



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

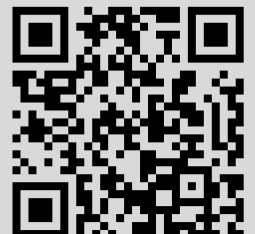
С. А. Карсканов, А. М. Липанов, О критических числах Рейнольдса в плоских каналах с резким расширением на входе, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010, том 50, номер 7, 1258–1268

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.211.34.178

2 ноября 2024 г., 21:54:27



УДК 519.634

О КРИТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В ПЛОСКИХ КАНАЛАХ С РЕЗКИМ РАСШИРЕНИЕМ НА ВХОДЕ

© 2010 г. С. А. Карсканов, А. М. Липанов

(426067 Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34, ИПМехан. УрО РАН)

e-mail: ipm@udman.ru; ser@udman.ru

Поступила в редакцию 26.01.2009 г.

Переработанный вариант 12.01.2010 г.

Излагается метод численного решения уравнений гидромеханики, анализируется эволюционирование структуры ламинарного потока по мере увеличения числа Рейнольдса и его поведение при достижении критического числа Рейнольдса. Обсуждаются различные режимы течения при $Re = Re_{кр}$. Библ. 11. Фиг. 7.

Ключевые слова: изменение структуры ламинарного потока, турбулентность, число Рейнольдса, численное решение уравнений гидромеханики, отрывная зона.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованиями закономерностей движения газов и жидкостей ученые занимаются давно (см. [1]). В [2], [3] развит метод крупных частиц, позволяющий рассчитывать отрывные зоны при обтекании тел. Это удалось сделать благодаря консервативности используемой разностной схемы. При стремлении величины элементарного объема к нулю этот эффект исчезает, так как разностным методом решались уравнения Эйлера. В [4], [5] рассматривались уже вязкие потоки несжимаемых сред и учитывались реальные диссипативные факторы. В [6], [7] исследовались сжимаемые вязкие среды как для ламинарного, так и для турбулентного диапазонов изменения гидромеханических параметров (ГМП). Однако специально переход от ламинарного течения к турбулентному в работах, известных авторам настоящей статьи, не рассматривался. В свою очередь, в зависимости от вида обтекаемого тела критические числа потоков изменяются. Сказанное относится и к пластине, и к крылу, и к другим объектам. То же самое можно сказать и о каналах (см. [8]). Ниже этот вопрос анализируется для дозвукового потока газа в плоском канале с резким расширением на входе с боковыми вертикальными стенками или без них. Одновременно рассматриваются режимы течения ламинарных потоков и их переход к турбулентному состоянию.

Обычно число $Re = Re_{кр}$, при котором ламинарный поток становится турбулентным, определяется экспериментально. В [7] показано, что его величина может быть определена и теоретически. Дело в том, что если трехмерное возмущение внести в ламинарный поток, то оно за конечное время t_{end} затухает. Если же ввести трехмерное возмущение в поток при $Re > Re_{кр}$, то оно не затухает, а время t_{end} оказывается бесконечно большим. Поэтому одним из критериев перехода ламинарного потока в турбулентный является условие $t_{end} \rightarrow \infty$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Система уравнений гидромеханики

Для определения величины безразмерного комплекса $Re = Re_{кр}$ будем решать следующую систему уравнений гидромеханики:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial F_{\tau}}{\partial x} + \frac{\partial G_{\tau}}{\partial y} + \frac{\partial H_{\tau}}{\partial z} \right), \quad (1.1)$$

записанную в декартовых ортогональных координатах. Здесь векторы $Q, F, G, H, F_{\tau}, G_{\tau}, H_{\tau}$ имеют следующие компоненты:

$$Q = (\rho, \rho U, \rho V, \rho W, \rho E)^T,$$

$$F = (\rho U, (P/kM^2 + \rho U^2), \rho UV, \rho UW, U(P/kM^2 + \rho E))^T,$$

$$G = (\rho V, \rho UV, (P/kM^2 + \rho V^2), \rho VW, V(P/kM^2 + \rho E))^T,$$

$$H = (\rho W, \rho UW, \rho VW, (P/kM^2 + \rho W^2), W(P/kM^2 + \rho E))^T,$$

$$F_\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{2}{3} U \left(2 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) + V \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + W \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix},$$

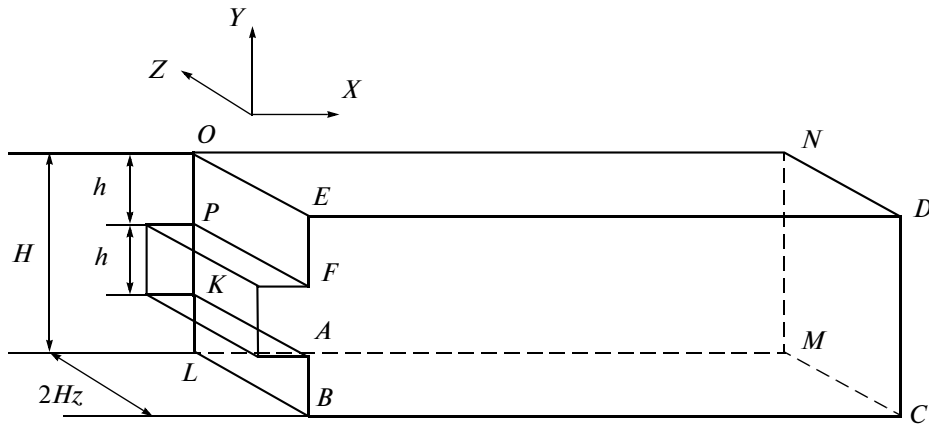
$$G_\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ U \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} V \left(2 \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial z} \right) + W \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$H_\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ U \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + V \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{2}{3} W \left(2 \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \bar{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\lambda} = 1/((k-1)M^2 \text{Pr}).$$

В выражения для компонент перечисленных выше векторов входят следующие параметры: ρ – плотность, P – давление, U, V, W – компоненты вектора скорости потока, E – удельная энергия движущегося газа,

$$E = \frac{U^2 + V^2 + W^2}{2} + \frac{1}{k(k-1)M^2 \rho} P.$$



Фиг. 1.

Система пяти уравнений (1.1), записанная в безразмерных координатах, содержит следующие безразмерные комплексы:

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\wedge} U_{\wedge} h_1}{\mu} - \text{Рейнольдса}, \quad \text{M} = \frac{U_{\wedge}}{c_{\wedge}} - \text{Маха}, \quad \text{Pr} = \frac{C_p \lambda}{\mu} - \text{Прандтля},$$

полученные на основе масштабных величин U_{\wedge} , ρ_{\wedge} , P_{\wedge} , соответствующих левой границе области интегрирования (ОИ). Здесь U_{\wedge} – максимальная величина продольной компоненты вектора скорости, задаваемой на входе в ОИ (канал), ρ_{\wedge} , P_{\wedge} – плотность и давление, соответствующие U_{\wedge} . Кроме того, в безразмерные комплексы входят c_{\wedge} – скорость звука:

$$c_{\wedge} = (kP_{\wedge}/\rho_{\wedge})^{1/2},$$

k – отношение изобарной C_p и изохорной C_v теплоемкостей:

$$k = C_p/C_v,$$

а также μ , λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности. Ниже μ и λ будем рассматривать как постоянные величины. В расчетах они принимались равными 2×10^{-5} кг/(м с) и 0.03 Вт/(м К) соответственно. Число Маха везде равнялось 0.6, 0.7 – число Прандтля, 1.4 – отношение теплоемкостей.

1.2. Граничные и начальные условия

Система уравнений (1.1) решалась для двух вариантов плоских каналов с расширением (фиг. 1): с боковыми вертикальными стенками $ABCDEF$ и $KLMNOP$ и без них. Показанный на фиг. 1 канал имеет две равные по высоте ступеньки. Величину высоты входного отверстия будем обозначать через h . Она использовалась как масштаб для линейных величин. Ширину рассматриваемого канала, как и его длину, будем выражать в долях h . Высоты обратных ступенек также равны h (единице в безразмерном виде).

На входе в канал задаем

$$P_0 = S_0 \rho_0^k, \quad (1.2)$$

$$U_0 = \varphi(y, \delta_U) + C_1(P_0 - \langle P \rangle) \varphi(y, \delta_S), \quad (1.3)$$

$$V_0 = W_0 = 0. \quad (1.4)$$

Здесь

$$C_1 = \frac{1}{kM},$$

$$\varphi(y, \delta_\xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta_\xi}\right)^N, & 0 \leq y \leq \delta_\xi, \\ 1, & \delta_\xi < y \leq h - \delta_\xi, \\ 1 - \left(\frac{y - h + \delta_\xi}{\delta_\xi}\right)^N, & h - \delta_\xi < y \leq h, \end{cases}$$

$\xi \rightarrow (U, T)$, δ_U и δ_T – толщины динамического и теплового пограничных слоев на входе в канал, в безразмерном виде в расчетах они равнялись 0.2 и 0.1 соответственно, $\langle P \rangle$ – средняя для входного отверстия в канал величина давления в текущий момент времени. Второе слагаемое в выражении (1.3) для U_0 вслед за [9] использовали для вывода за пределы ОИ возмущений, достигающих левой границы. На этой границе канала при переходе от его стенки к ядру потока температуру рассматривали как функцию вертикальной (y) координаты и рассчитывали с помощью соотношения

$$T = 1 + (S_0 P^{(k-1)/k} - 1)\varphi(y, \delta_T).$$

Здесь, как и в (1.2), S_0 – энтропийная функция для ядра потока, ее величину принимали равной единице.

На обтекаемых горизонтальных, а если они есть – то и на вертикальных поверхностях (плоскостях) задавали условия прилипания

$$U = V = W = 0$$

и условие адиабатичности

$$\partial T / \partial n = 0,$$

т.е. предполагали, что величины температуры в потоке близки к их величинам на стенке.

Если боковых вертикальных стенок нет, то на некотором заданном расстоянии $\pm H_z$ от плоскости $Z = 0$ задавали условия периодичности:

$$U_+ = U_-, \quad V_+ = V_-, \quad W_+ = W_-, \quad p_+ = p_-, \quad \rho_+ = \rho_-. \tag{1.5}$$

На выходе из канала использовали условие

$$P_L = P_{\text{нар}} + C_2(m_L - \langle m \rangle),$$

где $P_{\text{нар}}$ – безразмерное наружное давление,

$$C_2 = \frac{kM}{H + \langle m \rangle M},$$

$m_L = \iint_{S_L} \rho U dy dz$ – величина расхода через правую (выходную) границу канала, $\langle m \rangle = \frac{1}{L} \int_S m(x, t) dx$ – среднее значение расхода по длине канала в текущий момент времени, $m(x, t) = \iint_{S(x)} \rho U dy dz$ – расход газа через поперечное сечение канала $S(x)$, H – высота канала (в направлении координаты y).

Второе слагаемое в выражении для P_L используется для вывода возмущений за пределы канала через его правую границу (см. [9]). Как следует из выражения для P_L , его величина для поперечного сечения $x = L$ принимается одинаковой, изменяется она только во времени. Остальные параметры на выходе из канала для каждого момента времени с заданной точностью экстраполировались на основе величин ГМП во внутренних точках ОИ, примыкающих к правой границе.

В качестве начальных использовали условия покоя:

$$U = V = W = 0, \quad P = P_{\text{нач}}, \quad T = T_{\text{нач}}.$$

Используя уравнение состояния Клапейрона–Менделеева, нетрудно найти $\rho = \rho_{\text{нач}}$. В безразмерном виде $P_{\text{нач}}$ и $T_{\text{нач}}$ принимали равными единице.

2. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. Интегрирование по пространству

Вся ОИ разбивалась на элементарные объемы с помощью достаточно густой разностной сетки так, чтобы сглаживающее действие аппроксимирующих выражений соответствовало заданной точности решения задачи (см. [7]). Приближенные величины частных производных $\partial^v \tilde{Q} / \partial s^v$ любого v -го порядка ($v = 1, 2, \dots$) по пространственным переменным $s \Rightarrow (x, y, z)$ на выбранной разностной сетке определялись с использованием неопределенных множителей (см. [10]) так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial^v \tilde{Q}}{\partial s^v} = \frac{\partial^v Q}{\partial s^v} + O(\Delta s)^N,$$

где $\partial^v Q / \partial s^v$ – точное решение соответствующей частной производной v -го порядка в (i, j, k) -й точке ОИ, $O(\Delta s)^N$ – бесконечно малая величина N -го порядка. Величина N выбиралась такой, чтобы приближенное и точное значения частных производных v -го порядка с заданной точностью совпадали (см. [7]). В окрестности границ ОИ и на самих ее границах частные производные определялись с требуемой точностью на основе величин гидромеханических параметров (ГМП) внутри ОИ (см. [7]).

При выполнении расчетов производные по пространству во внутренних точках ОИ находились с восьмым порядком точности методом центральных разностей на девятиточечном шаблоне. В окрестности границ производные также рассчитывались с восьмым порядком с помощью односторонних аппроксимаций на десятиточечном шаблоне.

2.2. Интегрирование по времени

При интегрировании уравнений (1.1) по времени переход с n -го временного слоя на $(n + 1)$ -й осуществляется разложением получающегося решения в ряд Тейлора на n -м временном слое по степеням малого параметра Δt в каждой (i, j, k) -й точке ОИ:

$$Q^{n+1} = Q^n + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)^n \Delta t^2 + \dots$$

Здесь $\partial Q / \partial t$ – левые части уравнений (1.1).

Вторые и последующие частные производные по времени от компонент вектора Q находились дифференцированием сначала правых частей уравнений гидромеханики по времени, а затем – правых частей выражений для соответствующих частных производных по времени. При этом $\partial^{\theta+1} Q / \partial t^{\theta+1}$ определяется рекуррентно через производную $\partial^\theta Q / \partial t^\theta$, которая является известной. Дифференцирование по времени оказывается сопряженным с дополнительным дифференцированием по пространству сверх той заданной точности, с которой частные производные от ГМП по пространственным переменным предварительно определялись. Так что при расчете ГМП, повышая точность вычисления величин параметров по времени, необходимо уточнять расчеты величин ГМП по пространственным переменным. Эту вычислительную процедуру необходимо производить согласованно. Независимые уточнения расчетов по времени и по пространству оказываются приемлемыми только для ламинарного диапазона изменения ГМП.

Методическими расчетами было определено, что вычисления с восьмым порядком точности по пространству на сетках, пропорциональных $15 \times 30 \times 20$ узлов на кубическую единицу длины (представленные далее результаты получены на таких сетках), и вторым по времени дают точность не хуже 0.1%. Сходимость получаемого решения при измельчении пространственной сетки проверялась по величине модуля вектора вихря, определяемой комбинацией ГМП. Величина модуля вектора вихря, полученная на более мощных сетках, чем указанная выше, отличалась от величины, полученной на указанной сетке, не более чем на сотую долю процента. Стоит отметить, что в поставленной задаче имеем дело с крупномасштабной турбулентностью, масштаб вихревых возмущений вполне сравним с характерным масштабом длины в рассматриваемом течении. В этом случае разностная сетка с указанной выше мощностью позволяет моделировать нестационарные процессы, влияющие на характер течения. Недостаточное сеточное разрешение пограничного слоя не имеет в данном случае решающего значения.

Таким образом, можно ожидать, что и параметры, и характеристики течения получены с приемлемой точностью, близкой к 0.1%, а изменение параметров дискретизации не отразится на результатах расчетов.

3. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. О вносимом возмущении

Дополнительно на начальном этапе вычислений величин ГМП в ОИ вносилось трехмерное возмущение. Это означает, что на протяжении первой сотни шагов интегрирования по времени (0.2 единицы в безразмерном виде) на входе в канал вместо равенства (1.5) использовались равенства

$$V_0 = \xi_V U_0, \quad W_0 = \xi_W U_0. \quad (3.1)$$

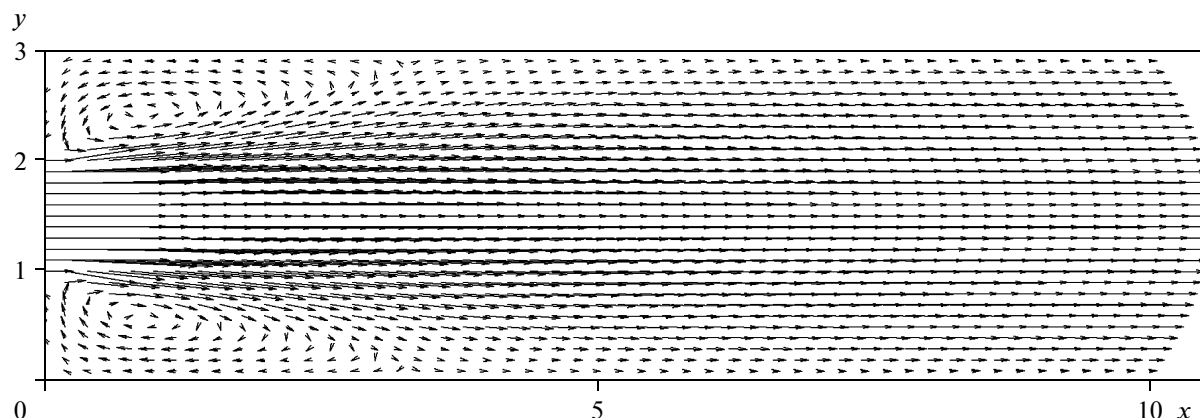
В этом случае в канал втекал поток, направленный влево вверх. Стоит сказать, что течение в рассматриваемой задаче сильно возмущается нестационарными процессами, происходящими в широкой части канала непосредственно в окрестности вдува. Этому способствует геометрия канала, наличие ступенчатого профиля на входе. Использование формул (3.1) позволяло отклонить поток от симметричного состояния. Но дополнительно каких-либо периодических колебаний на основной поток не накладывалось. Энергия флуктуаций определялась крупномасштабными параметрами канала с внезапным расширением.

Коэффициенты ξ_V и ξ_W варьировались по величине, по характеру изменения во времени (скачок, прямая, синусоидальная кривая) и по продолжительности их использования. Оказалось, что ни величины упомянутых коэффициентов, ни характер их изменения во времени не сказываются на спектре частот колебаний потока после его стабилизации. В случае нестационарного течения осредненные характеристики будут иметь единственное распределение. Изменится лишь время выхода на статистически стационарный режим. При смене знака ξ_V или ξ_W распределение параметров будет симметричным. Поэтому остановились на варианте скачкообразного изменения коэффициентов ξ_V и ξ_W , приняв их равными между собой и равными 0.1. Как выяснилось в результате исследований, продолжительность использования равенств (3.1) для турбулентного диапазона изменения ГМП оказалась важной. Методом проб установили, что по прошествии 0.2 единиц безразмерного времени (сто шагов интегрирования по времени) поток остался трехмерным и турбулентным.

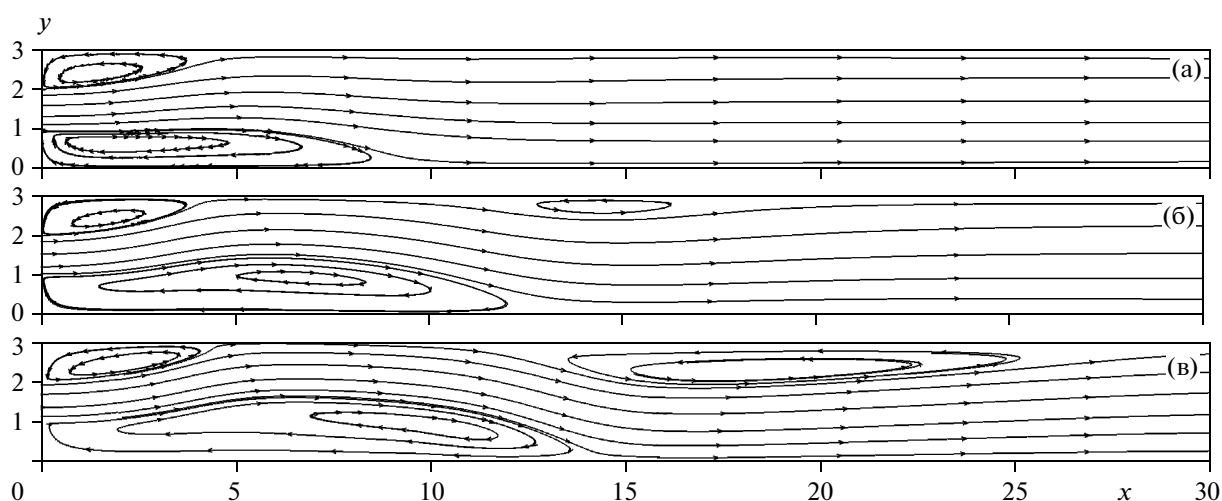
Существенной особенностью решаемых уравнений является то, что пока поток ламинарный, введенное в ОИ начальное возмущение и пульсации, возникшие на входе, монотонно затухают. При достаточно высоких числах Рейнольдса, близких к $Re_{кр}$, и заданной величине длины канала L они могут достигать правой границы канала. Но как до истечения газа через правую границу, так и после начала истечения введенное в поток возмущение будет только затухать. В турбулентном диапазоне изменения ГМП такого не происходит: достигнув правой границы, трехмерный поток начинает истекать из ОИ, не превращаясь в двумерный. Третья компонента вектора скорости, немонотонно изменяясь в пространстве и во времени, практически не затухает. Здесь следует сказать об эффекте памяти у гидромеханического потока: по прошествии определенного времени $t = t_b$ поток на входе в канал занимает то положение, которое он имел, когда вносилось начальное возмущение. Достижение времени $t = t_b$, являющегося возрастающей функцией числа Рейнольдса, символизирует, что процесс вычислений ГМП можно прекратить, так как в объем канала не будут больше вноситься возмущающие воздействия, генерируемые на его левой границе.

3.2. Симметричные стационарные ламинарные потоки

Как показали результаты параметрических исследований для воздуха, если число Re меньше 90, то соответствующий ламинарный поток является стационарным и симметричным. При данных условиях вязкие факторы превалируют над динамическими, поэтому трехмерное возмущение при любых величинах коэффициентов ξ_V и ξ_W быстро затухает, характер течения в канале формируется его плоскими границами. Фронт струи, сначала трехмерный, не достигнув правой границы (выхода), становится двумерным. Ему на входе соответствует близкий к стационарному поток до тех пор, пока не начнется истечение струи из канала. После этого исчезнут и нестационарные явления.



Фиг. 2.

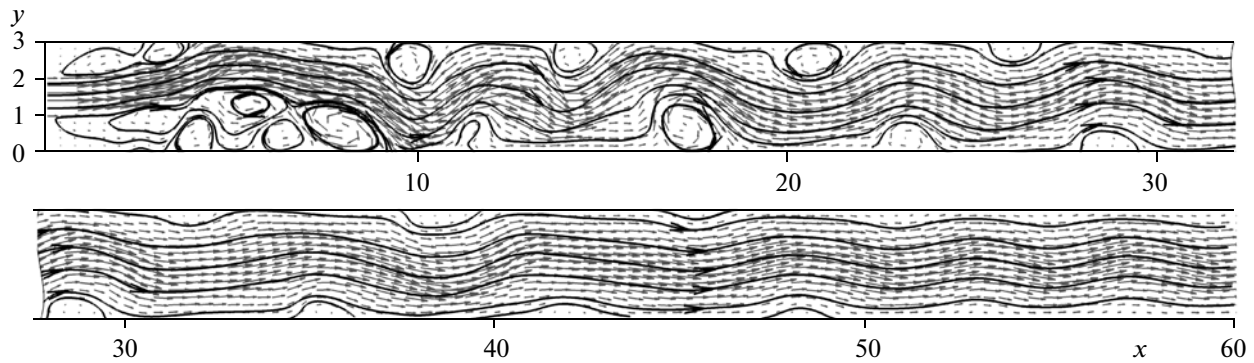


Фиг. 3.

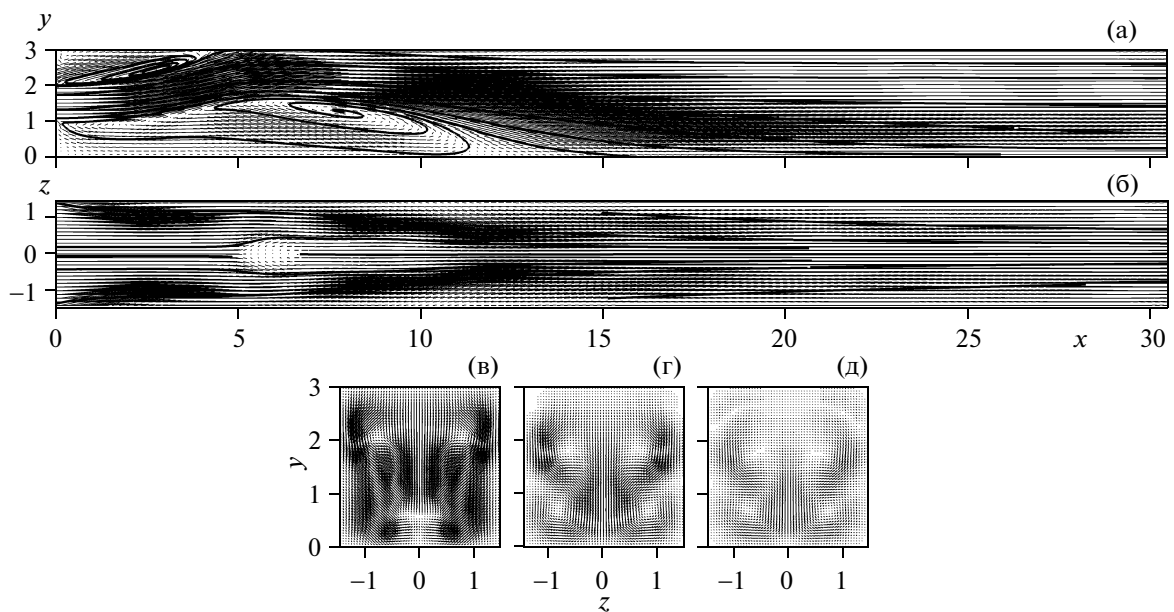
Поток при наличии двух обратных ступенек образует в окрестности входа в канал две одинаковые отрывные зоны (см. фиг. 2, $Re = 50$), размеры которых почти линейно возрастают с ростом числа Рейнольдса. В пределах отрывных зон вертикальная составляющая V вектора скорости имеет тот же порядок величин, что и продольная; в канале реализуется двумерный симметричный поток. За пределами зон компонента скорости V довольно быстро начинает уменьшаться и далее вниз по потоку двумерность исчезает. Поток становится одномерным с постоянной по x плотностью тока $\rho U = \text{const}$. Если $\rho = \text{const}$, получаем течение Пуазейля. Если среда сжимаемая, то при $Re < 90$ изменение $\rho = \rho(x)$ невелико. Поэтому и отклонение U от профиля Пуазейля тоже небольшое (в пределах 2–3%, см. [11]).

3.3. Несимметричные ламинарные стационарные потоки

Если $Re > 90$, то при наличии двух одинаковых обратных ступенек на входе в канал в окрестности левой границы поток, оставаясь двумерным, становится несимметричным (фиг. 3). В этом случае при $\xi_V > 0$ струя отклоняется кверху, а отрывные зоны перестают быть равными. Достигнув верхней границы, струя отражается и отклоняется вниз. Однако если $Re < 120$ (фиг. 3а), то, не достигнув нижней границы, струя замедляет свои отклонения и далее вниз по потоку становится одномерной. Получающийся поток является стационарным, в окрестности левой (входной) границы канала – двумерным и несимметричным. На некотором удалении от входа (обозначим это расстояние через x_*) поток становится одномерным. С ростом числа Re (см. фиг. 3б, $Re = 200$) расстояние x_* также растет. После отражения от верхней стенки канала струя достигает нижней



Фиг. 4. Векторы скорости и мгновенные линии тока в канале без боковых стенок.



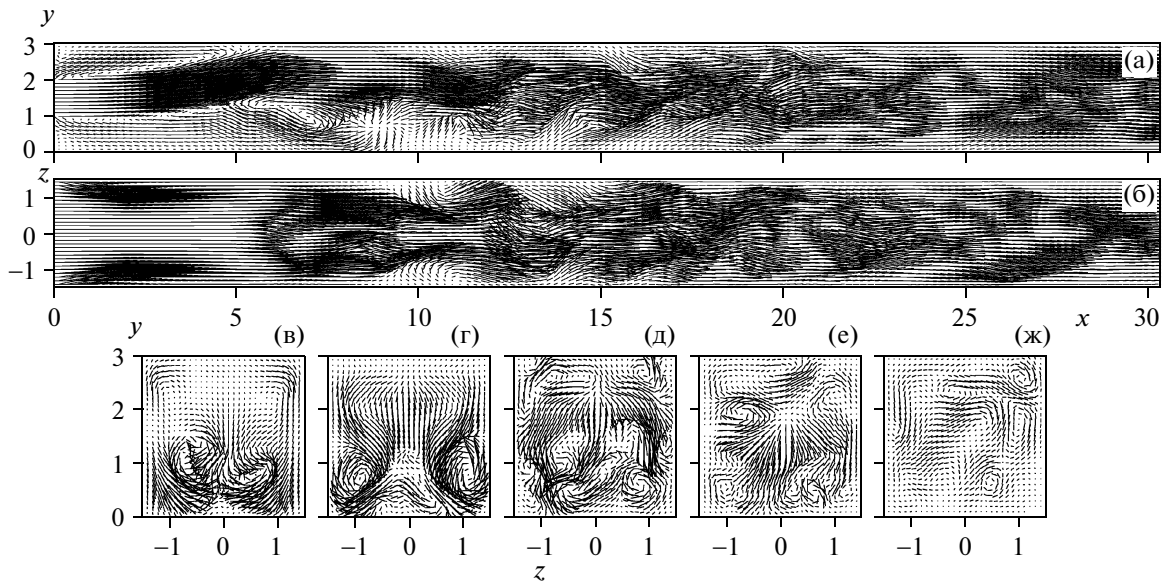
Фиг. 5.

и образует вторую верхнюю отрывную зону. Соответствующая картина течения при $Re = 350$ показана на фиг. 3в. Здесь наблюдаются уже две верхних и одна нижняя отрывные зоны, а одномерное состояние достигается только после того, как основной поток обогнет вторую верхнюю отрывную зону. Именно в пределах этой зоны начинают формироваться и отделяться более мелкие вихри — предвестники отклонения потока от устойчивого состояния.

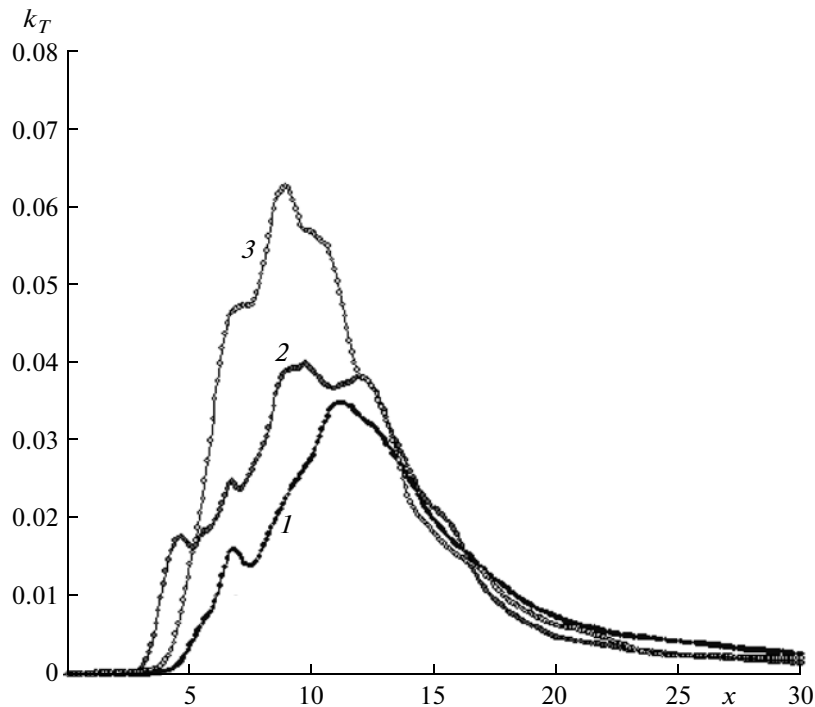
Наконец, при $Re = 415$ поток теряет устойчивость и становится нестационарным. Интервал значений чисел Рейнольдса между 90 и 415 характерен тем, что наблюдается примерный баланс между вязкими и динамическими факторами. В результате поток оказывается асимметричным, но стационарным.

3.4. Нестационарные ламинарные потоки

При $Re > 415$ поток становится нестационарным, оставаясь двумерным. Это состояние реализуется для интервала чисел Рейнольдса между 415 и $Re_{кр}$ (для воздуха $Re_{кр} = 10^3$). В этом интервале начинаются колебания струи потока во времени, изменяются при одном и том же числе Re параметры отрывных зон, в отрывных зонах и за их пределами наблюдаются нестационарные вихревые движения. О характере течения для этого интервала изменения чисел Рейнольдса можно судить на основе данных фиг. 4, соответствующей числу $Re = 700$. Но как только число Re станет больше и равным числу $Re_{кр}$, поток из двумерного превращается в трехмерный. Третья коор-



Фиг. 6.



Фиг. 7. Распределение кинетической энергии турбулентности по длине ($Y = 1.5, Z = 0$) в каналах с различным расстоянием между боковыми стенками, $Re = 400$: 1 – для $H_z = 3$, 2 – для $H_z = 4$, 3 – для $H_z = 6$.

дината уже не затухает, а упорядоченная двумерная струя становится неупорядоченной и трехмерной.

Особенно ярко это наблюдается для канала с вертикальными боковыми стенками ($H_z = 1.5$). На фиг. 5 для канала с квадратным сечением при $x > 0$ показана трехмерная симметричная (относительно $Z = 0$) нестационарная картина течения, в данном случае при числе $Re = 500$ в плоскостях на фиг. 5а–д – соответственно, $xu, z = 0$; $xz, y = 1.5$; $yz, x = 10$; $yz, x = 20$. Если $Re = 600$, то имеем неупорядоченную, несимметричную картину течения, представленную на фиг. 6.

Мгновенные векторы скорости течения в канале с боковыми стенками ($H_z = 1.5$) в плоскостях на фиг. 6а–ж – соответственно, $xu, z = 0$; $xz, y = 1.5$; $yz, x = 8$; $yz, x = 10$; $yz, x = 15$; $yz, x = 20$; $yz, x = 25$.

Таким образом, помимо упоминавшегося выше времени t_{end} , стремящегося к бесконечности при $Re \rightarrow Re_{\text{кр}}$, признаком достижения турбулентного диапазона изменения ГМП является неупорядоченность течения. Еще одним признаком достижения турбулентного диапазона изменения ГМП может служить отсутствие тенденции к затуханию третьей компоненты вектора скорости потока. Оба последних признака требуют существенно меньших затрат машинного времени при определении величины критического числа Рейнольдса.

Отметим также, что рост числа Re , соответствующего второму линейному размеру прямоугольника, будет интенсифицировать вихревые процессы в канале. Оказывается, если у прямоугольного канала с вертикальными боковыми стенками один из двух линейных размеров соответствует числу $Re = Re_{\text{кр}}$, то в таком канале ламинарный нестационарный поток отсутствует. Более того, если один из линейных размеров соответствует Re , большему $Re_{\text{кр}}$, то течение будет турбулентным и рост Re в данном случае интенсифицирует нестационарные вихревые процессы (фиг. 7).

Видим, что с увеличением H_z растет и k_T . Однако во всех случаях достаточно быстро происходит реламинаризация потока и в том месте канала, начиная с которого действителен закон Пуазейля, течение будет ламинарным. Но как только и второй линейный размер канала с боковыми вертикальными стенками будет соответствовать турбулентному режиму течения, реламинаризация исчезнет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложен метод теоретического определения критического числа Рейнольдса, способный заменить дорогостоящий физический эксперимент. Представлены результаты исследования характера течения в плоском канале с внезапным расширением на входе в зависимости от числа Рейнольдса. Определены числа Рейнольдса перехода от симметричного ламинарного стационарного течения к несимметричному, от стационарного ламинарного течения к нестационарному, от упорядоченного ламинарного течения к неупорядоченному трехмерному турбулентному движению. Полученные критические параметры не являются универсальными и зависят от конфигурации канала с расширением (от соотношения длин сторон, образующих поперечное сечение канала; от отношения площади вдува к площади широкой части), однако общими являются выявленные закономерности движения, характер смены режима течения.

В канале с двумя обратными ступеньками, равными по высоте вдуву, показано нарастание интенсивности нестационарных процессов при увеличении ширины канала (размера в поперечном направлении). Энергия турбулентных пульсаций при неизменном числе Рейнольдса в более широких каналах выше, так как выше и энергетика возмущений, определяемая геометрией счетной области. Однако в стратифицированном потоке при низких числах Рейнольдса турбулентное течение имеет место только в окрестности разрыва (в окрестности скачка) параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубках // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172–183.
2. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод “крупных частиц” для решения задач внешней аэродинамики. М.: Изд-во АН СССР, 1970.
3. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод “крупных частиц” для газодинамических расчетов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 1. С. 182–207.
4. Рождественский Б.Л., Симакин И.Н. Двумерные и трехмерные вторичные течения в плоском канале, их связь и сравнение с турбулентными течениями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 553–558.
5. Рождественский Б.Л., Симакин И.Н. Моделирование турбулентных течений в плоском канале // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т. 25. № 1. С. 96–121.
6. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Математическое моделирование турбулентных потоков // Матем. моделирование. 1997. Т. 9. № 2. С. 113–116.
7. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001.
8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.

9. Федорченко А.Т. О расчетных моделях взаимодействия вихрей с проницаемой границей области дозвукового потока // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 1. С. 66–70.
10. Zalesak S. T. A physical interpretation of the Richtmyer two-step Lax–Wendroff scheme, and its generalization to higher spatial order. Advances in computer methods for partial differential equations V // Proc. 5th IMACS Intern. Symp. Comput. Meth. for Partial Differential Equations. Bethlehem (Pennsylvania, USA), June 19–21, 1984. New Brunswick: Rutgers Univ. Press, 1984. P. 491–496.
11. Липанов А.М., Карсканов С.А. Установление и эволюция параметров симметричного ламинарного потока в плоском канале с внезапным расширением // Прикл. матем. и техн. физ. 2007. Т. 48. № 1. С. 35–42.