С. Н. Бернштейн, Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа, *УМН*, 1941, выпуск 8, 75–81

ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА *).

С. Н. Бернштейн.

1. Настоящая работа содержит доказательство и некоторые следствия одной из теорем моей заметки [15] **).

Геометрическая теорема, которую я докажу здесь, следующая:

Поверхность $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков, полная кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может оставаться все время между двумя фиксированными плоскостями $z = \pm h$.

Из этой теоремы легко получается следующее очень общее предложение относительно уравнений эллиптического типа, которое содержит, как частный случай, основное свойство гармонических функций, известное под именем теоремы Лиувилля:

Если z — ограниченная функция, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяющая уравнению вида

$$Ar + Bs + Ct = 0, \tag{1}$$

где, A, B, C — ограниченные функции от x, y, z, p, q, r, s, t, удовлетворяющие неравенству $AC - B^2 > 0$, то функция z есть постоянная.

Наше обобщение теоремы Лиувилля, очевидно, применимо также к минимальным поверхностям; но при помощи искусственного приема, связанного с особым видом уравнения этих поверхностей, я устанавливаю, кроме того, следующее специальное свойство минимальных поверхностей, существенно отличающее их от поверхностей гармонических:

Вещественная минимальная поверхность $z = f(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков для всех вещественных конечных значений x и y, является плоскостью. Другими словами, функция z, как известно, являющаяся аналитической, должна, вообще говоря, иметь вещественные особенности на конечном расстоянии; таким образом, хотя существует очень большое разнообразие целых рациональных или трансцендентных гармонических

*) Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, Сообщения Харьковского математического общества, т. XV, № 1 (1915), стр. 38—45. Имеется также немецкий перевод этой работы (сделанный Т. Радо), напечатанный в Mathematische Zeitschrift, т. 26 (1927), стр. 551—558.

**) Цифры в квадратных скобках указывают номер работы автора по списку литературы на стр. 27—28.

функций, единственной целой функцией, удовлетворяющей уравнению минимальных поверхностей

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

является линейная функция $z=Ax+By+C$.

2. Начнем с доказательства леммы, которой мы будем неоднократно пользоваться.

Лемма. *Пусть $z=f(x, y)$ — функция вещественных переменных x и y, имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков, и пусть B — некоторая область, в которой $z<0$, имеющая в качестве границы множество точек, где $z=0$. Область B не может быть ограниченной, если $rt-s^2\leqslant 0$ во всех точках, для которых $p^2+q^2<N$, где N — сколь угодно малое фиксированное положительное число.*

В самом деле, из предположения ограниченности области B следовало бы, что функция z достигает абсолютного минимума $m<0$ во внутренней точке области B, где $p=q=0$. Принимая эту точку O за начало координат и принимая во внимание, что в точке O $rt-s^2=0$, можно тогда положить

$$z=m+(\alpha x+\beta y)^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2+2\varepsilon_2 xy+\varepsilon_3 y^2),$$

где α, β — постоянные (которые могут быть равны нулю), а ε_1, ε_2, ε_3 стремятся к нулю при x^2+y^2, стремящемся к нулю. С другой стороны, рассмотрим функцию

$$z_1=m+\frac{h}{2}(x^2+y^2),$$

где h — фиксированное положительное число, которое можно взять столь малым, чтобы во всех точках области B выполнялись неравенства $z_1<0$, $h^2(x^2+y^2)<N$.

При этих условиях во всех точках границы B

$$\delta=z-z_1>0.$$

Но при данном h точку O можно окружить столь малым кругом, чтобы по крайней мере в одной его внутренней точке выполнялось неравенство

$$\delta=(\alpha x+\beta y)^2+\frac{1}{2}(\varepsilon_1-h)x^2+\varepsilon_2 xy+\frac{1}{2}(\varepsilon_3-h)y^2<0. \tag{2}$$

Следовательно, функция δ также будет иметь абсолютный минимум внутри B; при этом в точке A, где достигается этот минимум, будет

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\geqslant 0,\quad \frac{\partial\delta}{\partial x}=\frac{\partial\delta}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\geqslant 0,\quad \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\geqslant 0,$$

откуда

$$rt-s^2=\left(h+\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right)\left(h+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2=$$

$$=h^2+h\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)+\left[\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\geqslant h^2>0$$

и

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2=h^2(x^2+y^2)<N.$$

Но эти два неравенства несовместимы с предположением леммы. Следовательно, лемма доказана.

3. Мы можем теперь перейти к доказательству теоремы.

Теорема. *Поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные производные первого и второго порядков, кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может оставаться при всех значениях x и y заключенной между двумя фиксированными плоскостями $z=\pm h$.*

В самом деле, предположим, что наша поверхность остается заключенной между плоскостями $z=\pm h$. Путем соответствующей замены координат всегда можно добиться того, чтобы в начале координат выполнялись условия $p_0=0$, $q_0>0$, $r_0t_0-s_0^2<0$. При этих условиях касательная плоскость к поверхности

$$z=f(x, y)$$

в точке $x=y=0$ будет иметь уравнение

$$z_1=q_0y$$

и пересечет эту поверхность по четырем различным ветвям, которые определят в окрестности начала координат четыре различных области Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 плоскости (x, y), такие, что в Ω_1 и Ω_3 мы будем иметь $\delta=z-z_1<0$, а в Ω_2 и Ω_4 будет $\delta>0$.

Согласно доказанной выше лемме, ни одна из этих областей (продолженных до границы $\delta=0$) не может быть ограниченной. С другой стороны, области Ω_1 и Ω_3 должны быть расположены выше прямой $y=-\frac{h}{q_0}$, так как при $y\leqslant-\frac{h}{q_0}$ из предположения $z>-h$ следует, что $\delta=z-q_0y>0$; и точно так же области Ω_2 и Ω_4 должны быть расположены ниже прямой $y=\frac{h}{q_0}$ вследствие неравенства $z<h$.

Я утверждаю, что, кроме того, по меньшей мере одна из областей Ω_1 и Ω_3 остается все время ниже прямой $y=\frac{h}{q_0}$. В самом деле, области Ω_1 и Ω_3 не могут иметь общих точек, так как если бы такая точка M существовала, то ее можно было бы соединить с началом координат двумя различными линиями, одна из которых принадлежала бы Ω_1, а другая принадлежала бы Ω_3; замкнутый контур, полученный таким образом, содержал бы внутри одну из областей Ω_2 или Ω_4, что невозможно, так как эти области неограничены. Следовательно, если бы области Ω_1 и Ω_3 содержали точки прямой $y=\frac{h}{q_0}$, то их границы также содержали бы точки этой прямой, но это невозможно, так как на границе имеем $\delta=z-q_0y=0$.

Итак, мы приходим к заключению, что по крайней мере одна из областей с четным номером и одна из областей с нечетным номером при неограниченном продолжении остаются постоянно между прямыми $y=\pm\frac{h}{q_0}$. Существенно заметить, что по крайней мере одна из этих областей простирается до бесконечности только в одном направлении. В самом деле, пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, расположенные между нашими прямыми, простирающиеся обе до бесконечности в обоих направлениях; тогда в каждой из этих областей можно провести кривую S_1 (соответственно S_2), простирающуюся до бесконечности в обоих направлениях, и так как начало координат является граничной точкой и для Ω_1, и для Ω_2, то оно будет расположено между этими двумя кривыми, так что никакая третья область не сможет простираться до бесконечности в обоих направлениях. Так как обе области Ω_3 и Ω_4 должны быть расположены между S_1 и S_2, то они a fortiori будут заключены между прямыми $y = \pm \frac{h}{q_0}$ и, следовательно, смогут простираться до бесконечности лишь в одном направлении.

Итак, мы можем допустить, что область Ω_1 заключена между прямыми $y = \pm \frac{h}{q_0}$ и простирается до бесконечности только в положительном направлении оси x. Рассмотрим в плоскости (x, y) прямую $x = x_0$; для точек этой прямой, принадлежащих Ω_1, имеем $\delta < 0$. Пусть $u(x_0) = \delta(x_0, y_0) \leqslant \delta(x_0, y)$ — абсолютный минимум функции δ, достигаемый в одной из рассматриваемых точек.

Изучим эту функцию $u(x)$, определенную для возрастающих значений x. Заметим, что $u(x) < 0$, но для значений x, достаточно близких к нижней грани абсцисс точек, принадлежащих области Ω_1, $u(x)$ сколь угодно близка к нулю; следовательно, найдутся такие x_0 и x_0', что $x_0 > x_0'$ и $u(x_0) - u(x_0') < 0$.

Докажем, что при этих условиях для $x_1 > x_0 > x_0'$ должно выполняться неравенство

$$|u(x_1)| \geqslant \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'} \cdot [u(x_0') - u(x_0)]. \tag{3}$$

В самом деле, так как $u(x) < 0$, то неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$-u(x_1) \geqslant \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'} [u(x_0') - u(x_0)].$$

Предположим, что это неравенство не выполняется, тогда найдется x_1 такое, что

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

Таким образом, в этом случае функция

$$v(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0') \tag{4}$$

будет отрицательной при $x = x_0$ и $y = y_0$; следовательно, найдется область B, в которой $v < 0$. Эта область должна быть ограниченной, так как $v \geqslant 0$, когда $x = x_0'$, когда одновременно $x_0' < x < x_1$ и $\delta = 0$, и когда $x = x_1$. Но это противоречит лемме предыдущего параграфа, так как

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = rt - s^2 \leqslant 0.$$

Следовательно, неравенство (3) должно выполняться. Но для достаточно больших x_1 это неравенство несовместимо с предположением $|z| < h$. Теорема, таким образом, доказана.

Используя лемму § 2 в ее общем виде, мы можем обобщить нашу теорему следующим образом.

4. Обобщение. *Поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков, кривизна которой отрицательна в некоторой определенной точке, где наклон касательной плоскости $p^2+q^2=q_0^2>0$, не может для всех значений x и y оставаться заключенной между двумя фиксированными плоскостями $z=\pm h$, если ее кривизна может быть положительной*[1]) *только в тех точках, где* $p^2+q^2>N>q_0^2$.

В самом деле, все рассуждения предыдущего доказательства, до исследования функции $v(x, y)$, заданной формулой (4), остаются без изменения. Однако мы не можем утверждать невозможность ограниченности области B, где $v<0$. Эта область могла бы быть ограниченной, лишь если бы она содержала точки, где при произвольно малом $\varepsilon>0$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|=\left|-\frac{1}{x-x_0}u(x_1)+p\right|<\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|=|q-q_0|<\varepsilon$$

и $rt-s^2>0$. Но в этих точках по предположению

$$p^2+q^2>N,$$

следовательно,

$$|u(x_1)|>(x_1-x_0)\left[\sqrt{N-(q_0^2+\varepsilon)^2}-\varepsilon\right] \tag{5}$$

при произвольно малом ε.

Итак, вместо неравенства (3) мы получаем неравенство (5); но это последнее также несовместимо с неравенством $|z|<h$. Следовательно, наше обобщение доказано.

Замечание. Необходимо заметить, что функции, которые нами рассматривались и для которых мы доказали невозможность неравенства $|z|<h$, могут тем не менее удовлетворять условию $z<h$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть поверхность, определенную уравнением

$$z=h-e^{x-y^2}.$$

Непосредственно видно, что

$$rt-s^2=-2e^{x-2y^2}<0$$

для всех значений x и y и в то же время

$$z<h.$$

Заметим также, что наша теорема перестает быть верной для поверхностей, кривизна которых тождественно равна нулю, так как цилиндрическая поверхность $z=e^{-x^2}$ удовлетворяет условию $|z|\leqslant 1$.

5. Теорема. *Если функция z имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению*

$$Ar+2Bs+Ct=0 \qquad (AC-B^2>0),$$

[1]) Достаточно, например, чтобы кривизна не была положительной в окрестности тех точек, где $p=q=0$, и чтобы в окрестности хотя бы одной из этих точек она была отрицательна.

где A, B, C — какие-либо конечные функции от x, y, z, p, q, r, s, t, и если она ограничена, то она является постоянной *).

В самом деле, положим $rt - s^2 = \lambda$. Наше уравнение примет вид

$$Ar + 2Bs + C\frac{s^2+\lambda}{r} = 0;$$

отсюда следует, что $\lambda \leqslant 0$, и кроме того равенство $\lambda = 0$ влечет за собой $r = s = t = 0$. Следовательно, если нигде не имеет места наравенство $\lambda < 0$, то это означает, что p и q постоянные, которые должны быть равны нулю, если z, приводящаяся к плоскости, остается ограниченной; следовательно, z должна быть постоянной. Но в силу предыдущей теоремы, если неравенство $\lambda < 0$ имеет место хотя бы в одной точке, то функция z не может быть ограниченной.

Доказанная нами теорема является обобщением теоремы Лиувилля, сформулированным мною четыре года назад.

Мы выведем теперь из этой теоремы одно предложение относительно минимальных поверхностей.

6. Теорема. *Если минимальная поверхность S задана уравнением*

$$z = f(x, y),$$

где f имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков при всех вещественных значениях x, y, то S является плоскостью.

В самом деле, образуем диференциальное уравнение, которому удовлетворяет $u = \operatorname{arctg} p$, предполагая, что

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0. \tag{6}$$

Диференцируя [2]) по x уравнение (6), получим

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2p(rt - s^2) = 0$$

или, исключая t,

$$(1+q^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pr^2}{1+p^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{2prs}{1+p^2}\right) + (1+p^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2ps^2}{1+p^2}\right) = 0.$$

---

*) Теорема 5 может быть формулирована иначе:

Если $F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0$ есть уравнение эллиптического типа (при любых значениях входящих в него восьми переменных, т. е. $4F'_rF'_t - F'^2_s > 0$) и ему удовлетворяет любая линейная функция $z = ax + by + c$, то всякое его решение, ограниченное на всей плоскости, есть постоянная.

Действительно, условие, что функция $z = ax + by + c$ при любых значениях постоянных удовлетворяет уравнению $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, означает, что $F(x, y, z, p, q, 0, 0, 0) = 0$ при всех значениях пяти независимых величин x, y, z, p, q, а потому

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = Ar + 2Bs + Ct,$$

где

$$A = F'_r(x, y, z, p, q, \theta r, \theta s, \theta t), \quad 2B = F'_s(x, y, z, p, q, \theta r, \theta s, \theta t),$$

$$C = F'_t(x, y, z, p, q, \theta r, \theta s, \theta t)$$

$(0 < \theta < 1)$.

[2]) Мы допускаем здесь существование третьих производных; но оно следует из того факта, что существование вторых производных влечет за собой аналитичность функции [см. по этому вопросу мои работы по задаче Дирихле: [13], стр. 132 и [17], стр. 482].

Но, очевидно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1+p^2}-\frac{2pr^2}{(1+p^2)^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}}{1+p^2}-\frac{2prs}{(1+p^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1+p^2}-\frac{2ps^2}{(1+p^2)^2}.$$

Следовательно, u удовлетворяет уравнению

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

и, таким образом, $u=\operatorname{arctg} p$ не может быть ограниченным во всей плоскости, не сводясь к постоянной. Но, по нашему предположению, p не должно обращаться в бесконечность ни при каких конечных значениях x, y; следовательно, для всех конечных значений x и y имеем $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$, откуда заключаем, что u есть постоянная. Итак, p и q являются постоянными, а следовательно, поверхность z является плоскостью.