О. В. Бесов, О некоторых свойствах пространств $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}$, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, номер 1, 16–23

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1960 МАТЕМАТИКА № 1 (14)

О. В. Бесов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$

В работах С. М. Никольского (см. [12]) были введены и изучены пространства $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$ дифференцируемых функций многих переменных. В настоящей заметке мы рассматриваем вопросы компактности множеств функций в этих пространствах (достаточные условия компактности являются дальнейшим уточнением результатов С. М. Никольского [11]). Полученный результат обобщает в частности теоремы о компактности Л. Д. Кудрявцева [6], те из результатов С. М. Никольского ([8], [11]), которые относятся к произвольной области и ко всему пространству, и результаты В. И. Кондрашева [5], если их формулировать для внутренней подобласти. Устанавливается также несепарабельность пространств $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$.

Пусть G есть область (открытое множество) m-мерного пространства точек $(x_1, \dots, x_m)$, $r_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, где $\bar{r}_i$ — целое и $0 < \alpha_i \leqslant 1$. Положим[1]

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |f(\overline{Q})|^p dQ\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

$$\omega_k(f, \bar{h}_i)_{L_p(G)} = \sup_{G'} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|\Delta^k_{th_i} f\|_{L_p(G')}, \qquad (1)$$

какова бы ни была область G', сдвигаемая вектором $kt\bar{h}_i$ в направлении x_i в пределах G (при любом $t \in [0, 1]$)[2].

Функция f называется принадлежащей к $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}(G)$ ([8], [9], [12]), если она имеет интегрируемые в степени p на G частные, обобщенные в смысле С. Л. Соболева, не смешанные производные

$$f_{x_i}^{(k)} = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} \qquad (k = 0, 1, \dots, \bar{r}_i;\ i = 1, 2, \dots, m),$$

и при этом имеют место неравенства

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p(G)} \leqslant M h_i^{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \qquad (2)$$

---

1) При $p = \infty$ $\|f\|_{L_\infty(G)} = \sup\limits_{Q \in G} \mathrm{vrai}\, |\bar{f}(Q)|$.

2) Здесь $\Delta^k_{th_i} f(x_1, \dots, x_m)$ — разность k-го порядка с шагом th_i в направлении x_i.

Для $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_m)}(G)$ положим

$$\|f\|_{L_p(G)}^{(r_1, \dots, r_m)} = \|f\|_{L_p(G)} + M_f, \tag{3}$$

где M_f есть наименьшее число, для которого выполняются (2). Тогда $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}(G)$ становится линейным нормированным пространством [11].

Будем еще рассматривать пространство $H_p^{*(r_1, \dots, r_m)}$ периодических, периода 2π, функций (по всем переменным x_i). Нормы функций $\|f\|_{L_p^*}^{(r_1, \dots, r_m)}$ при этом определим подобно (3) с единственной разницей в том, что участвующие в них интегралы берутся по m-мерному кубу с ребрами длиной 2π и параллельными x_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, что отмечается значком L_p^*. При этом векторы $\bar{h}_i$ в неравенствах, аналогичных (1), можно брать любыми. В [10] (стр. 267) доказано, что пространства $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$ (и $H_p^{*(r_1, \dots, r_m)}$) типа B.

Назовем наилучшим приближением функции f при помощи целых функций степеней $\nu_1, \dots, \nu_m$

$$A_{\nu_1, \dots, \nu_m}(f)_p = \inf_{g_{\nu_1, \dots, \nu_m}} \|f - g_{\nu_1, \dots, \nu_m}\|_{L_p},$$

где нижняя грань распространена на всевозможные целые функции $g_{\nu_1, \dots, \nu_m}$ степеней $\nu_1, \dots, \nu_m$ соответственно по $x_1, \dots, x_m$ (здесь и в дальнейшем L_p означает $L_p(R_m)$). Аналогично

$$A_{\nu_1, \dots, \nu_m}(f)_p^* = \inf_{T_{\nu_1, \dots, \nu_m}} \|f - T_{\nu_1, \dots, \nu_m}\|_{L_p^*},$$

где $T_{\nu_1, \dots, \nu_m}$ — тригонометрические многочлены степеней не выше $\nu_1, \dots, \nu_m$.

Введем в рассмотрение ([3], [8] стр. 258) целую функцию степени ν, суммируемую на вещественной оси

$$K_\nu^{(r)}(u) = \sum_1^{\bar{r}+2} \frac{(-1)^{i-1}\binom{\bar{r}+1}{i}}{i} g\left(\frac{\nu u}{i}\right),$$

$$g(x) = k_\lambda \left(\frac{\sin \frac{x}{\lambda}}{x}\right)^\lambda,$$

где $\lambda \geqslant r + 2$ — четное, а k_λ подобрано так, что выполняется равенство $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$. Обозначим через $G_{\nu_1, \dots, \nu_m}(x_1, \dots, x_m)$ целую функцию степени $\nu_1, \dots, \nu_m$ по $x_1, \dots, x_m$, определяемую для $f \in L_p$ равенством

$$G_{\nu_1, \dots, \nu_m}(x_1, \dots, x_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu_1}^{(r_1)}(u_1) \dots K_{\nu_m}^{(r_m)}(u_m) f(x_1 + u_1, \dots, x_m + u_m)\, du_1 \dots du_m. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь

$$^{(1)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f\|_{L_p}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n A\, a_1^n,\ldots,a_m^n(f)_p,$$

$$^{(1)}\|f\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f\|_{L_p^*}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^*,$$

$$^{(2)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f\|_{L_p}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n\|f-G_{a_1^n,\ldots,a_m^n}\|_{L_p},$$

где $a_i^{r_i}=2$, а $G_{a_1^n,\ldots,a_m^n}$ определена равенством (4). Легко проверить, что числа $^{(1)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}$, $^{(1)}\|f\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_m)}$, $^{(2)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}$ удовлетворяют всем аксиомам нормы. Кроме того, из теорем 7 и 10 работы [8] (стр. 259, 265) следует, что $^{(1)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}$, $^{(1)}\|f\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_m)}$, $^{(2)}\|f\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}$ эквивалентны. Аналогичное утверждение имеется и в периодическом случае. Из (4) с помощью неравенства Минковского получаем, что для $f\in L_p$

$$\|f-G_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\|_{L_p}\leqslant d\|f\|_{L_p}, \tag{5}$$

где d зависит лишь от $r_1,\ldots,r_m$.

Выведем некоторые условия компактности множества функций в пространствах $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(G)$, $H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$. Заметим кстати, что функции из этих пространств не являются, вообще говоря, непрерывными относительно сдвига. Так, для

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin\left([2^{\frac{n}{r}}]x\right)$$

легко проверить, что имеют место соотношения

$$^{(1)}\|f\|_{L_2^*}^{(r)}\leqslant M,\quad {}^{(1)}\|f(x+h)-f(x)\|_{L_2^*}^{(r)}\underset{h\to 0}{\not\to} 0.$$

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть в линейном нормированном пространстве E задано ограниченное множество F и последовательность операторов $A_n(x)$, определяемых равенством*

$$A_n(x)=x-T_n(x),$$

удовлетворяет условиям ($n=1, 2,\ldots$):

α) *операторы $T_n(x)$ вполне непрерывны;*

β) $\|A_n(x)\|\underset{n\to\infty}{\to}0$ *при* $x\in F$.

Тогда равномерное выполнение условия β) *на F является достаточным для компактности F в E.*

Лемма 2. *Пусть в пространстве E типа B имеется множество F и последовательность операторов, удовлетворяющих условиям* ($n=1, 2,\ldots$):

β) $\|A_n(x)\|\underset{n\to\infty}{\to}0$ *при* $x\in F$;

γ) $\|A_n(x+y)\|\leqslant\|A_n(x)\|+\|A_n(y)\|$ $\quad x, y\in E$;

δ) $\|A_n(x)\|\leqslant N\|x\|$ $\quad x\in E$.

Тогда равномерное выполнение условия β) *на* F *является необходимым условием компактности* F *в* E.

Леммы 1 и 2, являющиеся обобщением теоремы Мазура ([1], стр. 237), доказаны в работах [7] (стр. 49) и [11] (стр. 614).

Лемма 3. *Пусть для последовательности функций*

$$f_k(x_1, \dots, x_m) \qquad (k=1, 2, 3, \dots) \qquad \|f_k\|_{L_p} \leqslant M.$$

Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

1) *Существует непрерывная неотрицательная функция* $\varphi(h)$, *определенная для* $h>0$, *стремящаяся к нулю при* $h \to +0$, *и такая, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p} \leqslant \varphi(h_i)\, h_i^{\alpha_i}$$

$$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

2) *Существует для любого целого* $l \geqslant 2$ *непрерывная неотрицательная функция* $\varphi_l(h)$, *определенная для* $h>0$, *стремящаяся к нулю при* $h \to +0$, *и такая, что*

$$\omega_l(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p} \leqslant \varphi_l(h_i)\, h_i^{\alpha_i}$$

$$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

3) *Существует непрерывная неотрицательная функция* $\psi(h)$, *определенная для* $h>0$, *стремящаяся к нулю при* $h \to +0$, *и такая, что*

$$A_{a_1^n, \dots, a_m^n}(f_k)_p \leqslant \psi\left(\frac{1}{n}\right) 2^{-n}$$

$$(a_i^{r_i}=2;\ k=1, 2, \dots;\ n=1, 2, \dots).$$

4) *Существует непрерывная неотрицательная функция* $\chi(h)$, *определенная для* $h>0$, *стремящаяся к нулю при* $h \to +0$, *и такая, что*

$$\|f_k - G_{a_1^n, \dots, a_m^n}\|_{L_p} \leqslant \chi\left(\frac{1}{n}\right) 2^{-n}$$

$$(a_i^{r_i}=2;\ k=1, 2, \dots;\ n=1, 2, \dots).$$

Аналогичное утверждение имеет место в периодическом случае.

Доказательство леммы 3 следует из рассмотрения связи между наилучшими приближениями функций и их модулями непрерывности различных порядков (в L_p) и по существу имеется в ряде работ: [14] (стр. 52), [13] (стр. 226), [4].

Теорема 1. *Пусть имеется последовательность функций* $f_k(x_1, \dots, x_m)$ *с* $\|f_k\|_{L_p^*} \leqslant M$ *и таких, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p^*} = o(h_i^{\alpha_i}) \text{ при } h_i \to 0 \tag{6}$$

$$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

Для компактности $\{f_k\}$ в $H_p^{*(r_1, \dots, r_m)}$ *необходимо и достаточно выполнение* (6), *т. е. существование непрерывной неотрицательной функции* $\varphi(h)$, *определенной для* $h>0$, *стремящейся к нулю при* $h \to +0$, *и такой, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p^*} \leqslant \varphi(h_i)\, h_i^{\alpha_i}$$

$$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

Доказательство проведем для простоты записи в одномерном случае. Рассмотрим

$$(1)\ \|f_k\|_{L_p^*}^{(r)}=\|f_k\|_{L_p^*}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n A_{2^{\frac{n}{r}}}(f_k)_p^*$$

и последовательность $T_{2^{\frac{n}{r}}}(f)_p$ операторов, приводящих в соответствие функции f тригонометрический многочлен степени не выше $2^{\frac{n}{r}}$, наилучшим образом приближающий ее в метрике $L_p(0,2\pi)$. Пусть

$$A_{2^{\frac{n}{r}}}(f)_p^*=\|f-T_{2^{\frac{n}{r}}}(f)_p\|_{L_p^*}.$$

Очевидно, что в пространстве $H_p^{(r)*}$ (типа B) выполнены свойства α), γ), δ) лемм 1 и 2. Проверим выполнение условия β).

$$(1)\ \|f_k-T_{2^{\frac{n}{r}}}(f_k)_p\|_{L_p^*}^{(r)}=A_{2^{\frac{n}{r}}}(f_k)_p^*+\sup_{l=1,2,\ldots}\begin{cases}2^l A_{2^{\frac{n}{r}}}(f_k)_p^* & \text{при } l<n\\ 2^l A_{2^{\frac{l}{r}}}(f_k)_p^* & \text{при } l\geqslant n\end{cases}=$$

$$=A_{2^{\frac{n}{r}}}(f_k)_p^*+\sup_{l=n,n+1,\ldots} 2^l A_{2^{\frac{l}{r}}}(f_k)_p^*.$$

Отсюда и из леммы 3 следует эквивалентность условия β) леммы 1 и формул (2) и (6), а также эквивалентность равномерного выполнения условия β) и равномерного выполнения (6). Теперь теорема доказывается простым применением лемм 1 и 2.

Теорема 2. *Пусть имеется последовательность функций $f_k(x_1,\ldots,x_m)$ с $\|f_k\|_{L_p}\leqslant M$ и таких, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar r_i)},\ \bar h_i)_{L_p}=\theta(h_i^{\alpha_i})\qquad \textit{при } h_i\to 0 \tag{7}$$

$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots).$$

Для компактности $\{f_k\}$ в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$ необходимо равномерное выполнение (7).

Доказательство аналогично доказательству необходимости в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть имеется последовательность функций $f_k(x_1,\ldots,x_m)$ с $\|f_k\|_{L_p}\leqslant M$ и таких, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar r_i)},\ \bar h_i)_{L_p}\leqslant\varphi(h_i)\,h_i^{\alpha_i}\quad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots),$$

где $\varphi(h)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, определенная для $h>0$ и стремящаяся к нулю при $h\to+0$.

Тогда для сходимости $\{f_k\}$ в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$ необходима и достаточна сходимость $\{f_k\}$ в $L_p(R_m)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$(2)\ \|f_k\|_{L_p}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f_k\|_{L_p}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n\|f_k-G_{a_1^n,\ldots,a_m^n}\|_{L_p},\quad a_i^{r_i}=2.$$

Необходимость теоремы очевидна. Достаточность следует из того, что $2^n \| f_k - G_{a_1^n, \dots, a_m^n} \|_{L_p} \to 0$ равномерно на $\{f_k\}$ (лемма 3), и из (5).

Следствие. Множество F функций $f(x_1, \dots, x_m)$, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и равномерно финитных (т. е. все они равны нулю вне одной и той же сферы) компактно в $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}$.

Лемма 4. *Пусть имеется последовательность функций $f_k(x_1, \dots, x_m)$ $(k=1, 2, 3, \dots)$ с $\|f_k\|_{L_p} \leqslant M$, и пусть существует непрерывная неотрицательная функция $\varphi(h)$, определенная для $h > 0$, стремящаяся к нулю при $h \to +0$, и такая, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p(G)} \leqslant \varphi(h_i)\, h_i^{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

Тогда, какова бы ни была область G' $(\overline{G'} \subset G)$, существует такое продолжение $f_k(x_1, \dots, x_m)$ с G' на пространство R_m (обозначим его F_k), что выполняются следующие свойства $(k=1, 2, 3, \dots)$:

1) $F_k = 0$ *вне* G $(F_k = f_k$ *на* $G')$;

2) $\|F_k\|_{L_p(R_m)} \leqslant M_1$;

3) *существует такая непрерывная неотрицательная при $h > 0$ функция $\varphi(G', h)$, стремящаяся к нулю при $h \to +0$, что*

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(F_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p(R_m)} \leqslant \varphi(G', h_i)\, h_i^{\alpha_i} \quad (i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots).$$

Доказательство этой леммы является почти дословным повторением рассуждений С. М. Никольского (см. [9], теорема 2.2) в случае $0 < \alpha_i < 1$. В случае $\alpha_i = 1$ в соответствии с леммой 3 можно рассматривать $\Delta_{h_i}^3 F = \Delta_{h_i}^3 (f \cdot H)$, которая представляется в виде линейной комбинации $\Delta_{h_i}^2 f$ и $\Delta_{h_i}^2 H$ с коэффициентами, являющимися линейными выражениями соответственно от H и f. И далее, как в [9] (теорема 2.2). Заметим, что оператор продолжения линеен (см. [10], § 2).

Теорема 4. *Пусть в конечной или бесконечной области $G \subseteq R_m$ задана последовательность функций $f_k(x_1, \dots, x_m)$ $(k=1, 2, 3, \dots)$, и пусть для всякой ограниченной области G' и такой, что $\overline{G'} \subset G$, выполняются следующие свойства:*

1) $\|f_k\|_{L_p(G')} \leqslant M(G')$;

2) $\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{kx_i}^{(\bar{r}_i)}, \bar{h}_i)_{L_p(G')} = 0(h_i^{\alpha_i})$ при $h_i \to 0$
$(i=1, 2, \dots, m;\ k=1, 2, \dots)$.

Тогда равномерное (относительно f_k) выполнение 2) для каждой фиксированной G' $(\overline{G'} \subset G)$ является необходимым и достаточным условием того, что из $\{f_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся в $H_p^{(r_1, \dots, r_m)}(G')$ к $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_m)}(G')$, какова бы ни была ограниченная область G' и такая, что $\overline{G'} \subset G$.

Доказательство. Рассмотрим две ограниченные области G' и G'', обладающие свойствами $G' \subset \overline{G'} \subset G'' \subset \overline{G''} \subset G$. Продолжим каждую из наших функций $f_k(x_1, \dots, x_m)$ (в соответствии с леммой 4) на все пространство R_m, причем так, что вне G'' продолженные функции равны нулю. При этом будут выполняться неравенства (см. [9], теорема 2.2)

$$c \|f_k\|_{L_p(G'')}^{(r_1, \dots, r_m)} \geqslant \|F_k\|_{L_p(R_m)}^{(r_1, \dots, r_m)} \geqslant \|f_k\|_{L_p(G')}^{(r_1, \dots, r_m)}. \quad (8)$$

Из этих неравенств следует, что компактность $\{f_k\}$ в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(G'')$ влечет компактность $\{F_k\}$ в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$, а значит (теорема 2) равномерное выполнение (7) для $\{F_k\}$ и, тем более, равномерное выполнение условия 2) теоремы.

Обратно, если равномерно выполнено условие 2) теоремы для области G'', то (лемма 4) равномерно выполнено (7) для $\{F_k\}$ и по следствию из теоремы 3 $\{F_k\}$ компактна в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$. Предельная функция для сходящейся подпоследовательности $\{F_{n'_k}\}$ будет (ввиду полноты $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$) принадлежать пространству $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(R_m)$. А, следовательно (см. (8)), $\{f_{n'_k}\}$ сходится в $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(G')$ и предельная функция принадлежит $H_p^{(r_1,\ldots,r_m)}(G')$. Задав последовательность расширяющихся областей, выделяем диагональным способом подпоследовательность функций $\{f_{n_k}\}$, удовлетворяющую теореме.

Теорема 5. *Пространство $H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$ несепарабельно.*

Доказательство. Мы будем основываться на теореме Бернштейна о том, что по заданной последовательности невозрастающих чисел, стремящихся к нулю, можно построить непрерывную функцию, имеющую эти числа в качестве наилучших приближений тригонометрическими многочленами $T_k(x)$ [2]. Эта теорема переносится на нужный нам случай. Будем пользоваться нормой

$$^{(1)}\|f\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f\|_{L_p^*}+\sup_{n=1,2,\ldots} 2^n A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^* .$$

Рассмотрим множество функций, каждая из которых имеет в качестве $A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^*$ число $\frac{1}{2^n}$ или $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, 3,\ldots)$. Существование таких функций обеспечивается теоремой Бернштейна. Очевидно, что число функций этого множества, у которых различны $A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^*$ хотя бы при одном n $(n=1, 2, 3,\ldots)$, более чем счетно. С другой стороны, любые две такие функции f_1 и f_2 находятся на расстоянии

$$^{(1)}\|f_1-f_2\|_{L_p^*}^{(r_1,\ldots,r_m)}=\|f_1-f_2\|+\sup 2^n A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^* \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{n=1,2,\ldots} 2^n |A_{a_1^n,\ldots,a^n}(f_1)_p^*-A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f)_p^*|=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$ несепарабельно.

Замечание. Пространство $H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$ не является замыканием в метрике $H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$ множества всех периодических функций, удовлетворяющих условию $(i=1, 2,\ldots, m)$

$$\omega_{1+[\alpha_i]}(f_{x_i}^{(\bar r_i)}, \bar h_i)_{L_p^*}=o(h_i^{\alpha_i}) \quad \text{при } h_i\to 0. \tag{9}$$

Действительно, рассмотрим $f_0\in H_p^{*(r_1,\ldots,r_m)}$, для которой

$$2^n A_{a_1^n,\ldots,a_m^n}(f_0)_p^*=1 \quad (n=1, 2,\ldots).$$

Существование ее обеспечивается теоремой Бернштейна. Из леммы 3 следует, что для любой функции f, удовлетворяющей (9),

$$\lim 2^n A_{a_1^n, \dots, a_m^n}(f)_p^* = 0.$$

Следовательно, ${}^{(1)}\|f - f_0\|_{L_p^*}^{(r_1, \dots, r_m)} \geqslant 1$, что и требовалось показать.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach. Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.

2. С. Н. Бернштейн. Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonction continues. C. R. Acad. Sc., t. 206, pp. 1520—1523, 1938.

3. С. Н. Бернштейн. О свойствах однородных функциональных классов. ДАН СССР, т. LVII, № 2, стр. 111—114, 1947.

4. А. С. Джафаров. О наилучшем приближении в среднем функций многих переменных при помощи целых функций конечной степени. Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, т. 2, стр. 110—116, 1955.

5. В. И. Кондрашов. О некоторых свойствах функций из пространств L_p^ν. ДАН СССР, т. XLVIII, № 8, стр. 563—566, 1948.

6. Л. Д. Кудрявцев. Об одном обобщении теоремы С. М. Никольского о компактности классов дифференцируемых функций. УМН, т. IX, вып. 2 (59), стр. 111—120, 1954.

7. С. М. Никольский. Теория приближения функций. Функциональный анализ, ч. I, Днепропетровск, 1947.

8. С. М. Никольский. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38, стр. 244—278, 1951.

9. С. М. Никольский. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. Матем. сб., т. 33 (75): 2, стр. 261—326, 1953.

10. С. М. Никольский. О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств. Матем. сб., т. 40 (82): 2, стр. 243—268, 1956.

11. С. М. Никольский. Компактность классов $H_p^{(r_1, \dots r_n)}$ функций многих переменных. Изв. АН СССР, Матем., т. 20, вып. 5, стр. 611—622, 1956.

12. С. М. Никольский. Об одном семействе функциональных пространств. УМН, т. XI, вып. 6 (72), стр. 203—212, 1956.

13. С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв. АН СССР, т. 15, № 3, стр. 219—242, 1951.

14. A. Zygmund. Smooth Functions. Duke Math. Journ., t. 12, pp. 47—76, 1945.