d\gamma d\tau \right|,$$

$$\rho_2(z_1, z_2) = \max_{t\in[0,T]} \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \big(z_1(\gamma) - z_2(\gamma)\big)\, d\gamma d\tau \right| + \max_{t\in[0,T]} \left| \int\limits_0^t \big(z_1(\gamma) - z_2(\gamma)\big)\, d\gamma \right| +$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} \Big| z_1(t) - z_2(t) \Big|,$$

$$\rho_3(z_1, z_2) = \sup_{t\in[0,T]} \Big| z_1(t) - z_2(t) \Big|.$$

Между метриками ρ_1, ρ_2 и ρ_3 существует такая связь:

$$\rho_1(z_1, z_2) \leqslant \rho_2(z_1, z_2) \leqslant \left[1 + T + \frac{T^2}{2!}\right] \rho_3(z_1, z_2),$$

$$\rho_1(z_1, z_2) \leqslant \frac{T^2}{2} \rho_3(z_1, z_2), \qquad \rho_3(z_1, z_2) \leqslant \rho_2(z_1, z_2).$$

Таким образом, метрика ρ_3 мажорирует метрики ρ_2 и ρ_1, а метрика ρ_2 – метрики ρ_1 и ρ_3. Отсюда следует, что метрики ρ_2 и ρ_3 эквивалентны.

Пусть $\varepsilon > 0$. Если $z_* \in P[0,T]$ – точка локального минимума функционала f на множестве $P[0,T]$, то справедливы включения

$$\left\{ z \mid \rho_3(z, z_*) < \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{2} \frac{T^k}{k!} \right]^{-1} \right\} \subset \Big\{ z \mid \rho_2(z, z_*) < \varepsilon \Big\} \subset \Big\{ z \mid \rho_1(z, z_*) < \varepsilon \Big\}.$$

Отсюда заключаем, что точка локального минимума функции f на множестве $P[0,T]$ в метрике ρ_1 является точкой локального минимума и в метрике ρ_2, и в метрике ρ_3. В силу эквивалентности метрик ρ_2 и ρ_3 точка локального минимума f в метрике ρ_2 есть точка локального минимума и в метрике ρ_3 (справедливо и обратное). Теперь заметим, что если $z_* \in P[0,T]$ – точка локального минимума функционала f на множестве $P[0,T]$ с метрикой ρ_1, то функция $x_*(t)$ (3) принадлежит множеству Ω_0 и является сильной экстремалью функционала $I(x)$ на множестве Ω_0.

Если же $z_* \in P[0,T]$ – это точка локального минимума функционала f на множестве $P[0,T]$ с метрикой ρ_2 или ρ_3, то функция $x_*(t)$ (3) есть слабая экстремаль функционала $I(x)$ на множестве Ω_0.

Пусть $z \in P[0,T]$ фиксировано, $\varepsilon > 0$. Выберем произвольное $v \in P[0,T]$. Положим

$$z_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon v(t).$$

Функция $\Delta z_\varepsilon(t) = z_\varepsilon(t) - z(t) = \varepsilon v(t)$ называется *классической вариацией* кривой z.

Используя классическую вариацию [1, 4, 5], получаем

$$f(z_\varepsilon) = f(z) + \varepsilon \int\limits_0^T Q(t,z)v(t)\,dt + o(\varepsilon, v), \tag{4}$$

где $\dfrac{o(\varepsilon,v)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0$ равномерно по v при $\sup\limits_{t\in[0,T]} |v(t)| \leqslant 1$,

$$Q(t,z) = \int\limits_0^t (t-\gamma)\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma - \int\limits_0^t \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z},$$

здесь $F(t) = F\big(x, x', x'', t\big)$. Функционал f дифференцируем по Гато в точке z, и функция $Q(t,z)$ является «градиентом» Гато функционала f в точке z.

Направление $g(t,z) = -Q(t,z)/\|Q(t,z)\|$, где $\|Q(t,z)\|^2 = \displaystyle\int_0^T Q^2(t,z)\,dt$ – это направление наискорейшего спуска (в метрике L_2) функционала f в точке z.

Пусть $z_* \in Z$ – точка локального минимума функционала f на множестве Z. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем $v \in P[0,T]$ и положим

$$z_\varepsilon(t) = z_*(t) + \varepsilon v(t).$$

Так как $\rho_i(z_\varepsilon, z_*) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0$ для всех $i = \overline{1,3}$, то

$$f^{\downarrow}(z_*) = \liminf_{\rho_i(z,z_*)\to 0} \frac{f(z) - f(z_*)}{\rho_i(z,z_*)} \leqslant \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{f(z_\varepsilon) - f(z_*)}{\rho_i(z_\varepsilon, z_*)} = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{f(z_* + \varepsilon v) - f(z_*)}{\varepsilon\|v\|_i},$$

где $\|v\|_i = \rho_i(v, \mathbb{O})$.

Теорема 1 [1]. *Для того чтобы $z_* \in P[0,T]$ была точкой глобального или локального минимума функции f на множестве $P[0,T]$ в метрике ρ_i, необходимо, чтобы*

$$f^{\downarrow}(z_*) = \liminf_{\rho_i(z,z_*)\to 0} \frac{f(z) - f(z_*)}{\rho_i(z,z_*)} \geqslant 0.$$

Учитывая произвольность $v \in P[0,T]$ из (4) и теоремы 1 имеем

$$\int\limits_0^T Q(t,z_*)v(t)\,dt \geqslant 0 \qquad \forall\, v \in P[0,T]. \tag{5}$$

Это условие необходимо в любой из метрик ρ_i, $i = \overline{1,3}$.

Теорема 2. *Соотношение* (5) *эквивалентно следующему условию*:

$$\int\limits_0^t (t-\gamma)\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma - \int\limits_0^t \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial z} = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{6}$$

Здесь $F^*(t) = F\big(x_*, x'_*, x''_*, t\big)$. Условие (6) является интегральным уравнением Эйлера для задачи (1), (2). Дифференцируя дважды выражение (6), получим условие

$$\frac{\partial F^*(t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^*(t)}{\partial x'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F^*(t)}{\partial x''} = 0 \qquad \forall\, t \in D(x''_*), \tag{7}$$

где $D(x''_*)$ – множество точек непрерывности функции $x''_*(t)$. Дифференциальное уравнение 4-го порядка (7) – это уравнение Эйлера–Пуассона.

Следствие 1. *«Естественные краевые условия» на левом конце выводятся из необходимого условия* (6). *Первое условие получаем при* $t = 0$:

$$\left.\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

а второе – после дифференцирования по t *при* $t = 0$:

$$\left.\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F(t)}{\partial z} - \frac{\partial F(t)}{\partial x'}\right)\right|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Метод наискорейшего спуска. Пусть $z_* \in Z$ – точка минимума функционала $f(z)$ на $P[0,T]$, тогда $Q(t,z_*) = 0$ для всех $t \in [0,T]$. Точка z_*, в которой выполнено условие (6), называется стационарной.

Итак, если точка $z \in P[0,T]$ не является стационарной точкой функционала f, то можно найти направление наискорейшего спуска функционала f в точке z. Таким образом, возникает естественная идея описать следующий МНС для определения стационарных точек, т. е. точек, удовлетворяющих условию (6).

Выберем произвольное $z^0 \in P[0,T]$. Пусть уже найдено $z^k \in P[0,T]$. Если выполнено условие (6), то точка z^k является стационарной, и процесс прекращается.

Если же условие (6) не выполнено, то возьмем функцию $G_k(t) = Q(t,z^k)$ – градиент функционала f в точке z^k.

Далее решается задача одномерной минимизации

$$\min_{\beta \geqslant 0} f(z^k - \beta G_k) = f(z^k - \beta_k G_k).$$

Теперь положим $z^{k+1} = z^k - \beta_k G_k$. Имеем $f(z^{k+1}) < f(z^k)$.

Далее продолжается аналогично. В результате построим последовательность точек $\{z^k\} \subset P[0,T]$. Если эта последовательность конечна (состоит из конечного числа точек), то по построению последняя полученная точка стационарная. Если же последовательность $\{z^k\}$ содержит бесконечное количество точек, то, учитывая, что функция $Q(t,z)$ непрерывна, как функция z, можно показать, что описанный метод сходится в следующем смысле: $\|Q(t,z^k)\| \to 0$. Здесь $\|Q\|^2 = \int_0^T Q^2\,dt$, следовательно, $Q(t,z^k) \to 0$ в метрике L_2. Вопрос о существовании предельных точек последовательности $\{z^k\}$ остается открытым.

Метод сопряженных градиентов (направлений). Пусть $z^0(t)$ – некоторое начальное приближение. Будем строить последовательность $\{z^k(t)\}$ по формулам

$$z^{k+1}(t) = z^k(t) - \beta_k W_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

где

$$W_0(t) = G_0(t), \quad W_k(t) = G_k(t) + \gamma_k W_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Величина β_k может определяться так же, как и в МНС, а γ_k по формуле

$$\gamma_k = \frac{\int\limits_0^T \Big(G_k(t), G_k(t) - G_{k-1}(t)\Big) dt}{\int\limits_0^T \Big(G_{k-1}(t), G_{k-1}(t)\Big) dt}.$$

Как показывает практика, на каждом этапе алгоритма с неизбежностью накапливаются погрешности. Это может привести к тому, что векторы W_k перестают указывать направление убывания функционала, и релаксация метода может нарушиться. Для борьбы с таким явлением МСГ время от времени обновляют, полагая в (10) $\gamma_k = 0$, т. е. осуществляют градиентный спуск.

Задача (общий случай). Среди всех кривых $x(t)$ класса $P^2[0, T]$, концы которых лежат на двух заданных вертикалях $t = 0$ и $t = T$, определить кривую, которая доставляет экстремум функционалу (1).

Обозначим через $z(t) = x''(t)$ и положим, что

$$x'(t) = x_1 + \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau, \qquad x(t) = x_0 + tx_1 + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma d\tau.$$

Таким образом, каждой функции $x \in P^2[0, T]$ взаимнооднозначно сопоставляется элемент $\widetilde{z} = [x_0, x_1, z] \in Z$, здесь $Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times P[0, T]$.

Далее под нормой элемента $\widetilde{z} = [x_0, x_1, z] \in Z$ будем понимать

$$\|\widetilde{z}\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \int\limits_0^T z^2(t)\, dt.$$

Введем функционал

$$f(x_0, x_1, z) = \int\limits_0^T F\Big(x_0 + tx_1 + \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau z(\gamma)\, d\gamma d\tau, x_1 + \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau, z(t), t\Big) dt.$$

Несложно показать, что задача $I(x) \longrightarrow \min\limits_{x \in P^2[0,T]}$ эквивалентна задаче минимизации функционала $f(\widetilde{z})$ на всем пространстве Z.

Пусть $z \in P[0, T]$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ фиксированы, $\varepsilon > 0$. Выберем произвольные $v \in P[0, T]$, η, $\mu \in \mathbb{R}$. Положим

$$z_\varepsilon(t) = z(t) + \varepsilon v(t),$$

$$x_{0\varepsilon} = x_0 + \varepsilon\eta, \qquad (11)$$
$$x_{1\varepsilon} = x_1 + \varepsilon\mu.$$

Используя вариации (11), находим

$$f(x_{0\varepsilon}, x_{1\varepsilon}, z_\varepsilon) = f(\widetilde{z}) + \varepsilon\Bigg\{\int\limits_0^T Q(t,\widetilde{z})v(t)\,dt +$$
$$+\eta\int\limits_0^T \frac{\partial F(t)}{\partial x}\,dt + \mu\int\limits_0^T \left[\frac{\partial F(t)}{\partial x'} + t\frac{\partial F(t)}{\partial x}\right]\,dt\Bigg\} + o(\varepsilon, v),$$

где $F(t) = F\big(x, x', x'', t\big)$, $\dfrac{o(\varepsilon, v)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0$ равномерно по v при $\sup\limits_{t\in[0,T]} |v(t)| \leqslant 1$;

$$Q(t,\widetilde{z}) = \int\limits_t^T (\gamma - t)\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}.$$

Для данной проблемы можно сформулировать аналогичное утверждение теоремы 1 и получить следующее необходимое условие.

Теорема 3. *Для того чтобы $\widetilde{z}_* \in Z$ была точкой глобального или локального минимума функции f на множестве Z, необходимо, чтобы*

$$\int\limits_t^T (\gamma - t)\frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F^*(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \frac{\partial F^*(t)}{\partial z} = 0, \qquad (12)$$

$$\int\limits_0^T \frac{\partial F^*(t)}{\partial x}\,dt = 0, \qquad (13)$$

$$\int\limits_0^T \left[\frac{\partial F^*(t)}{\partial x'} + t\frac{\partial F^*(t)}{\partial x}\right]\,dt = 0, \qquad (14)$$

здесь $F^*(t) = F\big(x_*, x'_*, x''_*, t\big)$.

Следствие 2. *«Естественные краевые условия» выводятся из* (12)–(14). *Первое условие на правом конце получаем из* (12) *при $t = T$:*

$$\left.\frac{\partial F(t)}{\partial z}\right|_{t=T} = 0,$$

а второе – после дифференцирования по t (12) *при $t = T$:*

$$\left.\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F(t)}{\partial z} - \frac{\partial F(t)}{\partial x'}\right)\right|_{t=T} = 0.$$

Первое условие (8) *на левом конце вытекает из* (12) *при $t = 0$ с учетом* (14), *а второе условие на левом конце* (9) *следует после дифференцирования по t* (12) *при $t = 0$ и из* (13).

Заметим, что градиентом функционала f в точке $\widetilde{z}$ является

$$G(t,\widetilde{z}) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^T \dfrac{\partial F(t)}{\partial x}\,dt \\ \int\limits_0^T \left[\dfrac{\partial F(t)}{\partial x'} + t\dfrac{\partial F(t)}{\partial x}\right] dt \\ \int\limits_t^T (\gamma - t)\dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T \dfrac{\partial F(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \dfrac{\partial F(t)}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Направление $g(t,\widetilde{z}) = -G(t,\widetilde{z})/\|G(t,\widetilde{z})\|$, где

$$\|G(t,\widetilde{z})\|^2 = \left(\int\limits_0^T \frac{\partial F(t)}{\partial x}\,dt\right)^2 + \left(\int\limits_0^T \left[\frac{\partial F(t)}{\partial x'} + t\frac{\partial F(t)}{\partial x}\right] dt\right)^2 +$$
$$+ \int\limits_0^T \left(\int\limits_t^T (\gamma - t)\frac{\partial F(\gamma)}{\partial x}\,d\gamma + \int\limits_t^T \frac{\partial F(\gamma)}{\partial x'}\,d\gamma + \frac{\partial F(t)}{\partial z}\right)^2 dt,$$

есть направление наискорейшего спуска функционала f в точке $\widetilde{z}$.

Пусть $\widetilde{z}_* \in Z$ – точка минимума функционала $f(\widetilde{z})$ на Z, тогда $\|G(t,\widetilde{z}_*)\| = 0$. Точка $\widetilde{z}_*$, в которой выполнены условия (12)–(14) или $\|G(t,\widetilde{z}_*)\| = 0$, называется стационарной.

Таким образом, если точка $\widetilde{z} \in Z$ не является стационарной точкой функционала f, то можно найти направление наискорейшего спуска функционала f в точке $\widetilde{z}$. Как и в предыдущей задаче, можно описать МНС и МСГ для нахождения стационарных точек.

Пример. Исследуем на экстремум функционал

$$I(x) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\dot{x}^2 - x^2\right)\,dt$$

при условии на левом конце

$$x(0) = 1.$$

Точным решением данной задачи является функция $x^*(t) = \cos(t) + \sin(t)$, $I(x^*) = -1$. В табл. 1 приведены результаты расчетов при помощи МНС. В качестве начальной

Таблица 1. **Результаты алгоритма МНС**

k	$\|\dot{x}^* - \dot{x}_k\|$	$\|x^* - x_k\|$	$I(x_k)$	$\|Q(x_k)\|$
0	3.78298	1.696563	10.4326	6.087
1	0.451521	0.154978	−0.820146	0.803652
2	0.0598808	0.0267536	−0.99713	0.0965666
3	0.00731	0.002512	−0.9999527	0.013047
4	$9.919 \cdot 10^{-4}$	$4.419 \cdot 10^{-4}$	−0.9999992	0.0016
5	$1.232 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	−0.999999	$2.199 \cdot 10^{-4}$
6	$1.694 \cdot 10^{-5}$	$7.538 \cdot 10^{-6}$	−0.99999999	$2.739 \cdot 10^{-5}$

точки выбрана $x(t) = 1 + 5t - \dfrac{t^3}{3}$. Вычисления проводились в математическом пакете Mathcad.

Так как в МСГ первый шаг аналогичен МНС, то в табл. 2 приведены результаты расчетов на втором и третьем шагах.

Таблица 2. **Результаты алгоритма МСГ**

k	$\|\dot{x}^* - \dot{x}_k\|$	$\|x^* - x_k\|$	$I(x_k)$	$\|Q(x_k)\|$
2	$6.52 \cdot 10^{-3}$	$8.3555 \cdot 10^{-4}$	-0.99995813	0.012836
3	$3.5894 \cdot 10^{-5}$	$6.45841 \cdot 10^{-6}$	-0.99999999	$6.966 \cdot 10^{-5}$

Заключение. Результаты численных экспериментов показали эффективность использованных методов. МСГ более трудоемкий по сравнению с МНС, однако построенная минимизирующая последовательность имеет более высокую скорость сходимости. Остаются не решенными вопросы о скорости сходимости и существовании предельных точек построенных минимизирующих последовательностей.

Литература

1. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
2. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. *Еремин И. И.* Метод «штрафов» в выпуклом программировании // Докл. АН СССР. 1967. Т. 143, № 4. С. 748–751.
4. *Demyanov V. F., Tamasyan G. Sh.* Exact penalty functions in isoperimetric problems // Optimization. 2011. Vol. 60, Issue 1. P. 153–177.
5. *Демьянов В. Ф., Тамасян Г. Ш.* О прямых методах решения вариационных задач// Труды Ин-та математики и механики Уральск. отд. РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 36–47.
6. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1941. 308 с.
7. *Смирнов В. И., Крылов В. И., Канторович Л. В.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1933. 204 с.
8. *Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов. 2-е изд. / под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана, 2001. 488 с.

Статья рекомендована к печати проф. В. Ф. Демьяновым.

Статья принята к печати 21 июня 2012 г.