В. П. Танана, Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений первого рода,
Изв. вузов. Матем., 1975, номер 5, 73–77

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 5 (156)

УДК 517.948

В. П. Танана

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Введение

Пусть A — линейный взаимнооднозначный ограниченный оператор, отображающий гильбертово пространство H в себя. Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \ x, \ y \in H. \tag{1}$$

Предположим, что при $y = y_0$ существует точное решение уравнения (1), но y_0 нам не известно, а известно лишь y_δ такое, что $\|y_0 - y_\delta\| < \delta$. Требуется по y_δ построить приближенное решение x_δ уравнения (1), удовлетворяющее условию $x_\delta \to x_0$ при $\delta \to 0$.

Метод невязки (см. [1] — [3]) решения поставленной задачи заключается в нахождении по y_δ элемента $x_\delta \in H$ такого, что

$$\|x_\delta\|^2 = \inf \|x\|^2, \ \|Ax - y_\delta\| \leqslant \delta. \tag{2}$$

§ 1. Метод конечномерных аппроксимаций приближенного решения x_δ, полученного методом невязки

Рассмотрим возрастающую цепочку конечномерных подпространств пространства H:

$$H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots \subset H$$

такую, что $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n} = H$, и следующую вариационную задачу:

$$\inf \|x\|^2, \ x \in H_n, \ \|Ax - y_\delta\| \leqslant \delta. \tag{3}$$

В работе [4] доказано, что при достаточно больших n задача (3) разрешима единственным образом и ее решение x_δ^n при $n \to \infty$ будет стремиться к приближенному решению x_δ, полученному методом невязки.

§ 2. Итерационный метод решения задачи (3)

Пусть $\rho(y_\delta, AH_n) < \delta$ и x_k есть k-я итерация, которая удовлетворяет следующим условиям: $x_k \in H_n$ и $\|Ax_k - y_\delta\| = \delta$. Тогда $(k+1)$-ю итерацию x_{k+1} получим, решая следующую задачу:

$$\inf \|x\|^2, \ x \in L(x_k, \ A_n^*(Ax_k - y_\delta)) \cap \Omega_\delta^n, \tag{4}$$

где $\Omega_\delta^n = \{x \in H_n : \|Ax - y_\delta\| \leqslant \delta\}$, $L(x_k, A_n^*(Ax_k - y_\delta))$ — линейная оболочка, натянутая на элементы x_k и $A_n^*(Ax_k - y_\delta)$, и A_n^* — оператор, сопряженный оператору A_n, который является сужением оператора A с пространства H на H_n.

Лемма 1. *Если* $\rho(y_\delta, AH_n) < \delta$, $\bar{x} \in H_n$ *и* $\|A\bar{x} - y_\delta\| = \delta$, *то* $A_n^*(A\bar{x} - y_\delta) \neq 0$.

Доказательство. Так как $\rho(y_\delta, AH_n) < \delta$, то

$$A\bar{x} - y_\delta = (A\bar{x} - \mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta)) + (\mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta) - y_\delta), \tag{5}$$

где $\mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta)$ — метрическая проекция элемента y_δ на подпространство AH_n и $A\bar{x} - \mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta) \neq 0$.

Из определения сопряженного оператора для любого $x \in H_n$ имеем

$$(A_n^*(A\bar{x} - y_\delta), x) = (A\bar{x} - y_\delta; Ax). \tag{6}$$

С учетом (5) из (6) находим

$$(A_n^*(A\bar{x} - y_\delta), x) = (A\bar{x} - \mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta), Ax). \tag{7}$$

Если $\tilde{x} = \bar{x} - A^{-1}(\mathrm{pr}_{AH_n}(y_\delta))$, то из (7) следует $(A_n^*(A\bar{x} - y_\delta), \tilde{x}) \neq 0$. Таким образом, $A_n^*(A\bar{x} - y_\delta) \neq 0$, что и доказывает лемму.

Так как гиперплоскость $\{y : (A\bar{x} - y_\delta, y) = (A\bar{x} - y_\delta, A\bar{x})\}$ является опорной к шару $S_\delta(y_\delta) = \{y : \|y - y_\delta\| \leqslant \delta\}$ в точке $A\bar{x}$, то соответствующая гиперплоскость $\bar{G} = \{x \in H_n : (A_n^*(A\bar{x} - y_\delta), x) = (A_n^*(A\bar{x} - y_\delta), \bar{x})\}$ будет являться опорной к множеству Ω_δ^n в точке $\bar{x}$.

Пусть x_k — произвольная точка, удовлетворяющая условию $x_k \in H_n$ и $\|Ax_k - y_\delta\| = \delta$; тогда гиперплоскость

$$G_{k+1} = \{x \in H_n : (A_n^*(Ax_{k+1} - y_\delta), x) = (A_n^*(Ax_{k+1} - y_\delta), x_{k+1})\},$$

опорная к множеству Ω_δ^n в $(k+1)$-й итерации x_{k+1} (см. (4)), будет либо разделять множество $\{x \in H_n : \|Ax - y_\delta\| < \delta\}$ и точку 0, либо содержать точку 0, а следовательно, $A_n^*(Ax_{k+1} - y_\delta) = \lambda_0 x_{k+1}$ при некотором λ_0 тогда и только тогда, когда $x_{k+1} = x_\delta^n$.

Лемма 2. *Если x_k есть k-я итерация и $x_k \neq x_\delta^n$, а x_{k+1} есть $(k+1)$-я итерация* (см. (4)), *то* $\|x_{k+1}\| < \|x_k\|$.

Доказательство. Учитывая замечание, сделанное выше, без ограничения общности можно считать, что $A_n^*(Ax_k - y_\delta) \neq \lambda x_k$ при любых значениях λ, а проекция $\mathrm{pr}_{G_k}(0)$ точки 0 на гиперплоскость G_k удовлетворяет условиям $\|\mathrm{pr}_{G_k}(0)\| < \|x_\delta^n\|$, $\mathrm{pr}_{G_k}(0) = \lambda_0 A_n^*(Ax_k - y_\delta)$, где λ_0 — некоторое число, а G_k — гиперплоскость, опорная к множеству Ω_δ^n в точке x_k. Выберем число ε так, чтобы

$(\varepsilon A_n^*(Ax_k - y_\delta),\ x_k) > 0$, $\|\mathrm{pr}_{G_k}(0) + \varepsilon A_n^*(Ax_k - y_\delta)\| < \|x_\delta^n\|$, и рассмотрим отрезок $T = \{\alpha x_k + (1-\alpha)[\mathrm{pr}_{G_k}(0) + \varepsilon A_n^*(Ax_k - y_\delta]: 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, соединяющий точки $\mathrm{pr}_{G_k}(0) + \varepsilon A_n^*(Ax_k - y_\delta)$ и x_k. Так как контур $\gamma = \{x \in H_n : \|Ax - y_\delta\| = \delta\} \cap L(x_k,\ x_{k+1})$ является гладким в точке x_k, то $\gamma \cap T \setminus \{x_k\} \neq \varnothing$. Таким образом, найдется точка $z_0 = \alpha_0 x_k + (1-\alpha_0)[\mathrm{pr}_{G_k}(0) + \varepsilon A_n^*(Ax_k - y_\delta)]$, $0 < \alpha_0 < 1$, такая, что $\|Az_0 - y_\delta\| = \delta$. При этом будет выполняться неравенство $\|z_0\| < \|x_k\|$ и, учитывая определение x_{k+1} (см. (4)), получим $\|x_{k+1}\| < \|x_k\|$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{x_k\}$, $\{x'_k\} \subset H_n$, $L(x_k,\ x'_k) \cap \Omega_\delta^n \neq \varnothing$ *и* $x_k \to x$, $x'_k \to x'$ *при* $k \to \infty$, *а* $x \neq \lambda x'$ *при любых значениях* λ. *Тогда*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|\bar{x}_k\| \leqslant \|\bar{x}\|,\quad \|\bar{x}_k\|^2 = \inf_{x \in L(x_k,\ x'_k) \cap \Omega_\delta^n},\quad \|\bar{x}\|^2 = \inf_{x \in L(x,\ x') \cap \Omega_\delta^n} \|x\|^2.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|\bar{x}_k\| > \|\bar{x}\|.$$

Тогда найдется подпоследовательность $\{\bar{x}_{k_l}\}$ такая, что

$$\|x_{k_l}\| > \|\bar{x}\| + d, \tag{8}$$

где d — некоторое положительное число.

Предположим, что $0 \notin G(\bar{x})$, где $G(\bar{x}) \subset H_n$ — гиперплоскость, опорная к множеству Ω_δ^n в точке $\bar{x}$, которая, ввиду гладкости границы множества Ω_δ^n является касательной гиперплоскостью к множеству Ω_δ^n в точке $\bar{x}$. Рассмотрим метрические проекции $\tilde{x}_k = \mathrm{pr}_{L(x_k,\ x'_k)}(\bar{x})$ элемента $\bar{x}$ на множества $L(x_k,\ x'_k)$. Без ограничения общности, можно считать, что $\tilde{x}_{k_l} \to \tilde{x}$ при $k_l \to \infty$, где $\tilde{x} \in L(x,\ x')$. Затем рассмотрим последовательность точек $\{z_{k_l}\} \subset G(\bar{x})$, где $z_{k_l} = \mu_{k_l}\tilde{x}_{k_l}$, μ_{k_l} — некоторое число. Очевидно, что

$$\|z_{k_l} - \bar{x}\| = \|x_{k_l} - \bar{x}\| / \cos\alpha_{k_l}, \tag{9}$$

где α_{k_l} — угол между векторами $\tilde{x}_{k_l} - \bar{x}$ и $z_{k_l} - \bar{x}$, а

$$\cos\alpha_{k_l} = (\tilde{x}_{k_l} - \bar{x},\ z_{k_l} - \bar{x}) / \|\tilde{x}_{k_l} - \bar{x}\|\,\|z_{k_l} - \bar{x}\|.$$

Так как $0 \notin G(\bar{x})$, то $\sup\limits_{\substack{x \in G(\bar{x}) \\ \|x - \bar{x}\| = 1}} (-\bar{x},\ x - \bar{x}) < \|\bar{x}\|$, следовательно, угол $\angle(G(\bar{x}),\ \bar{x})$ между гиперплоскостью $G(\bar{x})$ и элементом $\bar{x}$ положителен, а

$$\alpha_{k_l} < \frac{\pi}{2} - \angle(G(\bar{x}),\ \bar{x}), \tag{10}$$

т. е. $\alpha_{k_l} \leqslant \alpha_0$, где $\alpha_0 < \pi/2$. Из (9) и (10) следует

$$z_{k_l} \to \bar{x} \text{ при } k_l \to \infty. \tag{11}$$

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{z}_{k_l}\}$, где $\tilde{z}_{k_l} = \nu_{k_l} \tilde{x}_{k_l}$, ν_{k_l} — некоторое число и $\|A\tilde{z}_{k_l} - y_\delta\| = \delta$. Ввиду того, что гиперплоскость $G(\bar{x})$ является касательной к множеству Ω_δ^n в точке $\bar{x}$, имеем

$$\|\tilde{z}_{k_l} - z_{k_l}\| \to 0 \text{ при } k_l \to \infty, \tag{12}$$

а из (11) и (12) следует

$$\|\tilde{z}_{k_l}\| \to \|\bar{x}\| \text{ при } k_l \to \infty. \tag{13}$$

Так как $\tilde{z}_{k_l} \in L(x_{k_l}, x'_{k_l}) \cap \Omega_\delta^n$, а $\|\bar{x}_{k_l}\|^2 = \inf\limits_{x \in L(x_{k_l}, x'_{k_l}) \cap \Omega_\delta^n} \|x\|^2$,

то $\|\bar{x}_{k_l}\| \leqslant \|\tilde{z}_{k_l}\|$, и на основании (13) для достаточно больших k_l имеем $\|\bar{x}_{k_l}\| \leqslant \|\bar{x}\| + d/2$, что противоречит (8).

Предположим, что $0 \in G(\bar{x})$; тогда

$$L(x, x') \cap \Omega_\delta^n = \{\bar{x}\}. \tag{14}$$

Так как $x_{k_l} \to x$, $x'_{k_l} \to x'$, а оператор A непрерывен, то $Ax_{k_l} \to Ax$ и $Ax'_{k_l} \to Ax'$. Значит, последовательность множеств $L(Ax_{k_l}, Ax'_{k_l}) \cap$ $\cap S_\delta^n(y_\delta)$ будет β-сходиться к множеству $L(Ax, Ax') \cap S_\delta^n(y_\delta) = \{A\bar{x}\}$, т. е.

$$\sup_{y \in L(Ax_{k_l}, Ax'_{k_l}) \cap S_\delta^n(y_\delta)} \|y - A\bar{x}\| \to 0 \text{ при } k_l \to \infty, \tag{15}$$

где $S_\delta^n(y_\delta) = \{y \in AH_n : \|y - y_\delta\| \leqslant \delta\}$.

Так как оператор A_n^{-1} непрерывен на AH_n, то последовательность множеств $A^{-1}(L(Ax_{k_l}, Ax^1_{k_l}) \cap S_\delta^n(y_\delta))$ с учетом (14), (15) будет β-сходиться к элементу $\bar{x}$ (см. [5]), но тогда на основании результатов работы [5] и того, что

$$\|\bar{x}_{k_l}\|^2 = \inf_{x \in A^{-1}(L(Ax_{k_l}, Ax'_{k_l}) \cap S_\delta^n(y_\delta))} \|x\|^2,$$

находим $\bar{x}_{k_l} \to \bar{x}$ при $k_l \to \infty$, что противоречит (8). Лемма доказана.

Теорема. *Имеет место сходимость последовательных итераций x_k к x_δ^n при $k \to \infty$.*

Доказательство. Так как $\|x_{k+1}\| \leqslant \|x_k\|$, то

$$\|x_k\| \to a \text{ при } k \to \infty \text{ и } \|x_k\| \geqslant a, \tag{16}$$

где a — некоторое число. Допустим, что $a > \|x_\delta^n\|$. Так как последовательность $\{x_k\}$ ограничена и принадлежит конечномерному пространству H_n, то она компактна и, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$x_{k_l} \to \bar{x} \text{ при } k_l \to \infty. \tag{17}$$

Тогда $\|\bar{x}\| = a$.

Ввиду того, что гиперплоскость G_{k_l}, опорная к множеству Ω_δ^n в точке x_{k_l}, будет либо разделять множество $\{x \in H_n : \|Ax - y_\delta\| < \delta\}$ и точку 0, либо содержать точку 0, и гиперплоскость $\bar{G}$, опорная к множеству Ω_δ^n в точке $\bar{x}$, будет удовлетворять этому условию.

Таким образом, $A_n^*(A\bar{x} - y_\delta) \neq \lambda\bar{x}$ при любом значения λ. Поэтому по лемме 2

$$\|\tilde{x}\| < \|\bar{x}\|, \tag{18}$$

где $\|x\|^2 = \inf\limits_{x \in L(\bar{x},\, A_n^*(Ax - y_\delta)) \cap \Omega_\delta^n} \|x\|^2$. Так как оператор A непрерывен, то

$$A_n^*(Ax_{k_l} - y_\delta) \to A_n^*(A\bar{x} - y_\delta) \text{ при } k_l \to \infty, \tag{19}$$

а на основании леммы 1 $A_n^*(A\bar{x} - y_\delta) \neq 0$. Но тогда по лемме 3 из (17) и (19) будет следовать $\overline{\lim\limits_{k_l \to \infty}} \|\tilde{x}_{k_l}\| \leqslant \|\tilde{x}\|$, где

$$\|x_{k_l}\|^2 = \inf\limits_{x \in L(x_{k_l},\, A_n^*(Ax_{k_l} - y_\delta)) \cap \Omega_\delta^n} \|x\|^2.$$

Учитывая $x_{k_l} \tilde{=} x_{k_l+1}$ и (18), для достаточно больших k будем иметь $\|x_k\| < a$, что противоречит (16). Следовательно $\|x_k\| \to \|x_\delta^n\|$ при $k \to \infty$, откуда $x_k \to x_\delta^n$. Тем самым теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 6, № 6, 1966, с. 1089—1094.
2. Phillips D. L. A tecnique for the numerical solution of certain integral equatious of the first kind. J. Assoc. Comput. Machinery, v. 9, № 1, 1962, p. 84—97.
3. Морозов В. А. О регуляризирующих семействах операторов. В сб. „Вычисл. методы и программиров". Вып. 8, Изд. МГУ, 1967, с. 63—95.
4. Васин В. В., Танана В. П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода. Матем. зап. Уральск. ун-та и Уральск. матем. о-ва, т. 6, тетр. 4, 1968, с. 27—37.
5. Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений. Сиб. матем. журн., т. X, № 2, 1969, с. 373—385.

г. Свердловск

Поступила
27 VI 1974