Н. И. Сидняев, Я. В. Скобелева, Исторические аспекты развития вероятностно-статистических дисциплин, *Матем. обр.*, 2024, выпуск 1, 37–50

Исторические аспекты развития вероятностно-статистических дисциплин

Н. Н. Сидняев, Я. В. Скобелева

Статья посвящена историческим аспектам развития вероятностно-статистических дисциплин, которые являются эффективным инструментом в инженерном деле и безусловно должны быть представлены различными учебными курсами при обучении в техническом вузе. Представлен исторический анализ формирования и развития вероятностно-статистических дисциплин, на основе которого можно усовершенствовать и развивать методики преподавания этих предметов при обучении студентов технических вузов. Особое внимание уделено вкладу российских ученых в развитие одной из наиболее важных разделов высшей математики, учитывая востребованность специалистов инженерного профиля в современных реалиях.

Введение

Эффективное функционирование современного производства в условиях активного развития рыночных отношений тесно связано с необходимостью обеспечения его конкурентоспособности путем внедрения новой техники, использования прогрессивных наукоемких технологий производства [1-3]. Непрерывная модернизация отраслей требует повышения качества подготовки трудовых ресурсов, их профессиональной компетентности, а большой диапазон характера решаемых профессиональных задач предопределяет необходимость качественного улучшения образования [4-6].

Одной из целей высшего технического образования является обеспечение фундаментальной подготовки профессиональных инженерных кадров, которая должна способствовать формированию высококонкурентных специальных компетенций, профессиональной мобильности и стремления постоянно совершенствовать, углублять свои знания, повышать свой научный и профессиональный потенциал. Достижению этой цели способствуют математические дисциплины, которые помогают развитию абстрактного мышления — путем использования математического анализа для построения математических моделей большинства инженерных задач и последующего их решения. Этой теме посвящены многие современные научные исследования и статьи [7-10]. Проблемы математического образования в классических и технических университетах изложены в работах [11-18]. Обеспечение профессиональной математической подготовки студентов технического университета и недостаточная разработка теоретико-методологических и организационно-методических основ ее развития в зависимости от различных факторов и условий инженерного образования определили выбор темы настоящего исследования [12-14].

Формирование и развитие теории вероятностей

Теория вероятностей является одним из важнейших разделов математики, особенно учитывая цивилизационное развитие и цифровизацию современного общества. Подготовка будущих квалифицированных инженерных кадров неотделима от развития у них компетенций, связанных с этой наукой, а формирование полноценной методики их обучения возможно только в связке с анализом ее исторического развития.

Вклад русских и российских ученых в теорию вероятностей огромен [3-8]. Со времен Чебышева ее принято считать национальной русской наукой, что формирует большой научный потенциал для исследований в этой области современных ученых и инженеров, хотя грань между этими понятиями все больше стирается в последнее время. Целью изучения ТВ является изучение закономерностей, которые проявляются в *массовых однородных случайных явлениях* (событиях). Основным объектом изучения в теории вероятностей (ТВ) является *случайное событие*.

Систематическое изучение задач, относящихся к массовым однородным случайным событиям, и зарождение ТВ как математической дисциплины относится к XVII веку и связано, прежде всего, с попытками создания теории азартных игр. Они оказались исключительно наглядной моделью случайных явлений [10-12]. В последующее время ТВ в основном использовалась для создания теории ошибок наблюдений, теории страхования, изучения статистических задач народонаселения и т.п.

Особый вклад, который невозможно переоценить, внесли математики знаменитой Петербургской школы: П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров и др. [11-13] (рис.1).

Рис.1. Крупные ученые, внесшие вклад в развитие теории вероятности и математической статистики.

Характерной особенностью развития научной мысли в последние десятилетия является бурный рост статистических концепций в различных областях естествознания. За эти годы было определено, что привлечение методов теории вероятностей к изучению принципиальных вопросов физики, астрономии, химии, биологии, а также техники стало неизбежным. Современные естественно-научные представления, связанные с развитием статистической физики, квантовой механики и др., привели к представлению о том, что многие законы природы носят статистический характер, обусловленный огромностью числа частиц, из которых составлена материя. В этих представлениях о процессах природы лежит причина того, что серьёзный прогресс достигнут теорией вероятностей в сравнительно короткий срок; этим объясняется значительное повышение интереса к науке о случае, которое наблюдается во всех странах в наши дни [15-18].

Роль мировой и, в частности, русской и советской науки в развитии теории вероятностей

Традиции строгого математического отношения к проблемам теории вероятностей, созданные Чебышевым, бережно хранятся российскими учёными. Успехи теории вероятностей в её приложениях к различным областям естествознания — теории ошибок, кинетической теории газов и пр. — долго не могли сломить уже установившихся ошибочных взглядов. И только, приблизительно, после первой мировой войны дальнейшее игнорирование науки о массовых явлениях стало невозможным. В ряде стран, в первую очередь во Франции, Италии, Швеции и США, отдельные учёные и группы учёных всерьёз взялись за разработку проблем теории вероятностей. Советские учёные и в условиях этого неизмеримо выросшего научного соревнования с учёными других стран не сдали своих позиций и по-прежнему идут в авангарде науки о случае. Для того, чтобы лучше оценить вклад русских учёных в развитие интересующей нас науки, следует, хотя бы в нескольких словах, охарактеризовать её состояние к середине XIX века, когда появились первые исследования Чебышева, положившие начало дальнейшим многочисленным работам у нас и заграницей [2,13]. В самом начале XVIII века швейцарским учёным Яковом Бернулли была открыта замечательная теорема, которую, без преувеличения, можно считать началом существования теории вероятностей как науки. Содержание этой теоремы состоит в следующем. Пусть наступление некоторого события зависит от случая; производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления этого события сохраняет постоянное значение p. Тогда, если через μ обозначить число появлений события среди n первых из этих испытаний, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (или, как говорили раньше, к достоверности), разность $p-\mu/n$ становится по абсолютной величине меньше любого положительного ε, если только n достаточно велико. Значение теоремы Бернулли определяется тем, что она даёт возможность установить связи между результатами эксперимента и теоретическим коэффициентом — вероятностью и, в частности, по результатам эксперимента позволяет судить о величине вероятности p, когда она неизвестна. Однако, число μ зависит от случая, и поэтому возможные уклонения от p могут достигать и заметных значений.

На естественный вопрос о том, с какими вероятностями эта величина принимает те или иные значения, французские математики Муавр и Лаплас дали ответ, ставший вторым основным предложением теории вероятностей. Оказалось, что для больших значений n вероятность неравенства:

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x$$

почти не зависит от n и p и при $n \to \infty$ приближается к некоторой определённой функции $\Phi_1(x)$, которая впоследствии получила название *нормальной функции распределения*, или закона Гаусса и определяется формулой:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2/2} dx.$$

В начале XIX века известный французский математик Пуассон [10] показал, что теорема Бернулли может быть получена в качестве следствия более общего предложения, названного им законом больших чисел [5]. Теорема Пуассона состоит в следующем. Если вероятность появления некоторого события зависит от номера испытания и для k-го испытания равна p_k, то число μ появлений этого события при n независимых испытаниях с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число, лишь бы n было достаточно большим.

Этим же математиком было показано, что при малых p в схеме Бернулли вероятность равенства $\mu = k$ для больших значений n приближённо при $\lambda = np$ равна $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$. Большой раздел теории вероятностей был связан с теоремой Байеса, позволяющей вычислять вероятности того, в каких условиях наступило событие, если эксперимент показал, что оно произошло [16]. На её базе возникла также огромная литература, посвящённая вычислению вероятностей различных социальных явлений [2-5]. Новое важное для приложений ТВ направление было создано на базе исследований Котса, Лапласа, Лежандра, Гаусса и др., положивших начало теории ошибок [3, 11, 13]. Известно, что как бы хорошо ни были организованы измерения, невозможно получить абсолютно точного результата, всегда неизбежны ошибки измерений, зависящие от случая. Относительно них Лаплас и Гаусс показали, в частности, что если принять принцип среднего арифметического, то ошибка измерения подчиняется нормальной функции распределения [9]. Принцип среднего арифметического состоит в том, что при любом числе измерений наиболее вероятным значением измеряемой величины считается среднее арифметическое из результатов измерений. В связи с задачами об азартных играх и определением безобидных игр возникло понятие математического ожидания случайных величин [11]. Если x_1, x_2, ..., x_n означают всевозможные значения, принимаемые случайной величиной X, а p_1, p_2, ..., p_n — вероятности, с которыми принимаются эти значения, то математическим ожиданием величины X называется сумма: $M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$. К середине XIX века основные свойства математических ожиданий были достаточно хорошо известны.

Первые исследования по теории вероятностей в России. Научные исследования в области теории вероятностей начались в России с момента основания Академии наук и приезда в неё первых академиков, братьев Даниила и Николая Бернулли, приглашённых из Швейцарии [2]. Однако их работы были для России лишь чисто внешним событием и не имели никакой связи с состоянием науки в стране. Позднее интерес к теории вероятностей проявляли все виднейшие представители русской математической мысли. Так, Лобачевский в своей работе "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных" [13] с целью экспериментального установления геометрической системы, господствующей во вселенной, разработал теорию ошибок при измерениях на сфере; позднее тому же вопросу он посвятил специальную статью. Остроградский написал три статьи по теории вероятностей [5]. Значительное число работ по теории вероятностей и в особенности по её применениям к вопросам демографии России было написано академиком Буняковским [2-4] . Им же был создан первый учебник по теории вероятностей, стоявший на уровне науки того времени. Однако все указанные исследования не внесли в теорию вероятностей ни существенно новых идей, ни новых проблем и не послужили толчком к созданию школы исследователей, хотя и пробудили к ней интерес в России.

Новый шаг был сделан Чебышевым. Он начал систематически изучать последовательности взаимно независимых случайных величин. Им самим и Марковым был доказан, как мы уже видели раньше, закон больших чисел в весьма общих условиях, т.е. следующее утверждение: при $n \to \infty$ и при любом $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} Mx_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

И, наконец, Чебышев, Марков и Ляпунов доказали, что при весьма общих условиях для последовательности независимых слагаемых имеет место центральная предельная теорема. Т.е. следующее утверждение при $n \to \infty$ и любом действительном x:

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - Mx_k)\right| < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} M(x_k - Mx_k)^2.$$

Позднее Марков ввёл понятие о цепях Маркова и доказал для них ряд теорем, в частности, закон больших чисел, центральную предельную теорему и одну важную теорему о предельном поведении вероятностей перехода из состояния A_i в состояние A_j, послужившую прототипом для позднейших, так называемых эргодических теорем. Весьма насыщенный большими общими идеями и фактическими результатами период развития теории вероятностей связан с именем академика С.Н. Бернштейна [2, 11]. Ранее отмечалось о том, что до середины прошлого века теория вероятностей не успела сложиться в математическую науку. Неопределённость в основных понятиях науки о случае приводила к целому ряду парадоксов. Правда, эти обстоятельства мало смущали естествоиспытателей, и уже тогда даже наивный теоретико-вероятностный подход в различных областях науки приводил к крупным успехам. Так как науки развивались и предъявляли к своему математическому аппарату— теории вероятностей — более строгие требования, то возникла потребность систематически изучить основные понятия теории вероятностей и выяснить условия, в которых можно пользоваться её методами и результатами. Отсюда возникло формально-логическое обоснование теории вероятностей. Первая попытка такого рода обоснования относится к 1917 г. и принадлежит академику С.Н. Бернштейну. Наряду с желанием привести в порядок основы теории вероятностей Бернштейн поставил перед собой гораздо более широкую цель: на базе создаваемой им системы аксиом теории вероятностей построить логически безупречную теорию математической статистики и продемонстрировать, как можно совершенно строго и точно изучать важнейшие проблемы естествознания. Отсюда возникла идея построения теории вероятностей как единого познавательного метода, который потребует, чтобы истинность предложения однозначно без всяких исключений характеризовалась определённым максимальным значением математической вероятности, которое принимается равным единице, а ложность предложения должна соответствовать наименьшей вероятности, равной нулю. Эти основные идеи явились источником для целого ряда работ Бернштейна, как математических, так и естественнонаучных, в особенности посвящённых теоретическим проблемам биологии. Они же вдохновили их автора на создание одного из лучших произведений мировой литературы по теории вероятностей — книгу "Теория вероятностей". В книге изложены классические и собственные результаты относительно закона больших чисел, теоремы Лапласа, выборочного метода, кривых распределения, теории корреляции и пр. Особую свежесть и ценность книге придают постоянные дискуссии автора о практической ценности того или иного результата теории, а также о границах его применимости. Это обстоятельство значительно содействовало широкой известности книги не только среди математиков, но и среди работников естественнонаучных и технических дисциплин. Собственно математические работы первого периода исследований Бернштейна по теории вероятностей представляют собой блестящее завершение исследований Чебышева, Маркова и Ляпунова по предельным теоремам для сумм случайных величин [9-14]. Доказательство основной предельной теоремы для случая независимых величин в его руках получило такую общность, что наложенные при этом ограничения оказались впоследствии не только достаточными, но и необходимыми [1,18]. В то же время были установлены весьма широкие условия, при выполнении которых предельная теорема сохраняется и для суммы зависимых слагаемых [2]. Впервые Бернштейном было предпринято исследование условий, в которых имеет место двумерная предельная теорема. Проиллюстрируем постановку задачи простым для восприятия, но важным примером. При стрельбе по некоторой цели A, находящейся на земной поверхности, снаряды не попадают, вообще говоря, точно в точку прицеливания, а рассеиваются. Возникает задача определения вероятности того или иного уклонения снаряда от центра цели. Если выбрать оси координат с началом в центре цели, то вопрос заключается в том, чтобы указать вероятность каждого возможного уклонения (x, y) снаряда от цели-возможных координат снаряда. Исходя из гипотезы, что уклонение снарядов от цели является результатом суммарного воздействия огромного количества зависящих от случая причин, каждая из которых лишь ничтожно мало влияет на результат, Бернштейн показал, что оно подчиняется особому закону распределения вероятностей — двумерному нормальному закону. Часто говорят в этом случае, что x и y нормально коррелированы. Этот общий математический результат, описанный на частном примере, Бернштейн приложил к биологическим исследованиям. Среди прочих результатов этого рода заслуживает быть отмеченным важный и неожиданный для специалистов факт, что закон Гальтона [6] о наследовании количественных признаков не противоречит гипотезе Менделя, а при весьма общих естественных предположениях вытекает из неё.

Исследования В.И. Романовского и его школы. Как уже отмечалось, с 1922 г. в Ташкенте началась серьёзная работа по теории вероятностей и математической статистике. Первоначально она велась единолично профессором В.И. Романовским, а затем им самим и целым рядом его учеников, среди которых мы отметим М.И. Эйдельнанта и Т.А. Сарымсакова — наиболее крупного современного математика-узбека [2,4,5]. Начав свои исследования в области математической статистики, Романовский работал в ней под сильным влиянием английской школы, созданной известным статистиком Карлом Пирсоном [1]. Однако в выборе методов для решения стоявших перед ним задач он следовал за Чебышевым [6]. Являясь учеником академика А.А. Маркова, Романовский воспринял от него традиции школы Чебышева и среди них математическую строгость рассуждений и логическую щепетильность в построениях. Этого как раз недоставало английским статистикам, от работ которых, как мы говорили, отправлялся Романовский [12, 16].

За почти двадцатилетний промежуток деятельности Романовский не только охватил своими исследованиями буквально все части математической статистики (кривые распределения, теория выборок, распределение статистических характеристик, критерии случайности, разыскание скрытых периодичностей и пр.), но и занимался деятельной пропагандой статистических методов. С этой целью им был создан ряд книг, много способствовавших подъёму статистической культуры и развитию интереса к ней. Многочисленные работы Романовского в области теории вероятностей были посвящены распространению основной предельной теоремы Ляпунова на многомерные случайные величины, цепям Маркова и построению важных схем зависимых случайных величин, обобщающих цепи Маркова. Здесь необходимо отметить прекрасные результаты, относящиеся к так называемым бициклическим цепям, введённым им впервые в рассмотрение, а также отметим два его фундаментальных мемуара, посвящённых цепям Маркова с конечным и непрерывным множеством состояний. Изучение цепей Маркова с конечным числом состояний Романовский связал с алгебраическим аппаратом — матрицами [2,13,15]. При этом ему пришлось детально разработать и отдельные вопросы теории матриц. Метод Романовского является в настоящее время одним из основных в теории цепей Маркова и широко используется многими специалистами в дальнейших исследованиях. Случай цепей Маркова с непрерывным множеством состояний был связан Романовским с теорией интегральных уравнений.

Возникновение Московской школы теории вероятностей. Идеи теории множеств и теории функций, культивировавшиеся Лузиным и его учениками, определили характер первоначальных исследований московских математиков в теории вероятностей [2, 6-9]. Внимательное изучение основных понятий теории вероятностей, — случайного события, вероятности, независимости событий, случайной величины, среднего значения и др., — а также операций со случайными событиями показало, что между ними и основными понятиями теории множеств и метрической теории функций можно провести далеко идущие аналогии. Эти связи между столь различными науками позволили по-иному осветить логические основы теории вероятностей, обогатить её содержание новой проблематикой и методами исследования, а также довести до конца решение классических задач.

Начало создания Московской школы теории вероятностей было положено в 1923 г. исследованием Александра Яковлевича Хинчина, посвящённым совершенно своеобразному обобщению и усилению закона больших чисел. Открытая им при этом закономерность получила впоследствии название закона повторного логарифма. Эта работа Хинчина стала источником дальнейших исследований в указанном им направлении как советских (Колмогоров, Хинчин, Гнеденко), так и зарубежных математиков (Cramer, Cantelli, P. Levy, W. Feller и др.) [2, 12]. О содержании этого закона расскажем ниже, когда будем говорить о законе больших чисел. Приблизительно в то же время Евгений Евгеньевич Слуцкий начал создавать методами теории функций действительного переменного новую главу теории вероятностей — теорию случайных функций, т.е. теорию случайных величин, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра [6,11,13]. Им были введены и исследованы понятия стохастических (относящихся к случайным величинам) предела, производной, интеграла, измеримости и пр.

Вскоре в работу по теории вероятностей включился тогда ещё молодой учёный, а затем один из самых разносторонних и крупнейших математиков современности Андрей Николаевич Колмогоров [2]. Первое его исследование в этой области науки было выполнено совместно с А.Я. Хинчиным и посвящалось выяснению сходимости рядов из взаимно независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, ... Оказалось, что ряд $X_1 + X_2 + ... + X_n + \dots$ может сходиться (т.е. иметь определённую сумму) к некоторой величине (вообще говоря, случайной) только с крайними вероятностями 0 и 1. Позднее Колмогоров дал очень широкие условия, при которых события, зависящие от бесконечного множества случайных величин, могут наступать лишь с вероятностью 0 или 1. Эти московские исследования также нашли значительный отклик в работах западноевропейских математиков [5-9]. Однако очень скоро, оттолкнувшись от проблем Чебышева и Маркова, московские математики выдвинули совершенно новый круг проблем, исследование которых стало наиболее быстро развивающейся и увлекательной частью современной теории вероятностей.

Закон больших чисел. А.А. Марковым было отмечено то основное значение, которое имеет закон больших чисел для приложений математических методов к естествознанию и практическим наукам [4-6]. Это обстоятельство и было причиной всё возрастающего интереса к установлению всё более и более широких границ его применимости. Конечной целью, понятно, было разыскание окончательных (необходимых и достаточных) условий, в которых имеет место закон больших чисел. Крупнейшие математики на протяжении нескольких десятилетий тратили на это свои усилия. И задача стоила того. В самом деле, установление таких условий сразу давало бы возможность ответить на вопрос: можно ли использовать этот закон и его следствия при данных конкретных обстоятельствах или нельзя? Долголетние усилия увенчались успехом только в 1926 г., когда эти условия были найдены А.Н. Колмогоровым.

Необходимо отметить, что исследования московских математиков в теории вероятностей начались с работы А.Я. Хинчина, в которой был открыт так называемый закон повторного логарифма [10]. При этом можно ограничиться простейшим частным случаем схемы Бернулли. Согласно теореме Бернулли, число μ появлений события при n независимых испытаниях, в каждом из которых оно появляется с вероятностью p, при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет соотношению: при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Геометрически это можно представить себе так: возьмём оси координат, по оси абсцисс станем откладывать n, а по оси ординат величину $y = \mu - np$. Теорема Бернулли утверждает, что при достаточно больших n величина $y = \mu - np$ почти достоверно будет заключаться между прямыми $y = \varepsilon n$ и $y = -\varepsilon n$, значит, почти достоверно не превзойдёт этих границ. Но не слишком ли велики эти границы? Нельзя ли указать более точные пределы для возможных изменений этой разности? Оказывается, что можно. Хинчин путём очень тонких рассуждений нашёл их. При этом оказалось, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших n почти достоверно разность $y = \mu - np$ заключается между границами

$$y = -(1+\varepsilon)\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}, \quad \text{и} \quad y = (1+\varepsilon)\sqrt{(2np(1-p)\ln\ln n},$$

Более того, если взять кривые

$$y = -(1+\varepsilon)\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n} \quad \text{и} \quad y = (1+\varepsilon)\sqrt{(2np(1-p)\ln\ln n},$$

то разность y почти наверняка бесконечно много раз выйдет за границы области, ограниченной этими кривыми. Таким образом, что теорема Хинчина даёт очень глубокий анализ возможного поведения разности $\mu - np$.

Аксиоматика. К двадцатым же годам, годам господства идей метрической теории функций, относятся исследования Колмогорова по основаниям теории вероятностей. Начиная с 1926 г. он занимался оформлением идей Московской школы в стройную логическую систему. Завершением этой работы явилась монография “Основные понятия теории вероятностей” (1933 г.). В ней была последовательно проведена идея включения математических основ теории вероятностей, науки ещё недавно столь своеобразной, в ряд общих понятий математики. До создания и широкого развития метрической теории функций такая задача была почти безнадёжна. Теперь же были вскрыты аналогии между мерой множества и вероятностью события, интегралом и математическим ожиданием, ортогональностью функций и независимостью случайных величин и пр., и назрела необходимость аксиоматизировать теорию вероятностей, исходя из теоретико-множественных представлений.

В основу построений Колмогорова положено множество Ω элементарных событий. Что представляют собой элементы этого множества, для логического развития теории вероятностей совершенно безразлично. Поэтому теория вероятностей допускает большое число различных интерпретаций, в том числе и таких, которые не имеют к понятию случайного никакого отношения. Понятно, что это обстоятельство только увеличивает поле возможных областей приложения теории вероятностей.

Рассматривается далее множество F подмножеств из Ω; элементы этого множества называются случайными событиями. Видно, что таким образом, что понятие случайного события у Колмогорова строится, исходя из более элементарных понятий, тогда как С.Н. Бернштейн берёт само это понятие за исходное. Случайные события и их вероятности подчиняются далее следующим аксиомам:

1. Если случайные события A и B входят в состав F, то события A или B, и A и B, не A и не B также содержатся в F.

2. F содержит в качестве элементов множество Ω и все отдельные его элементы.

3. Каждому элементу A из F поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $P(A)$, называемое вероятностью события A.

4. $P(\Omega) = 1$.

5. Если A и B несовместимы и принадлежат F, то $P\{A \text{ или } B\} = P\{A\} + P\{B\}$.

6. Для бесконечных множеств из F предполагается также выполненной следующая-аксиома: Если пересечение последовательности событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ... \supset ...$ пусто, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Для конечных множеств эта аксиома является следствием первых пяти.

На основании приведённых аксиом Колмогоров дал построение начал теории вероятностей. Это его исследование немало способствовало тому, что теория вероятностей окончательно определила себя как математическая наука. В настоящее время оно получило широкую известность и всеобщее признание, а изложенные там идеи стали руководящими во всех современных работах, посвящённых теории вероятностей.

Теория стохастических процессов. Совершенствование физической статистики, а также ряда областей техники поставило перед теорией вероятностей большое число совершенно новых проблем, не укладывающихся в рамки классических схем. В то время как физика интересовало изучение случайных процессов, т. е. величин, претерпевающих случайное изменение в зависимости от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров — времени, координат и пр., математик мог ему предложить только приёмы, годные для дискретных последовательностей, т.е. того случая, когда параметр меняется скачкообразно, принимая лишь целые значения. Ряд физиков (Планк, Смолуховский, Эйнштейн, Фоккер и др.) [2, 8-12], биологов (Фишер) и некоторые техники (Фрай) были вынуждены стать на путь самостоятельного построения теоретико-вероятностных схем по различным частным поводам. Остро чувствовалась необходимость в создании единой математической теории, которая позволила бы дать общую трактовку всего круга возникших проблем и схем течения случайных процессов. Первая попытка такого рода была предпринята французским математиком Башелье около 1900 г., но эти исследования прошли незамеченными, да и математический уровень их был невысок. В 1931 г. появилась работа Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», в которой было дано первое систематическое и строгое изложение основ теории стохастически определённых процессов без последействия. Приблизительно в то же время Хинчин начал разработку теории другого важнейшего класса стохастических процессов — так называемых стационарных процессов. Многочисленные математические результаты, широкие возможности приложений к естествознанию, а также преобразование классической проблематики, связанное с теорией стохастических процессов, привели к тому, что эта теория ознаменовала новый этап в развитии теории вероятностей и в настоящее время стала основным полем приложения творческих усилий математиков-вероятностников как у нас, так и заграницей.

Процессы без последействия. Вкратце охарактеризуем эту новую главу теории вероятностей. Для начала приведем выдержку из только что цитированной работы Колмогорова, посвященную проведению аналогии между задачами теории стохастических (случайных) процессов и задачами классической механики. Желая подвергнуть математической обработке явления природы или социальной жизни, необходимо, предварительно, эти явления схематизировать; дело в том, что к исследованию процесса изменения некоторой системы математический анализ применим лишь в том случае, если предположить, что каждое возможное состояние этой системы может быть вполне определено с помощью известного математического аппарата, например, при помощи значений, принимаемых известным числом параметров; такая математически определимая система есть не сама действительность, но лишь схема, пригодная для описания действительности. Классическая механика пользуется лишь такими схемами, при которых состояние y системы для момента времени t однозначным образом определяется её состоянием x в любой предшествующий момент t_0; математически это выражается формулой $y = f(x, t_0, t)$. Если такая однозначная функция f существует, как это всегда предполагается в классической механике, то мы говорим, что наша схема есть схема вполне детерминированного процесса. К числу вполне детерминированных процессов можно было бы отнести, кроме того, процессы, в которых состояние y не вполне определяется знанием состояния x для единственного момента времени t_0, существенным образом завися ещё от характера изменения этого состояния x перед моментом t_0. Однако обычно предпочитают избегать такой зависимости от предшествующего поведения системы, для чего расширяют само понятие состояния системы в момент времени t и, соответственно этому, вводят новые параметры (например, в классической механике, помимо координат точек системы, рассматриваются также компоненты их скоростей). Вне области классической механики, наряду со схемами вполне детерминированных процессов, часто рассматривают и такие схемы, где состояние x системы в некоторый момент времени t_0 обусловливает лишь известную вероятность для наступления возможного состояния y в некоторый последующий момент $t > t_0$. Если при любых заданных t_0, $t > t_0$ и x существует определённая функция распределения вероятностей для состояний y, мы говорим, что наша схема есть схема стохастически определённого процесса. В общем случае эта функция распределения представляется в виде $P(t_0, x, t, \Omega)$,причём Ω обозначает некоторое множество состояний y, а P есть вероятность того, что в момент t окажется реализованным одно из состояний y, принадлежащих этому множеству. Можно заметить, что процессы, рассмотренные Колмогоровым, представляют собой дальнейшее развитие схемы цепей Маркова. Важно то, что Колмогоров не только предложил идею Маркова распространить со случая конечного числа состояний на случай произвольного множества состояний и на непрерывное время, но и установил те общие законы, которыми управляются такие процессы. Найденные им дифференциальные уравнения, которым подчинены вероятности $P(t_0, x, t, \Omega)$, получили название уравнений Колмогорова [2].

Работа Колмогорова явилась источником для большого числа исследований по теории случайных процессов как у нас, так и заграницей; отметим лишь некоторые из них.

Для теории колебаний при наличии особых случайных возмущений весьма важно было изучить предельные закономерности при стремлении к нулю коэффициентов при вторых производных в уравнениях Колмогорова. Ряд результатов в этом направлении был получен А.А. Андроновым, Л.С. Понтрягиным и др.

Из других применений следует указать на работы Колмогорова и М.А. Леонтовича о броуновском движении [2, 4, 15], Леонтовича по теории бимолекулярных реакций, а также Колмогорова по теории скученности в связи с эксплуатацией телефонных сетей и пр.

В работах И.Г. Петровского и А.Я. Хинчина [7-12] получила точное обоснование и дальнейшее развитие в свете стохастических процессов математическая теория диффузии; крупным событием в этом круге идей явилась монография Хинчина “Асимптотические законы теории вероятностей” (1933 г.). В ней был рассмотрен ряд задач, связанных с проблемами блуждания (диффузии) частицы по прямой и в плоскости. Эти задачи в простейших случаях сводятся к хорошо известным схемам сумм случайных величин. В 1933 г. в работу по теории стохастических процессов включился С.Н. Бернштейн. Исходя из уравнений, которым удовлетворяют вероятности приращения случайных величин за конечный промежуток времени Δt, он доказал ряд важнейших результатов относительно их предельного поведения при Δt, стремящемся к нулю. Далее он подверг глубокому анализу уравнения Колмогорова с целью установления условий, при которых они действительно дают решения, удовлетворяющие требованиям теории вероятностей.

Стационарные процессы. Процессы без последействия, только что рассмотренные нами, ни в коем случае не исчерпывают всех запросов естествознания к математике [11-13]. В самом деле, ведь в многочисленных явлениях прошлые состояния системы оказывают весьма сильное влияние на вероятности её будущих состояний, и пренебрегать этим воздействием прошлого нельзя даже при приближённой трактовке вопроса. Во многих случаях положение может быть исправлено изменением понятия состояния системы путём введения новых параметров. Так, например, если бы изменение положения частицы в явлениях диффузии или броуновского движения мы стали рассматривать как процесс типа Колмогорова, то это означало бы, что мы при этом не принимаем в расчёт её инерцию. Введение в понятие состояния помимо координат частицы её скорости исправило бы в этом примере положение. Однако существуют многочисленные случаи, когда положение не может быть исправлено, сколько бы новых параметров ни вводилось в определение состояния системы в данный момент. В первую очередь здесь следует указать на статистическую механику, в которой указание положений точки в той или иной ячейке даёт только вероятностное суждение о будущем её положении. При этом ознакомление с предыдущими положениями точки существенным образом меняет наши суждения об её будущем. Хинчин выделил важный класс процессов с последействием [2], так называемые стационарные процессы, однородно ведущие себя во времени. Мы скажем, что процесс $x(t)$ стационарен, если распределения вероятностей для двух конечных групп переменных $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$ и $\{x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \ldots, x(t_n+\tau)\}$ совпадают (и значит, не зависят от τ). Числа n и τ, а также моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ могут быть при этом выбраны совершенно произвольно.

Понятно, что таких стационарных процессов, играющих важную роль в различных областях знания, можно указать сколько угодно. Отметим сейчас же, что наиболее глубокое понимание многих акустических (скажем, шума) и световых явлений, а также разыскание скрытых периодичностей, так интересующее геофизиков и метеорологов, возможно только в рамках стационарных процессов.

Влияние на классическую проблематику. Помимо значительного расширения науки о случае, теория случайных процессов иначе осветила центральную классическую задачу относительно предельных законов для сумм случайных величин. Оказалось, что основные законы распределения, которые раньше получались как асимптотические, в теории стохастических процессов играют роль точных решений соответствующих дифференциальных уравнений. На этой почве возник ряд исследований, [2-6] начатых А.Н. Колмогоровым и широко развитых С.Н. Бернштейном, А.Я. Хинчиным и др., благодаря которым центральная предельная теорема теории вероятностей воспринимается теперь как частный случай единой общей теории. Исследования классической схемы последовательности случайных величин в связи с теорией стохастических процессов получили значительный толчок. Исходным моментом для этого цикла работ явилось исследование Колмогорова об однородных случайных процессах с независимыми приращениями, относительно которых он установил, что все такие процессы управляются так называемыми безгранично делимыми законами, и нашёл аналитическое представление этого класса законов.

Если до этого интерес исследователей был сосредоточен на определении наиболее широких условий, при выполнении которых имеет место сходимость функций распределения сумм независимых слагаемых к нормальному закону, то теперь возник новый круг проблем, естественность и важность постановки которых для нас теперь не представляет сомнений. Прежде всего была поставлена задача о разыскании всех тех распределений вероятностей, которые могут выступать как предельные для сумм независимых случайных величин. Иными словами, если имеется последовательность случайных величин, каждая из которых представляет собой сумму независимых слагаемых, и функции распределения вероятностей сумм сходятся к предельной функции распределения, то что можно сказать о природе последней? Так обще поставленная задача приводит к тривиальному решению — любая функция распределения может быть предельной в этом смысле. Однако в теории вероятностей всегда вводится ограничение, к которому приводят многочисленные задачи статистики и естествознания, о малой роли отдельных слагаемых в сумме. При этом предположении предельное распределение вероятностей уже перестаёт быть произвольным. Колмогоровым была высказана гипотеза, что класс предельных в этом смысле законов совпадает с классом безгранично делимых законов, для того случая, когда дисперсии сумм, т.е. величины $M(s_n - Ms_n)^2$, ограничены константой, не зависящей от n. Через год Хинчин дал полное её доказательство без всяких дополнительных ограничений, наложенных на s_n, (в том числе не требуя существования конечных дисперсий у s_n).

В связи с этими исследованиями, естественно, возник вопрос об условиях существования предельного закона для сумм, а таже об условиях сходимости к каждому данному предельному закону. Полное решение этой задачи было дано в 1937 г. Б.В. Гнеденко. Развитый им общий метод доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин позволил ему единообразно и с малым количеством вычислений изложить все накопившиеся в этой области факты, в том числе относящиеся к закону больших чисел (А.А. Бобров, А.Н. Колмогоров, Д.А. Райков, В. Феллер, А.Я. Хинчин) и центральной предельной теореме, а также получить ряд новых результатов [8-14].

Видно, что теория предельных законов приобрела по сравнению с совсем недавним прошлым значительную общность и что центральные задачи классической теории вероятностей вошли в неё как простейшие частные случаи. Однако эта же общая точка зрения с полной отчётливостью позволила выяснить ту фундаментальную роль закона Гаусса, которая и обусловила то, что в течение почти двух столетий именно он был в центре внимания всех исследователей. Оказалось, что в то время как условия сходимости к закону Гаусса носят совершенно общий характер, не зависящий от природы отдельных слагаемых, в формулировки сходимости к другим законам входят требования, носящие весьма специфический характер.

Исследования по математической статистике. Исследования по математической статистике не получили в России того размаха, которого заслуживает эта область науки. Здесь русские учёные до сих пор ещё не заняли руководящих позиций, и их вклад в развитие математической статистики состоит, преимущественно, не в создании новых концепций, а в открытии отдельных фактов. Многие из этих фактов, несомненно, принадлежат к числу лучших достижений науки и займут почётное место в курсах математической статистики.

Конечно, многие из теоретико-вероятностных исследований имеют основное значение для статистики, как, например, закон больших чисел, центральная предельная теорема и др., но не они составляют ядро статистики и поэтому не изменяют данной нами характеристики состояния статистики в СССР. Число лиц, занимавшихся разработкой общих вопросов статистики, весьма невелико, хотя в области различных конкретных применений статистических методов имеется значительное количество исследователей, получивших ценные результаты.

Необходимо отметить замечательный цикл исследований, начатый В.И. Гливенко и А.Н. Колмогоровым и широко развитый Николаем Васильевичем Смирновым. Эти исследования относятся к решению основной задачи статистики — установлению неизвестной функции распределения по результатам наблюдений [1,2], а также характера сближения эмпирической функции распределения с теоретической. Пусть некоторая случайная величина X имеет $F(x) = P\{X < x\}$ своей функцией распределения, и $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — результаты п независимых наблюдений над X. Эмпирическая функция распределения определяется формулой: $F_n(x) = k(x)/n$, где $k(x)$ — число наблюдённых значений величины, меньших, чем x. Первый общий факт, обнаруженный в этом направлении, был доказан в 1933 г. В.И. Гливенко [1]. Оказалось, что если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения, то с достоверностью можно утверждать, что при $n \to \infty$ $F_n(x)$ стремится к $F(x)$. Понятно, насколько важно для практики это утверждение. Другой общий факт был обнаружен в том же году А.Н. Колмогоровым. Именно: если функция $F(x)$ непрерывна, то функции распределения величин

$$D_n = \max_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)|\sqrt{n}$$

при $n \to \infty$ стремятся к некоторой функции распределения $\varPhi(\lambda)$, не зависящей от $F(x)$, а именно [10]:

$$\lim_{n\to\infty} P\{D_n < \lambda\} = \varPhi(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Приведённая теорема Колмогорова может быть использована в качестве критерия оценки согласия эмпирического и теоретического распределений. Идея этого критерия состоит в следующем: пусть из эксперимента мы установили, что при гипотезе распределения случайной величины X по закону $F(x)$ величина D_n, приняла значение λ, и вероятность $\varPhi(\lambda)$, т.е. вероятность неравенства $D_n < \lambda$, велика. Отсюда мы заключаем, что вероятность неравенства $D_n \geq \lambda$ мала и что, значит, осуществилось маловероятное событие. По принципу практической невозможности маловероятных событий мы должны считать, что получившееся расхождение D_n не случайно и что наша гипотеза должна быть подвергнута сомнению [1]. Существенным преимуществом этого метода оценки согласия сделанной гипотезы с опытом является то, что вероятность $\varPhi(\lambda)$ не зависит от вида функции $F(x)$ (ведь функция $F(x)$ нам неизвестна!). Для практического применения рассмотренного критерия [1] были вычислены под руководством Н.В. Смирнова таблицы функции $\varPhi(\lambda)$.

Как выяснилось позднее из исследований Н.В. Смирнова, распределение $\varPhi(\lambda)$, найденное Колмогоровым, играет основную роль в целом ряде задач статистики. Среди значительного количества проблем, решённых Н.В. Смирновым в только что рассмотренном направлении укажем одну. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ представляют результаты независимых наблюдений над случайными величинами X и Y. Для статистики играет существенную роль установление правил, позволяющих судить о том, одинаково или различно распределение величин X и Y. Для того, чтобы оценить важность постановки этой задачи, достаточно рассмотреть такой пример: для определения влияния некоторых агрономических мероприятий на урожай произведены две серии опытов; первая без применения, а вторая с применением этих мероприятий. Как же обнаружить, случайны или не случайны расхождения в результатах опыта? Такая же задача возникает, скажем, при сравнении урожайности различных сортов.

Пусть $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ обозначают эмпирические функции распределения для двух указанных серий наблюдений. Смирнов за меру их расхождения предложил принять величину [1]:

$$D(n_1, n_2) = \max_{-\infty<x<+\infty} |F_{n_1}(x) - F_{n_1}(x)| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Если эта величина превзойдёт некоторые границы, то расхождение считается существенным, и гипотеза о тождественности законов распределения величин, наблюдённых в обеих сериях, ставится под сомнение. Эта задача полностью решается следующим предложением:

Если объёмы n_1 и n_2 выборок неограниченно возрастают так, что отношение $\tau = n_1/n_2$ остаётся постоянным, то $P\{D(n_1, n_2) < \lambda\} \to \varPhi(\lambda)$, где $\lambda > 0$, $\varPhi(\lambda)$ — определённая в предыдущей теореме функция. Три приведённые теоремы в достаточной мере характеризуют то новое направление в статистике, которое началось и разрабатывается в Москве.

Многочисленные явления природы, экономики, техники протекают во времени так, как будто бы им свойственны периодические изменения; максимумы и минимумы довольно правильно чередуются, но ни длины волн, ни величины ординат не повторяются в точности. Такие явления были предметом исследования многих учёных, исходивших из той предпосылки, что на правильные колебания наслаиваются случайные влияния, создающие неправильности в течении процесса. Во многих случаях эта точка зрения, однако, оказалась несостоятельной. Значительный сдвиг в изучении таких процессов был произведён Е.Е. Слуцким, исходившим из задач геофизики и экономики. Им был установлен тот основной факт, что такого рода псевдо-периодическая повторяемость может быть не следствием лежащей в основе явления периодичности, а результатом действия случайных причин. Пусть ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — последовательность взаимно независимых случайных величин с одним и тем же законом распределения и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные; рассмотрим стационарную последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \ldots$, образованных по правилу $\eta_n = a_1\xi_n + a_2\xi_{n+1} + ... + a_n\xi_{n+k}$.

Указанный процесс образования последовательностей связанных случайных величин из независимых Слуцкий предложил называть подвижным суммированием. Оказалось, что последовательности такого рода способны имитировать процессы периодического характера. Более того, Слуцкий показал, что при некоторых условиях с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, на сколь угодно большом участке члены таких последовательностей не больше чем на ε отклоняются от соответствующих ординат синусоиды.

Заключение

В статье подчеркивается, что в природе и технике в каждом явлении присутствует случайность. Изложена история появления фундаментальных понятий вероятности и статистики. В работе анализируются два подхода к изучению явлений: “детерминистский” и “вероятностный”. Отмечено, что при первом подходе выделяют основные факторы, характеризующие явление, а при втором — учитывают, помимо основных факторов, второстепенные, которые, если их не учесть, как раз и приводят к случайным возмущениям и искажениям результата. Подчеркивается, что *теория вероятности и математическая статистика* — это раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей на основе абстрактного описания, а *математическая статистика* как прикладная наука уже на основе этого описания оперирует непосредственно результатами конкретных наблюдений. Показано, что теория вероятностей — это базис математической статистики, которая уже применяется в реальной жизни. В статье постулируется, что вначале необходимо понять основные моменты теории вероятностей, а затем на их основе рекомендуется рассмотреть инструментарий математической статистики. Т.е. теория вероятностей позволяет находить степень объективной возможности наступления (вероятность) “сложных” событий через “простые”, а математическая статистика по наблюдаемым значениям оценивает эту степень либо осуществляет проверку предположений (гипотез) относительно этой степени. Так или иначе, все завязано на событиях, поэтому сейчас настало время перейти к изучению их свойств и операций над ними. Учебный курс “Теория вероятностей и математическая статистика” является важнейшей частью модуля “Прикладная математика”. Ее значимость в инженерных дисциплинах достаточно велика. На ней базируется регрессионный и дисперсионный анализ, многомерный статистический анализ, нейронные сети, распознавание образов и многие другие научные области. Современный инженер должен уметь использовать аппарат математической статистики на достаточно высоком уровне.

Литература

[1] Сидняев Н.И. Логико-статистический анализ проблем планирования эксперимента. - М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. - 352 с.

[2] Серовайский С.Я. История математики: Эволюция математических идей: Вычислительная математика. Теория вероятностей. Информатика. Математическая логика. - М.: Ленанд, 2019. - 240 с.

[3] Горобец Б.С. Теория вероятностей, математическая статистика и элементы случайных процессов. Упрощенный курс. - М.: Едиториал УРСС, 2020. - 232 с.

[4] Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 399 с.

[5] Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Учебник и практикум. - М.: Юрайт, 2019. - 220 с.

[6] Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами. - СПб.: BHV, 2012. - 528 с.

[7] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Формирование итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы // Alma mater (Вестник высшей школы). - 2018. - № 12. - С. 51–56.

[8] Пригарин С.М. Статистическое моделирование многомерных гауссовских распределений. Учебное пособие для вузов. - М.: Юрайт, 2019. - 84 с.

[9] Кудрявцев Л.Д.. Курс математического анализа. Книга 1: учебник для вузов — 6-е изд., перераб. и доп. - Москва: Издательство Юрайт, 2023. - 396 с.

[10] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Математическое образование современного инженера в условиях цифровой революции // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. - 2018. - Т.6. - С. 241-246.

[11] Зеленцов Б.П., Тутынина О.И. Теория вероятностей в познавательных и забавных задачах. - М.: Ленанд, 2019. - 128 с.

[12] Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: Учебное пособие. - М.: Академия, 2018. - 240 с.

[13] Рыбников К.А. История математики: Подисциплинарное изложение: Геометрия. Алгебра и теория чисел. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Дискретная математика. - М.: Ленанд, 2018. - 536 с.

[14] Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. - М.: Academia, 2018. - 210 с.

[15] Далингер В.А., Симонженков С.Д., Галюкшов Б.С. Теория вероятностей и математическая статистика с применением mathcad. Учебник и практикум для СПО. - М.: Юрайт, 2018. - 146 с.

[16] Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: Учебное пособие. - М.: Форум, 2018. - 559 с.

[17] Бутенко Ю.И., Сидняев Н.И., Семенова Е.Л. Математические аспекты в современной языковедческой теории и практике // “Alma Mater” (Вестник высшей школы). - 2018. - № 4. - С. 73-78.

[18] Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: Учебное пособие. - М.: Академия, 2018. - 240 с.

Сидняев Николай Иванович,
зав. кафедрой “Высшая математика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана, дтн, профессор.
E-mail: sidnyaev@yandex.ru

Скобелева Янина Валерьевна,
ст. преп. кафедры “Высшая математика”
МГТУ им. Н.Э. Баумана.
E-mail: ianinask@mail.ru