

А. Д. ГОРБУНОВ

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### Введение

В этой работе излагается ряд результатов, относящихся к теории систем линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, заданных в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x, \quad (8.1)$$

где  $t$  — независимое действительное переменное (время),  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — матрица-столбец,  $L(t) = [l_{ik}(t)]$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка, составленная из действительных однозначных и непрерывных функций  $l_{ik}(t)$ , каждая из которых определена на всей действительной прямой  $-\infty < t < +\infty$ .

Фундамент теории линейных дифференциальных уравнений постепенно создается к концу XIX столетия. Его составляют предложения о зависимости общего решения от постоянных интегрирования или начальных данных, о получении общего решения из частных. Кроме того, было установлено, что решения систем вида (8.1) с переменными коэффициентами, вообще говоря, не выражаются в виде квадратур через эти коэффициенты. Последнее обстоятельство способствовало бурному развитию численных методов, приведших, в частности, к созданию аналитической теории дифференциальных уравнений. Однако развитие этих методов не привело к завершению фундамента общей теории дифференциальных уравнений и в том числе теории линейных дифференциальных уравнений. Только открытие теорем о существовании решений систем дифференциальных уравнений и о непрерывной зависимости решений от начальных данных завершило создание этого фундамента. Более того, теоремы существования были новым сильным толчком в развитии качественных методов, уже возникших к тому времени и давших, в силу своей общности, ясную перспективу развития теории дифференциальных уравнений.

Качественная теория линейных дифференциальных уравнений развивалась главным образом в двух направлениях: в направлении исследования асимптотического поведения решений и в направлении отыскания условий устойчивости решений. Оба эти направления нашли свое глубокое развитие в докторской диссертации русского естествоиспытателя А. М. Лапунова (1857—1918); первое — в виде теории характеристических чисел, второе — в создании второй методы и приложениях ее к системам линейных дифференциальных

уравнений вида (8.1) с постоянными и периодическими коэффициентами. И первое, и второе направления нашли свое дальнейшее развитие в работах ряда советских ученых.

Обратим внимание на то, что вторая метода, нашедшая свое выражение в первых двух теоремах и примечании первом к первой теореме главы первой диссертации А. М. Ляпунова, представляет собой дальнейшее развитие и конкретное приложение метода топографических поверхностей, носившего ранее частную форму, в интересах исследования систем дифференциальных уравнений на устойчивость.

В настоящей работе по примеру А. М. Ляпунова метод топографических поверхностей применен в интересах изучения общих свойств и структуры семейства интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (8.1).

Так как при изучении систем линейных дифференциальных уравнений для образования семейств топографических поверхностей оказывается достаточно пользоваться только квадратичными формами, то первая глава настоящей работы посвящена более углубленному и специальному изучению свойств квадратичных форм.

В первых двух параграфах второй главы излагается новый метод получения оценок координат решений системы уравнений (8.1), а затем изучаются свойства этих оценок и структура семейства интегральных кривых системы (8.1). В третьем параграфе второй главы на базе результатов, полученных в предыдущих параграфах, излагаются необходимые и достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову и монотонной устойчивости нулевого решения системы (8.1).

Отметим, что в настоящую работу вошел ряд теорем, опубликованных автором в «Вестнике Московского университета» за 1950—1953 годы. Эти теоремы приводятся без доказательства и помечены ссылками на соответствующие статьи.

## Глава первая

### К ТЕОРИИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

#### § 1. Некоторые предложения, относящиеся к теории квадратичных форм

1. Во всей последующей теории большое значение будут иметь квадратичные формы [1,2]. В этой связи мы изложим ряд предложений, характеризующих свойства квадратичных форм.

Мы будем рассматривать квадратичные формы вида

$$G(x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (1.1)$$

от  $n$  действительных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с действительными коэффициентами  $a_{ik}, i=1, 2, \dots, n, k=1, 2, \dots, n, a_{ik} = a_{ki}$ .

Вводя обозначение для матрицы-столбца [3,4]

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1.2)$$

и для матрицы  $n$ -го порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ik} = a_{ki} \quad (1.3)$$

перепишем квадратичную форму (1.1) в таком виде [5,4]:

$$G(x) = x'Ax, \quad (1.1')$$

где  $x'$  обозначает матрицу-строку:

$$x' = [x_1, x_2, \dots, x_n]. \quad (1.4)$$

Совокупность всех матриц-столбцов вида (1.2) образует линейное векторное пространство  $n$  измерений, которое будем обозначать символом  $R_n$ , и в этой связи матрицы-столбцы (1.2) будем именовать векторами из  $R_n$  [3]. Вводя в  $R_n$  норму следующим образом [6]

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (1.5)$$

получим метрическое пространство  $n$  измерений. В этой связи матрицу-столбец (1.2) будем именовать точкой из  $R_n$  [7].

Аналогично сказанному, совокупность матриц (1.3) образует линейное векторное пространство  $\nu$  измерений,  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$ , которое будем обозначать символом  $R_\nu$ , и в этой связи квадратную матрицу (1.3) будем называть вектором из  $R_\nu$ . Нормируя пространство  $R_\nu$  по формуле

$$\|A\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.6)$$

получим метрическое пространство  $\nu$  измерений. В этой связи квадратную матрицу (1.3) будем называть точкой из  $R_\nu$ .

Кроме того, введем ряд обозначений, которые будут встречаться в дальнейшем.

Минор, получаемый из дискриминанта [2] квадратичной формы (1.1'),

$$A_n^0 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

вычеркиванием  $k$  столбцов номеров  $s_1, s_2, \dots, s_k$  и  $k$  строк тех же номеров, будем обозначать символом

$$A_{n-k}^{(s_1, s_2, \dots, s_k)}, \quad 0 < k \leq n, \quad (1.8)$$

причем при  $k=n$  символ (1.8) полагается равным единице. Иногда будем пользоваться более простыми символами

$$A_1^{(2)} = A_1^{(2, 3, \dots, n)}, \quad A_2^{(3)} = A_2^{(3, 4, \dots, n)}, \quad \dots, \quad A_{n-2}^{(n-1)} = A_{n-2}^{(n-1, n)}. \quad (1.9)$$

Пусть, далее,  $F$  обозначает действительную функцию, определенную для всех точек некоторого пространства; множества точек из этого пространства, удовлетворяющие условиям  $F < 0$ ,  $F = 0$ ,  $F > 0$ , будем обозначать соответственно символами  $\{F < 0\}$ ,  $\{F = 0\}$ ,  $\{F > 0\}$ .

Если  $M$  обозначает определенное множество некоторого метрического пространства, то границу множества  $M$  будем обозначать символом  $\Gamma M$ .

2. При помощи обозначений, введенных в предыдущем пункте, известную теорему Сильвестра [1,2] об условиях положительной определенности квадратичной формы (1.1') можно сформулировать в следующем виде: для того, чтобы квадратичная форма (1.1') была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $A$  удовлетворяла таким условиям:

$$A_1^{(2)} > 0, \quad A_2^{(3)} > 0, \quad \dots, \quad A_{n-1}^{(n)} > 0, \quad A_n^0 > 0. \quad (2.1)$$

Если рассмотреть совокупность всевозможных положительно определенных квадратичных форм вида (1.1'), то их матрицы  $A$  в пространстве  $R$ , образуют, как легко усмотреть из приведенных условий, открытое множество точек [7]:

$$P_n = \{A_n^0 > 0\} \prod_{\sigma=1}^{n-1} \{A_\sigma^{(\sigma+1)} > 0\}, \quad (2.2)$$

причем имеют место очевидные включения:

$$\{A_1^{(2)} > 0\} \supseteq \prod_{\sigma=1}^2 \{A_\sigma^{(\sigma+1)} > 0\} \supseteq \dots \supseteq \prod_{\sigma=1}^{n-1} \{A_\sigma^{(\sigma+1)} > 0\} \supseteq P_n. \quad (2.3)$$

Имея в виду изучение свойств множества  $P_n$  и последующие задачи, перейдем к изложению ряда элементарных теорем, относящихся к теории квадратичных форм.

**3.** Обратим внимание, прежде всего, на то, что теорема Сильвестра о необходимых и достаточных условиях положительной определенности квадратичной формы (1.1) может быть обобщена в следующем виде:

**Теорема 1.** *Чтобы квадратичная форма*

$$G(x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad (1.1)$$

*и переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с постоянными коэффициентами  $a_{ik}$ , ранга  $r \leq n$ , была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая нумерация ее переменных, при которой имеют место соотношения*

$$\left. \begin{aligned} A_i^{(i+1)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ A_i^{(i+1)} = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, n-1, \quad A_n^0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где  $A_i^{(i+1)}$  — главные угловые миноры дискриминанта квадратичной формы  $G(x)$ .

**Доказательство.** Если  $r = n$ , то, согласно теореме Сильвестра, необходимые и достаточные условия неотрицательности  $G(x)$  сводятся к неравенствам (2.1), которые в этом случае совпадают с неравенствами (3.1). Если  $r < n$ , то все миноры дискриминанта  $A_n^0$  порядка выше  $r$  равны нулю [1], т. е. при любой нумерации переменных имеют место равенства

$$A_i^{(i+1)} = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, n-1, \quad A_n^0 = 0.$$

С другой стороны, дискриминант  $A_n^0$  содержит минор порядка  $r$ , отличный от нуля [1]. Так как  $A_n^0$  — симметричный детерминант, то найдется [2] и главный минор порядка  $r$ , отличный от нуля. Перенумеровав переменные так, чтобы этот отличный от нуля главный минор порядка  $r$  при квадратной записи квадратичной формы  $G(x)$  оказался в левом верхнем углу, и полагая последние  $n - r$  переменных нулями, мы получим квадратичную форму от  $r$  переменных ранга  $r$ . Чтобы эта последняя была неположительной, необходимо, чтобы имели место неравенства

$$A_i^{(i+1)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Достаточность условий очевидна. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает ряд простых следствий, одно из которых приводится.

**Следствие 1.** Чтобы квадратичная форма (1.1) в переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с постоянными коэффициентами  $a_{ik}, a_{ik} = a_{ki}$ , ранга  $r \leq n$  была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая нумерация ее переменных, при которой имеют место соотношения [8]

$$\left. \begin{aligned} (-1)^i A_i^{(i+1)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ A_i^{(i+1)} = 0, \quad i = r+1, r+2, \dots, n-1, A_n^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Доказательство этого предложения получается, если учесть, что неположительная квадратичная форма после умножения на  $-1$  переходит в неотрицательную и наоборот.

4. В дальнейшем большие значения будут иметь гиперповерхности в пространстве  $R_n$ , которые получаются, если положительно определенные квадратичные формы (1.1) приравнять положительным константам:

$$G(x) = c^2. \quad (4.1)$$

Такие поверхности мы будем называть  $n$ -мерными эллипсоидами.

Ниже приводятся теоремы, характеризующие свойства  $n$ -мерных эллипсоидов.

Из теоремы Сильвестра в качестве простого следствия вытекает предложение: если квадратичная форма (1.1) положительно определена, то всевозможные миноры главной диагонали ее дискриминанта  $A_n^0$  суть положительные числа, в частности,

$$A_{n-1}^{(s)} > 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

**Теорема 2.** Если однородная квадратичная форма (1.1) положительно определена, то координаты точек  $n$ -мерного эллипсоида

$$G(x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k = c^2 \quad (4.1')$$

удовлетворяют следующим неравенствам

$$|x_s| \leq |c| \left( \frac{A_{n-1}^{(s)}}{A_n^0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

причем границы точные [9].

**Теорема 3.** Если в  $R_n$  заданы две положительно определенные квадратичные формы

$$G(x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad (1.1)$$

$$H(x) = \sum_{i,k=1}^n c_{ik} x_i x_k, \quad c_{ik} = c_{ki}, \quad (4.4)$$

такие, что при всяком  $x$  из  $R_n$  справедливо неравенство

$$G(x) \geq H(x), \quad (4.5)$$

то имеют место также неравенства

$$\frac{A_{n-1}^{(s)}}{A_n^0} \leq \frac{C_{n-1}^{(s)}}{C_n^0}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

где  $C$  — матрица коэффициентов квадратичной формы (4.4) [9].

## § 2. О свойствах множества $P_n$ .

5. Согласно определению (2.2), множество  $P_n$  представляет собой пересечение конечного множества открытых множеств

$$\{A_1^{(2)} > 0\}, \{A_2^{(3)} > 0\}, \dots, \{A_{n-1}^{(n)} > 0\}, \{A_n^0 > 0\}. \quad (5.1)$$

Так как границы этих множеств представляются соответственно частями поверхностей

$$A_1^{(2)} = 0, \quad A_2^{(3)} = 0, \quad \dots, \quad A_{n-1}^{(n)} = 0, \quad A_n^0 = 0$$

и так как множество  $P_n$  непусто, то и его граница состоит из частей этих поверхностей.

Следующая теорема дает возможность составить более полное представление о строении границы множества  $P_n$ .

**Теорема 4.** *Граница множества  $P_n$  состоит из тех и только тех матриц  $A$  пространства  $R_n$ , каждая из которых имеет ранг, меньший  $n$ , и для которой квадратичная форма (1.1) неотрицательна.*

**Доказательство.** Покажем, прежде всего, что замыкание  $\overline{P_n}$  множества  $P_n$  состоит из тех и только тех матриц  $A$  пространства  $R_n$ , для которых квадратичная форма (1.1) неотрицательна [7].

Действительно, если  $A \in \overline{P_n}$ , то либо  $A \in P_n$ , и тогда квадратичная форма  $x'Ax$ ,  $x \in R_n$ , положительно определенная, либо  $A \in \overline{P_n}$ , и тогда найдется последовательность матриц  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , из множества  $P_n$  таких, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = A, \quad A_m \in P_n. \quad (5.2)$$

Пусть, далее,  $x$  обозначает произвольный фиксированный вектор из пространства  $R_n$ . Тогда, так как выражение  $x'Ax$  непрерывно относительно матрицы  $A$ , будем иметь, согласно (5.2),  $x'A_mx \geq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и, следовательно,

$$x'Ax = \lim_{m \rightarrow +\infty} x'A_mx \geq 0.$$

Наоборот, если матрица  $\overline{A}$  из  $R_n$  такова, что квадратичная форма  $x'Ax$  неотрицательна, то, согласно теореме 1, найдется такая матрица  $A$  из  $R_n$ , получаемая из матрицы  $\overline{A}$  перестановкой строк и столбцов, что выполнены условия (3.2), причем

$$x'\overline{A}x = x'Ax, \quad x, \overline{x} \in R_n. \quad (5.3)$$

Если ранг матрицы  $\overline{A}$  равен  $n$ , то и ранг матрицы  $A$  равен  $n$ , тогда условия (3.2) превращаются в условия (2.1) и, следовательно,  $\overline{A} \in P_n \subset \overline{P_n}$ . Если же ранг матрицы  $\overline{A}$  меньше  $n$ , то и ранг матрицы  $A$ , будучи равным рангу матрицы  $\overline{A}$ , меньше  $n$ . В этом случае, как это следует из соотношений (3.2), элементы матрицы  $\overline{A}$  можно так сколь угодно мало изменить, чтобы для полученной матрицы выполнялись условия (2.1). Но это значит, что матрица  $\overline{A}$  принадлежит множеству  $\overline{P_n}$ .

После этого из формулы

$$\Gamma P_n = \overline{P_n} - P_n \quad (5.4)$$

вытекает, что граница множества  $P_n$  состоит из тех и только тех матриц  $A$  из пространства  $R_n$  ранга меньшего, чем  $n$ , для которых квадратичная форма (1.1') неотрицательна. Теорема доказана.

Обратим внимание, что в процессе доказательства последней теоремы были доказаны два следующие предложения.

**Следствие 2.** Граница множества  $P_n$  состоит из тех и только тех матриц  $\bar{A}$  из  $R_n$ , для каждой из которых существует матрица  $A$  из  $R_n$ , получаемая из матрицы  $\bar{A}$  перестановкой строк и столбцов и такая, что выполнены условия

$$\left. \begin{aligned} A_i^{(i+1)} &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad r < n, \\ A_i^{(i+1)} &= 0, \quad i = r+1, \dots, n-1, \quad A_n^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

**Следствие 3.** Имеет место включение

$$\Gamma P_n \subset \{A_n^0 = 0\}. \quad (5.6)$$

**6.** В соответствии с теоремой 2 каждой матрице  $A$  из множества  $P_n$  может быть сопоставлена упорядоченная группа из  $n$  действительных чисел  $x_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , определяемых соотношениями

$$x_s = \left( \frac{A_{n-1}^{(s)}}{A_n^0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (6.1)$$

Имея в виду обращение этого предложения, т. е. задачу построения матриц  $A$ , удовлетворяющих соотношениям (6.1) при условии, что числа  $x_s$  заданы, изучим свойства отображения [10], определяемого следующим образом.

Пусть дана матрица  $A$  из пространства  $R_n$ ; сопоставим ей матрицу  $\Xi$ ,  $\Xi \in R_n$ , элементы которой определяются по формулам

$$x_{ii} = \frac{A_{n-1}^{(i)}}{A_n^0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.2')$$

$$x_{ik} = a_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i+1, \dots, n. \quad (6.2'')$$

Точечное отображение (6.2) в дальнейшем будем обозначать символом

$$\Xi = \Psi(A), \quad A \in R_n. \quad (6.2''')$$

Отметим, прежде всего, что полученное отображение определено и непрерывно всюду в  $R_n$ , кроме точек множества  $\{A_n^0 = 0\}$ . Эти обстоятельства вытекают непосредственно из соотношений (6.2).

Если матрица  $A$  принадлежит множеству  $P_n$ , то число  $x_i = \sqrt{x_{ii}}$ , как вытекает из теоремы 2, имеет определенный геометрический смысл: оно вместе с числом  $-x_i$  составляет точные границы колебания координаты  $x_i$  точки  $x$ , если последняя пробегает поверхность эллипсоида

$$x'Ax = 1.$$

Рассмотрим в  $R_n$  множество точек  $Q_n$ , являющееся  $\Psi$ -образом множества  $P_n$ ,

$$Q_n = \Psi(P_n). \quad (6.3)$$

Так как для всякой матрицы  $A$  из  $P_n$ , согласно (6.2'), имеют место неравенства

$$x_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.4)$$

то справедливо включение

$$Q_n \subseteq \prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}. \quad (6.4')$$

В дальнейшем сечение пространства  $R$ , гиперплоскостью

$$a_{ik} = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i + 1, \dots, n \quad (6.5)$$

будем обозначать символом  $\tilde{R}$ . Оно, очевидно, является  $n$ -мерным метрическим подпространством пространства  $R$ , состоящим из тех и только тех симметричных матриц  $n$ -го порядка, которые имеют соответственно одинаковые элементы  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i + 1, \dots, n$ . Сечение множества  $M$  матриц из  $R$ , гиперплоскостью (6.5) аналогично этому будем обозначать символом  $\tilde{M}$ .

Изучим свойства границ множеств  $\tilde{P}_n$  и  $\tilde{Q}_n$ .

**Лемма 1.** *Если последовательность матриц из множества  $\tilde{P}_n$  сходится к некоторой матрице, принадлежащей границе этого множества, то последовательность  $\Psi$ -образов этих матриц расходится в бесконечность.*

**Доказательство.** Пусть матрица  $A$  принадлежит границе множества  $\tilde{P}_n$ ; тогда из включения (5.6) вытекает равенство

$$A_n^0 = 0. \quad (6.6)$$

Возможно одно из двух: либо существует значение  $i$ , для которого

$$A_{n-1}^{(i)} > 0, \quad (6.7)$$

либо для всех  $i$  выполнены равенства

$$A_{n-1}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

Рассмотрим первый случай. Из включения  $A \in \tilde{P}_n$  вытекает, что существует последовательность матриц  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , принадлежащих множеству  $P_n$ , таких, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = A, \quad A_m \in P_n.$$

Следовательно, согласно соотношениям (6.2), (6.7) и (6.6) будем иметь

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Psi(A_m) = \infty.$$

Далее, рассмотрим второй случай и покажем, что для всякого сколь угодно малого положительного числа  $\epsilon$ , в  $\epsilon$ -окрестности матрицы  $A$ ,  $A \in \tilde{P}_n$ , удовлетворяющей условиям (6.8), найдется матрица  $B$ , принадлежащая границе множества  $\tilde{P}_n$  и удовлетворяющая условию (6.7).

Действительно, согласно условий (3.1) и равенств

$$\frac{\partial A_{i+1}^{(i+2)}}{\partial a_{i+1}^{i+1}} = A_i^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

которые очевидны, последовательным сколь угодно малым увеличением элементов  $a_{r+1}^{r+1}, \dots, a_{n-1}^{n-1}$  матрицы  $A$  получим матрицу  $B$ , для которой выполнены условия

$$B_i^{(i+1)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Покажем, кроме того, что справедливо равенство  $B_n^0 = 0$ . Для этого достаточно доказать следующее предложение: *если ранг  $r$  матрицы  $A$  из  $R$ , меньше  $n-1$ , то при изменении элемента  $a_{r+1}^{r+1}$  ранг матрицы  $A$*

может возрасти не более, чем на единицу. Рассмотрим какой-либо минор  $M$  матрицы  $A$ , порядок которого не меньше, чем  $\rho + 2$ ; тогда

$$\frac{\partial M}{\partial a_{\rho+1, \rho+1}} = 0. \quad (6.9)$$

Возможно одно из двух: либо элемент  $a_{\rho+1, \rho+1}$  входит в выражение минора  $M$ , либо нет. Во втором случае равенство (6.9) очевидно. В первом же случае производная  $\frac{\partial M}{\partial a_{\rho+1, \rho+1}}$  равна минору  $\tilde{M}$  матрицы  $A$ , который получается из минора  $M$  вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент  $a_{\rho+1, \rho+1}$ . Так как ранг матрицы  $A$  равен  $\rho$ , а порядок минора  $\tilde{M}$  не меньше  $\rho + 1$ , то  $\tilde{M} = 0$ . Равенство (6.9) доказано. А из него вытекает справедливость предложения, если учесть, что  $M$  — произвольный минор не менее, чем  $(\rho + 1)$ -го порядка матрицы  $A$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если матрица  $\Xi$  принадлежит границе множества  $\tilde{Q}_n$ , то существует расходящаяся в бесконечность последовательность матриц  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , из множества  $\tilde{P}_n$  таких, что справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Psi(A_m) = \Xi.$$

**Доказательство.** Пусть матрица  $\Xi$  принадлежит границе множества  $\tilde{Q}_n$ ; тогда найдется последовательность матриц  $\Xi_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , принадлежащих множеству  $\tilde{Q}_n$ , таких, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Xi_m = \Xi, \quad \Xi_m \in \tilde{Q}_n. \quad (6.10)$$

Рассмотрим последовательность множеств

$$\Psi^{-1}(\Xi_m), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.11)$$

являющихся соответственно  $\Psi$ -образными матриц последовательности  $\Xi_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Из определения (6.3) множества  $\tilde{Q}_n$  вытекает, что каждое из множеств (6.11) непусто и содержит по крайней мере одну матрицу из множества  $\tilde{P}_n$ . Обозначим символом  $A_m$  матрицу, принадлежащую пересечению множеств  $\tilde{P}_n$  и  $\Psi^{-1}(\Xi_m)$ ;  $m = 1, 2, \dots$ ; в результате этого получим последовательность матриц, удовлетворяющих требованиям леммы. Действительно, допустим, что последовательность  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , находится в ограниченной части подпространства  $\tilde{R}$ ; тогда без ограничения общности можно предположить, что она сходится, т. е. существует матрица  $A$ , удовлетворяющая условию

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = A. \quad (6.12)$$

Возможно одно из двух: либо

$$A \in \tilde{P}_n,$$

либо

$$A \in \Gamma \tilde{P}_n.$$

В первом случае, в силу равенства (6.12) и согласно построению последовательности  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , будем иметь, учитывая, что отображение  $\Psi$  непрерывно на  $\tilde{P}_n$ :

$$\Psi(A) = \Psi\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Psi(A_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \Xi_m = \Xi \in \tilde{Q}_n.$$

Но это противоречит тому, что матрица  $\Xi$  принадлежит границе множества  $\tilde{Q}_n$ . Во втором случае, в силу леммы 1, последовательность матриц  $\Xi_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , должна расходиться в бесконечность. Но это противоречит исходной посылке.

Лемма доказана.

7. Докажем предложение, которое составит основу для разрешения задачи, поставленной в начале предшествующего пункта.

**Теорема 5.** *Имеет место равенство*

$$Q_n = \prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}. \quad (7.1)$$

Отображение  $\Psi$  устанавливает между множествами  $P_n$  и  $Q_n$  взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $A$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Xi$ ,  $\Xi \in Q_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Xi$  обозначает матрицу, принадлежащую границе множества  $Q_n$ ; тогда, согласно лемме 2, найдется расходящаяся в бесконечность последовательность матриц  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , из множества  $\tilde{P}_n$ , такая, что имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Psi(A_m) = \Xi, \quad A_m \in \tilde{P}_n, \quad (7.2)$$

причем  $\tilde{P}_n$  обозначает сечение множества  $P_n$  гиперплоскостью

$$a_{ik} = x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i + 1, \dots, n.$$

Чтобы последовательность  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , расходилась в бесконечность, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из  $n$  числовых последовательностей

$$a_{ii}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 1, 2, \dots,$$

расходилась в бесконечность.

Пусть для определенности  $q$ ,  $q = 1, 2, \dots, n$ , каких-либо из этих последовательностей расходятся в бесконечность, а каждая из остальных  $(n - q)$  — ограничена. Без ограничения общности можно предположить, что расходящимися являются первые  $q$  последовательностей, а ограниченными — остальные, причем последние можно предположить сходящимися. Таким образом, каждая из последовательностей

$$a_{ii}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad m = 1, 2, \dots,$$

расходится в бесконечность, и существуют числа  $a_{ii}$ , такие, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{ii}^{(m)} = a_{ii}, \quad i = q + 1, \dots, n.$$

Далее, преобразуем величины  $x_{ii}^{(m)}$ ,  $i \leq q$ . Имеем, согласно (6.2')

$$x_{ii}^{(m)} = \frac{(A_m)^{(i)}_{n-1}}{(A_m)^0_n}, \quad i \leq q, \quad m = 1, 2, \dots$$

Правую часть последнего равенства можно переписать следующим образом:

$$x_{ii}^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}^{(m)}} \frac{(\tilde{A}_m)^{(i)}_{n-1}}{(\tilde{A}_m)^0_n}, \quad i \leq q, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7.4)$$

где

$$\tilde{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \frac{a_{1q}}{\sqrt{a_{11}^{(m)} a_{qq}^{(m)}}} & \frac{a_{1q+1}}{\sqrt{a_{11}^{(m)}}} & \dots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{a_{11}^{(m)}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{q1}}{\sqrt{a_{11}^{(m)} a_{qq}^{(m)}}} & \dots & 1 & \frac{a_{qq+1}}{\sqrt{a_{qq}^{(m)}}} & \dots & \frac{a_{qn}}{\sqrt{a_{qq}^{(m)}}} \\ \frac{a_{q+11}}{\sqrt{a_{11}^{(m)}}} & \dots & \frac{a_{q+1q}}{\sqrt{a_{qq}^{(m)}}} & a_{q+1q+1}^{(m)} & \dots & a_{q+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{a_{11}^{(m)}}} & \dots & \frac{a_{nq}}{\sqrt{a_{qq}^{(m)}}} & a_{nq+1} & \dots & a_{nn}^{(m)} \end{bmatrix} \in P_n. \quad (7.5)$$

Чтобы осуществить предельный переход в равенствах (7.4), докажем справедливость включения

$$\tilde{A} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{A}_m \in P_n. \quad (7.6)$$

С этой целью рассмотрим последовательность матриц

$$\bar{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{q+1q+1}^{(m)} & \dots & a_{q+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nq+1} & \dots & a_{nn}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

Согласно равенств (7.5) и (7.6), имеем:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \bar{A}_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{A}_m = \tilde{A}, \quad \bar{A}_m \in P_n. \quad (7.8)$$

Следовательно, справедливы равенства

$$(\tilde{A}_m)_n^0 = (\bar{A}_m)_n + \alpha^{(m)}, \quad (\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)} = (\bar{A}_m)_{n-1}^{(i)} + \alpha_i^{(m)}, \quad (7.9)$$

где

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha^{(m)} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha_i^m = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.10)$$

Далее, покажем, что последовательность  $\Psi$ -образов матриц  $\bar{A}_m$  ограничена. Действительно, в силу (7.7), получим:

$$\bar{x}_{ii} = \frac{(\bar{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\bar{A}_m)_n^0} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (7.11)$$

Так как, согласно (7.5), имеем:

$$x_{ii}^{(m)} = \frac{(A_m)_{n-1}^{(i)}}{(A_m)_n^0} = \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\tilde{A}_m)_n^0}, \quad i = q+1, \dots, n, \quad (7.12)$$

то справедливы равенства

$$\frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\tilde{A}_m)_n^0} = x_{ii} + \beta_i^{(m)}, \quad i = q+1, \dots, n, \quad (7.13)$$

где

$$x_{ii} = \lim_{m \rightarrow +\infty} x_{ii}^{(m)}, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \beta_i^{(m)} = 0, \quad i = q + 1, \dots, n. \quad (7.14)$$

Исключая из равенств (7.9) и (7.13) величины  $(\tilde{A}_m)_n^0$  и  $(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}$ , получим

$$\frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)} + \alpha_i^{(m)}}{(\tilde{A}_m)_n^0 + \alpha^{(m)}} = x_{ii} + \beta_i^{(m)},$$

или, если учесть равенства (7.10) и (7.14),

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\tilde{A}_m)_n^0} = x_{ii}, \quad i = q + 1, \dots, n. \quad (7.15)$$

Так как соотношения (7.11) и (7.15) означают, что последовательность  $\Psi$ -образов матриц  $\tilde{A}_m$  ограничена, то включение (7.6) доказано. Действительно, в противном случае матрица  $\tilde{A}$  принадлежала бы границе множества  $P_n$ , и, согласно лемме 1, последовательность  $\Psi(\tilde{A}_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , расходилась бы в бесконечность, что противоречит доказанному.

Из включения (7.6) вытекает, что

$$\tilde{A}_n^0 > 0. \quad (7.16)$$

Переходя в равенстве (7.4) к пределу при  $m \rightarrow +\infty$ , получим, согласно (7.2),

$$x_{ii} = \lim_{m \rightarrow +\infty} x_{ii}^{(m)} = 0, \quad i \leq q,$$

ибо последовательность  $a_{ii}^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , расходится в бесконечность, и, в силу (7.5), (7.6) и (7.16), имеем:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\tilde{A}_m)_n^0} = \frac{\tilde{A}_{n-1}^{(i)}}{\tilde{A}_n^0} = 1, \quad i \leq q. \quad (7.17)$$

Так как, согласно (7.2) и (6.4), имеют место и равенства

$$x_{jj} \geq 0, \quad j > q,$$

то матрица  $\Xi$  принадлежит границе множества  $\prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}$ . Тем самым доказано такое включение:

$$\Gamma Q_n \subseteq \Gamma \prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}. \quad (7.18)$$

Опираясь на полученное включение, докажем равенство (7.1) методом полной индукции.

Прежде всего докажем равенство

$$Q_2 = \prod_{i=1}^2 \{x_{ii} > 0\}. \quad (7.19)$$

Для этого достаточно доказать, что для произвольных фиксированных положительных чисел  $x_{11}$  и  $x_{22}$  и произвольного фиксированного числа  $a_{12}$  существует такое решение системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_{11} &= a_{22} : (a_{11} a_{22} - a_{12}^2), \\ x_{22} &= a_{11} : (a_{11} a_{22} - a_{12}^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

относительно  $a_{11}$  и  $a_{22}$ , которое вместе с числом  $a_{12}$  образует матрицу, принадлежащую множеству  $P_2$ .

Непосредственно из системы (7.20) вытекают равенства

$$a_{11}x_{11} = a_{22}x_{22} = \lambda. \quad (7.21)$$

Величина  $\lambda$  находится из уравнения

$$\lambda^2 - \lambda - a_{12}^2 x_{11} x_{22} = 0,$$

которое получается, если из любого уравнения системы (7.20) исключить  $a_{11}$  и  $a_{22}$  с помощью равенств (7.21). Решая последнее уравнение относительно  $\lambda$ , получим:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a_{12}^2 x_{11} x_{22}}}{2}.$$

После этого из равенств (7.21) находим

$$a_{11} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a_{12}^2 x_{11} x_{22}}}{2x_{11}},$$

$$a_{22} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a_{12}^2 x_{11} x_{22}}}{2x_{22}},$$

причем  $a_{11} > 0$  и

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a_{12}^2 x_{11} x_{22}}}{2x_{11}x_{22}} > 0.$$

Следовательно, матрица

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

из множества  $P_2$  удовлетворяет системе уравнений (7.20).

Равенство (7.19) доказано.

Допустим, далее, что равенство (7.1) имеет место для всякого натурального числа  $s < n$  и докажем, что оно имеет место для  $n$ .

В самом деле, пусть матрица  $\Xi$  принадлежит границе множества

$\prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}$ . Это значит, что по крайней мере один из элементов  $x_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы  $\Xi$  равен нулю.

Пусть для определенности какие-либо  $q$ ,  $0 < q \leq n$ , из элементов  $x_{ii}$  равны нулю, а остальные  $(n - q)$  отличны от нуля. Без ограничения общности можно предположить, что нулю равны первые  $q$  элементов  $x_{ii}$ , а остальные отличны от нуля. Итак, имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_{ii} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, q, \\ x_{jj} &> 0, & j &= q + 1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Построим последовательность матриц  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , следующим образом:

$$a_{ik}^{(m)} = a_{ki}^{(m)} = x_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i + 1, \dots, n; \quad (7.23)$$

числовые последовательности

$$a_{ii}^{(m)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (7.24)$$

суть монотонно возрастающие и расходящиеся; кроме того,

$$a_{jj}^{(m)} = a_{jj}, \quad j = q + 1, \dots, n, \quad (7.25)$$

и числа  $a_{jj}$  выбраны так, что имеют место равенства

$$x_{jj} = \frac{B_{n-q-1}^{(j-q)}}{B_{n-q}^0}, \quad j = q+1, \dots, n, \quad \text{если } q < n-1, \quad (7.26)$$

где

$$B = \begin{bmatrix} a_{q+1, q+1} & x_{q+1, q+2} & \dots & x_{q+1, n-1} & x_{q+1, n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n, q+1} & x_{n, q+2} & \dots & x_{n, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad (7.27)$$

если же  $q = n-1$ , то

$$x_{nn} = \frac{1}{a_{nn}}. \quad (7.28)$$

При этом числа  $a_{ii}^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , выбраны так, что матрица  $A_1$  принадлежит множеству  $P_n$ . Ясно, что такое построение возможно. Отметим только, что равенства (7.26) осуществимы в силу допущения индукции.

Из включения  $A_1 \in P_n$  вытекает, что каждая матрица последовательности  $A_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , принадлежит множеству  $P_n$ . Следовательно, согласно (6.3), последовательность  $\Psi$ -образов матриц  $A_m$  принадлежит множеству  $Q_n$ . Таким образом, если имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \Psi(A_m) = E, \quad (7.29)$$

то справедливо включение

$$\Gamma \prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\} \subseteq \Gamma Q_n. \quad (7.30)$$

Перейдем к доказательству равенства (7.29). Имеем:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(A_m)_{n-1}^{(i)}}{(A_m)_n^0} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_{ii}^{(m)}} \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(i)}}{(\tilde{A}_m)_n^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (7.31)$$

где матрицы  $\tilde{A}_m$  определяются по формулам (7.5) с учетом (7.23) и (7.25) и, следовательно, справедливы равенства (7.17).

Если  $q < n-1$ , то, согласно (7.25), (7.5) и (7.26),

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(A_m)_{n-1}^{(j)}}{(A_m)_n^0} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(j)}}{(A_m)_n^0} = \frac{B_{n-q-1}^{(j-q)}}{B_{n-q}^0} = x_{jj}, \quad j = q+1, \dots, n. \quad (7.32)$$

Если же  $q = n-1$ , то

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(A_m)_{n-1}^{(n)}}{(A_m)_n^0} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(\tilde{A}_m)_{n-1}^{(n)}}{(\tilde{A}_m)_n^0} = \frac{1}{a_{nn}} = x_{nn}. \quad (7.33)$$

Соотношения (7.31), (7.32) и (7.33) означают, что справедливо равенство (7.29), а тем самым и включение (7.30). Из включений же (7.30) и (7.18) вытекает равенство

$$\Gamma Q_n = \Gamma \prod_{i=1}^n \{x_{ii} > 0\}, \quad (7.34)$$

которое вместе с включением (6.4) доказывает равенство (7.1)

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Достаточно показать разрешимость первых  $n$  уравнений (6.2) относительно  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ .

С этой целью введем обозначения

$$F_i = \frac{A_{n-1}^{(i)}}{A_n^0} - x_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.35)$$

и покажем, что функции  $F_1, F_2, \dots, F_n$  на некотором множестве удовлетворяют всем требованиям теоремы существования неявных функций [11].

Действительно, пусть задана матрица  $\Xi_0$  из множества  $\Psi(Q_n)$ , тогда найдется по крайней мере одна матрица  $A_0$  из множества  $Q_n$  такая, что:

1) все функции  $F_1, F_2, \dots, F_n$  определены и направлены в  $(n+1)$ -мерном прямоугольном параллелепипеде  $D$  с центром в точке

$$(a_{11}^0, \dots, a_{1n}^0, a_{22}^0, \dots, a_{2n}^0, \dots, a_{nn}^0, x_{11}^0, \dots, x_{nn}^0),$$

причем сечение этого параллелепипеда плоскостью  $x_{ii} = x_{ii}^0, i = 1, 2, \dots, n$ , целиком принадлежит множеству  $Q_n$ ;

2) частные производные всех этих функций по всем аргументам  $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{nn}, x_{11}, \dots, x_{nn}$  существуют и непрерывны в параллелепипеде  $D$ ;

3) матрица  $A_0$  удовлетворяет уравнениям

$$F_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.36)$$

при условии, что  $x_{ii} = x_{ii}^0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Далее изучим свойства якобиана

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})}. \quad (7.37)$$

Для этого, в связи с переменной матрицей  $A$  из  $R$ , рассмотрим элементы якобиана (7.37):

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_{kk}} = \frac{A_{n-2}^{(i, k)} A_n^0 - A_{n-1}^{(i)} A_{n-1}^{(k)}}{(A_n^0)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (7.38)$$

и построим матрицу  $\Xi$ , полагая

$$x_{ik} = x_{ki} = A_{n-1}^{(i)} A_{n-1}^{(k)} - A_{n-2}^{(i, k)} A_n^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i+1, \dots, n. \quad (7.39)$$

Относно матрице  $A$  матрицу  $\Xi$ , определим отображение

$$\Xi = \Phi(A) \quad (7.40)$$

пространства  $R$ , самого в себя.

Покажем, прежде всего, что имеет место включение

$$\{A_n^0 = 0\} \subset \{\Phi(A)_n^0 = 0\}. \quad (7.41)$$

Действительно, если справедливо равенство  $A_n^0 = 0$ , то элементы матрицы  $\Phi(A)$ , согласно (7.39), выражаются по формулам

$$x_{ik} = A_{n-1}^{(i)} A_{n-1}^{(k)}$$

и, следовательно,

$$\Phi(A)_n^0 = \prod_{i=1}^n (A_{n-1}^{(i)})^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После этого ясно, если учесть равенство

$$\Phi(A)_n^0 = (-1)^n (A_n^0)^{2n} \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})}, \quad (7.42)$$

вытекающее из формул (7.38) и (7.39), что система уравнений (7.36) удовлетворяет всем требованиям теоремы существования неявных функций для всех матриц множества

$$Q_n^* = Q_n - Q_n \{[\Phi(A)]_n^0 = 0\}. \quad (7.43)$$

Обратим внимание на то, что множество  $Q_n^*$  непусто, ибо оно содержит, например, все матрицы из  $R_n$ , у которых на главной диагонали стоят положительные числа, а остальные элементы все нули.

Отсюда следует, что система уравнений (7.36) разрешима на множестве  $\Psi(Q_n^*)$  относительно величин  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , причем ее решение составляется из однозначных непрерывно дифференцируемых функций относительно совокупности всех аргументов  $x_{jk}, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$ .

Это означает, что отображение  $\Psi$  устанавливает между множествами  $Q_n^*$  и  $\Psi(Q_n^*)$  взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $A$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Xi$ ,  $\Xi \in \Psi(Q_n^*)$ .

Далее, покажем, что отображение  $\Psi$  устанавливает между множеством

$$\widehat{Q}_n = Q_n - Q_n \{A_n^0 = 0\} \quad (7.44)$$

и его  $\Psi$ -образом взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $A$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Xi$ ,  $\Xi \in \Psi(\widehat{Q}_n)$ , несмотря на то, что, согласно (7.42) и (7.43), на множестве  $\widehat{Q}_n - Q_n^*$  якобиан (7.37) равен нулю, т. е. не выполнено одно из условий теоремы существования неявных функций [11].

Это предположение мы докажем методом полной индукции.

Для  $n = 2$

$$A_2^0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

и, согласно формуле (7.39),

$$x_{11} = a_{22}^2, \quad x_{12} = x_{21} = a_{12}^2, \quad x_{22} = a_{11}^2,$$

следовательно,

$$[\Phi(A)]_n^0 = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{vmatrix} = a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^4.$$

Отсюда вытекает, что множество  $\widehat{Q}_2 - Q_2^*$  пустое. Таким образом, для  $n = 2$  наше утверждение доказано.

Пусть теперь наше утверждение имеет место для  $n - 1, n - 1 > 2$ , докажем его для  $n$ .

Итак, по предположению, система уравнений

$$\frac{A_{n-2}^{(i)}}{A_{n-1}^0} - x_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (7.45)$$

получающаяся из системы (7.36), если в ней заменить  $n$  на  $n - 1$ , разрешима относительно величин  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1, n-1}$  для всякой матрицы

$$\Xi = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \dots & x_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

из множества  $\Psi(Q_{n-1})$ , причем решения составляют из однозначных непрерывно дифференцируемых функций по совокупности всех аргументов  $x_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $k = i, i+1, \dots, n-1$ ,  $a_{ik} = x_{ik}$ ,  $i \neq k$ .

Рассмотрим множество  $T_n^{(1)}$  матриц вида

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (7.47)$$

где матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix} \quad (7.48)$$

пробегает множество  $Q_{n-1}$ , а величина  $a_{nn}$  принимает всевозможные положительные значения, и покажем, что отображение  $\Psi$  устанавливает между множеством  $\Psi(T_n^{(1)})$  и его  $\Psi$ -образом взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $B$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Psi(B)$ .

Действительно, согласно (7.47) и (7.48), имеем:

$$B_n = a_{nn} A_{n-1}^0, \\ B_{n-1}^{(i)} = a_{nn} A_{n-2}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad B_{n-1}^{(n)} = A_{n-1}^0.$$

Следовательно, система уравнений (7.36) в этом случае принимает вид:

$$\frac{A_{n-2}^{(i)}}{A_{n-1}^0} - x_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \frac{1}{a_{nn}} - x_{nn} = 0. \quad (7.49)$$

Так как система первых  $(n-1)$  уравнений разрешима нужным образом согласно предположению, а последнее уравнение разрешимо относительно  $a_{nn}$  непосредственно, то наше утверждение доказано.

Далее, рассмотрим совокупность  $T_n^{(n-i+1)}$  матриц вида

$$C_\lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1i-1} & a_{i-1i} & a_{i-1i+1} & \dots & a_{i-1n-1} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & \dots & a_{in-1} & \lambda \tilde{a}_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1i-1} & a_{i+1i} & a_{i+1i+1} & \dots & a_{i+1n-1} & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1i-1} & a_{n-1i-1} & a_{n-1i+1} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & & 0 & \lambda \tilde{a}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \in Q_n, \quad (7.50)$$

где матрица  $C_0$  пробегает совокупность  $T_n^{(n-i)}$ ,  $\tilde{a}_{in}$  — положительное число и  $\lambda$  пробегает совокупность действительных чисел; покажем, что отображение  $\Psi$  устанавливает между множеством  $\Psi(T_n^{(n-i+1)})$  и его  $\Psi$ -образом взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $C_\lambda$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Psi(C_\lambda)$ , в предположении, что этими свойствами обладает множество  $T_n^{(n-1)}$ .

Итак, согласно предположению, на множестве  $\Psi(T_n^{(n-1)})$  система уравнений (7.36) разрешима относительно величин  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ , ...,  $a_{nn}$  (необходимо

учитывать равенства (6.2''), причем решение составляется из однозначных непрерывно дифференцируемых функций

$$a_{ss} = \bar{a}_{ss}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (7.51)$$

от величин  $x_{jk}$  тех индексов, с которыми  $a_{jk}$  входят в выражение матрицы  $C_\lambda$ .

Из соотношения (7.50) вытекает, что каждой фиксированной матрице из множества  $T_n^{(n-1)}$  сопоставляется вполне определенная прямая  $C_\lambda$ ,  $-\infty < \lambda < +\infty$ . Таким образом, если рассматривать совокупность всех прямых, соответствующих точкам множества  $T_n^{(n-1)}$ , то множество точек этих прямых и составит множество  $T_n^{(n-i+1)}$ .

Вдоль каждой прямой  $C_\lambda$  детерминант матрицы  $C_\lambda$  представляется, как легко видеть, полиномом от  $\lambda$  второй степени

$$\zeta(\lambda) = (C_\lambda)_n^0 = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2, \quad (7.52)$$

коэффициенты которого являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $a_{ik}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ . Отсюда следует, что прямая  $C_\lambda$  пересекается со множеством  $\{A_n^0 = 0\} T_n^{(n-i+1)}$  самое большее в двух точках.

Аналогично этому, главные миноры  $(n-1)$ -го и  $(n-2)$ -го порядка матрицы  $C_\lambda$  вдоль прямой  $C_\lambda$  представляются, вообще говоря, полиномами второй степени, коэффициенты которых являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $a_{ik}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ . Следовательно, согласно (7.39), детерминант матрицы  $\Phi(C_\lambda)$  вдоль прямой  $C_\lambda$  представляется полиномом от  $\lambda$  самое большее степени  $4n$ :

$$\xi(\lambda) = [\Phi(C_\lambda)]_n^0 = s_0 + s_1\lambda + \dots + s_m\lambda^m, \quad m \leq 4n, \quad (7.53)$$

причем коэффициенты  $s_i$  являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $a_{ik}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ . Отсюда следует, что прямая  $C_\lambda$  пересекается со множеством  $\{\Phi(A) = 0\} T_n^{(n-i+1)}$  самое большее в  $4n$  точках.

Таким образом, на множестве  $\Psi(T_n^{(n-i+1)} Q_n^*)$  система уравнений (7.36) разрешима относительно величин  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , причем решение составляется из однозначных непрерывно дифференцируемых функций

$$a_{ss} = \hat{a}_{ss}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

от величин  $x_{jk}$  тех индексов, с которыми  $a_{jk}$  входят в выражение матрицы  $C_\lambda$ , и от  $\lambda$  [11].

Так как, очевидно, в точках множества  $\Psi(T_n^{(n-i)} Q_n^*)$  имеют место тождества

$$\hat{a}_{ss}|_{\lambda=0} \equiv \bar{a}_{ss}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (7.54)$$

то функции  $\hat{a}_{ss}$  могут быть так доопределены в точках множества  $\Psi[T_n^{(n-i)}(Q_n - Q_n^*)]$ , что тождества (7.54) имеют место всюду на множестве  $\Psi(T_n^{(n-i)})$ . Следовательно, после такого доопределения величины  $\hat{a}_{ss}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов на множестве  $\Psi(T_n^{(n-i)})$ .

Вычислим производную функции  $\hat{a}_{ss}$  по  $x_{jk}$ . Если в уравнения (7.36) подставить функции  $\hat{a}_{ss}$ , то получатся тождества относительно величин  $x_{jk}$ . Диф-

ференцируя эти тождества по  $x_{jk}$ , получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial a_{ss}} \cdot \frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}} + \frac{\partial F_1}{\partial x_{jk}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

относительно  $n$  величин  $\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Замечая, что детерминант этой системы, равный якобиану (7.37), в силу соотношений (7.42) и (7.43), на множестве  $T_n^{(n-i+1)} Q_n^*$ , отличен от нуля, разрешим эту систему по правилу Крамера; в результате этого будем иметь

$$\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}} = - \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, \dots, a_{s-1s-1}, x_{jk}, a_{s+1s+1}, \dots, a_{nn})} \cdot \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})}. \quad (7.55)$$

Далее, доопределим функции  $\hat{a}_{ss}$  в точках множества

$$\Psi [(T_n^{(n-i+1)} - T_n^{(n-i)}) (\hat{Q}_n - Q_n^*)]. \quad (7.56)$$

С этой целью рассмотрим  $\Psi$ -образ прямой  $C_\lambda$ ,  $-\infty < \lambda < +\infty$ , представляющий собой линию, непрерывную для всех значений  $\lambda$ , кроме тех, для которых  $(C_\lambda)_n^0 = 0$ . Совокупность точек всевозможных линий  $\Psi(C_\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < +\infty$ , и составляет множество  $\Psi(T_n^{(n-i+1)})$ . Так как по предположению между множеством  $\Psi(T_n^{(n-i)})$  и его  $\Psi$ -прообразом имеет место взаимно однозначное соответствие, то между совокупностью всех прямых  $C_\lambda$  и совокупностью всех линий  $\Psi(C_\lambda)$  имеет место взаимно однозначное соответствие.

Пусть матрица  $\Xi$  принадлежит множеству (7.56); тогда она принадлежит некоторой определенной линии  $\Psi(C_\lambda)$ . Поставим матрице  $\Xi$  в соответствие ту из матриц ее  $\Psi$ -прообраза, обозначим ее через  $A$ , которая принадлежит прямой  $C_\lambda$ , соответствующей линии  $\Psi(C_\lambda)$ .

Обратим внимание прежде всего на то, что в результате такого доопределения между точками всякой прямой  $C_\lambda$ , из которой исключены точки, принадлежащие множеству  $\{A_n^0 = 0\}$ , и точками соответствующей ей линии  $\Psi(C_\lambda)$  устанавливается взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие.

Преобразуем функции (7.55) следующим образом. Согласно формулам (7.42) и (7.53), имеем вдоль всякой прямой  $C_\lambda$ :

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})} = (-1)^n \frac{\xi(\lambda)}{[\zeta(\lambda)]^{2n}}. \quad (7.56)$$

Вводя обозначения

$$\xi_{jk}^{(s)}(\lambda) = [\zeta(\lambda)]^{2n} \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(a_{11}, \dots, a_{s-1s-1}, x_{jk}, a_{s+1s+1}, \dots, a_{nn})}, \quad (7.57)$$

перепишем формулы (7.55) в таком виде

$$\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}} = (-1)^{n+1} \frac{\xi_{jk}^{(s)}(\lambda)}{\xi(\lambda)}. \quad (7.58)$$

Функция  $\xi_{jk}^{(s)}(\lambda)$  в силу (7.57) и (7.35), представляется при всяком наборе индексов вполне определенным полиномом от  $\lambda$ , коэффициенты которого являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $a_{jk}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ .

Пусть теперь  $\tau$  обозначает такое значение параметра  $\lambda$ , что  $\Xi = \Psi(C_\tau)$  или, что то же,  $A = C_\tau$ . Так как по предположению матрица  $\Xi$  принадлежит множеству (7.56), то имеет место равенство  $\xi(\tau) = 0$ . Мы утверждаем, что  $\tau$

является корнем полинома  $\xi_{jk}^{(s)}(\tau)$  кратности не меньшей, чем для полинома  $\xi(\lambda)$ . Действительно, в противном случае при  $\lambda \rightarrow \tau$ , согласно (7.58), производная  $\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}}$  стремилась бы к бесконечности. Но тогда и величина  $\hat{a}_{ss}$  стремилась бы к бесконечности, что составляет противоречие.

Так как коэффициенты полинома  $\xi(\lambda)$  суть однозначные непрерывно дифференцируемые функции величин  $a_{ik}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ , то и его корни являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями этих величин. Обозначая символами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  те из корней полинома  $\xi(\lambda)$ , которые не являются корнями полинома  $\zeta(\lambda)$ , получим представление

$$\xi(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \eta(\lambda), \quad (7.59)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  обозначают кратности соответственно корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  и  $\eta$  — полином от  $\lambda$ , коэффициенты которого суть однозначные непрерывно дифференцируемые функции величин  $a_{jk}$  входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ , причем  $\eta(\lambda)$  не обращается в нуль нигде на множестве  $T_n^{(n-i+1)} \hat{Q}_n$ .

Аналогично этому имеет место представление

$$\xi_{jk}^{(s)}(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i} \eta_{jk}^{(s)}(\lambda), \quad (7.60)$$

где  $\beta_i \geq \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , и  $\eta_{jk}^{(s)}(\lambda)$  — полином от  $\lambda$ , коэффициенты которого являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $a_{ik}$ , входящих в выражение матрицы  $C_\lambda$ .

При помощи формул (7.59) и (7.60) перепишем уравнение (7.58) в виде

$$\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}} = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i - \alpha_i} \frac{\eta_{jk}^{(s)}(\lambda)}{\eta(\lambda)}. \quad (7.61)$$

Осуществляя в последних формулах замену

$$\lambda = \frac{x_{in}}{a_{in}}$$

и учитывая, что на множестве  $\Psi(T_n^{n-i})$  величины  $a_{jk}$ , входящие в выражение матрицы  $C_\lambda$ , по предположению являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями величин  $x_{jk}$  тех же индексов, перепишем уравнение (7.61) в виде

$$\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{jk}} = U_{jk}^{(s)}, \quad s, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = j, j+1, \dots, n \quad (7.62)$$

где функции

$$U_{jk}^{(s)} = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i - \alpha_i} \frac{\eta_{jk}^{(s)}(\lambda)}{\eta(\lambda)} \quad (7.63)$$

суть однозначные непрерывно дифференцируемые функции величин  $x_{jk}$  тех индексов, с которыми величины  $a_{jk}$  входят в выражение матрицы  $C_\lambda$ , и величины  $x_{in}$ .

Далее, проинтегрируем уравнение

$$\frac{\partial \hat{a}_{ss}}{\partial x_{in}} = U_{in}^{(s)}. \quad (7.64)$$

Его общее решение имеет вид:

$$\tilde{a}_{ss} = V_{in}^{(s)} + W, \quad (7.65)$$

где  $V_{in}^{(s)}$  — какая-либо первообразная для функции  $U_{in}^{(s)}$ , мыслимой как функция одной переменной  $x_{in}$ , т. е. вполне определенная однозначная непрерывно дифференцируемая функция относительно совокупности аргументов  $x_{jk}$ , а  $W$  — произвольная функция величин  $x_{jk}$  тех индексов, с которыми величины  $a_{jk}$  входят в выражение матрицы  $C_\lambda$ , т. е. функция, независимая от  $x_{in}$ .

Вычислим частное решение уравнения (7.62), отвечающее начальным данным

$$x_{in} = 0, \quad \tilde{a}_{ss} = \bar{a}_{ss}. \quad (7.66)$$

Согласно (7.65), оно имеет вид:

$$\tilde{a}_{ss} = V_{in}^{(s)} + (\bar{a}_{ss} - V_{in}^{(s)}|_{x_{in}=0}) \quad (7.67)$$

и, следовательно, представляется однозначной непрерывно дифференцируемой функцией относительно совокупности всех аргументов  $x_{jk}$  на всем множестве  $\Psi(T_n^{(n-i+1)})$ . Согласно равенствам (7.54) и (7.62), на всем множестве  $\Psi(T_n^{(n-i+1)})$  имеем:

$$\hat{a}_{ss} = V_{in}^{(s)} + (\bar{a}_{ss} - V_{in}^{(s)}|_{x_{in}=0}). \quad (7.68)$$

Таким образом доказано, что отображение  $\Psi$  устанавливает между множеством  $\Psi(Q_n)$  и его  $\Psi$ -прообразом взаимно однозначное соответствие, причем элементы матрицы  $A$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $\Xi$ ,  $\Xi \in \Psi(Q_n)$ .

Так как множество  $P_n$  содержится в  $\Psi$ -прообразе множества  $\Psi(Q_n)$ , то теорема доказана.

Последняя теорема дает возможность установить следующее важное предложение:

**Теорема 6.** Для каждой группы из  $n$  действительных чисел  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющих условиям

$$x_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.69)$$

существует бесконечное множество  $A_n$  матриц  $A$  из множества  $P_n$ , для каждой из которых выполнены равенства

$$\left( \frac{A_{n-1}^{(i)}}{A_n^0} \right)^{\frac{1}{2}} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.70)$$

причем диагональные элементы  $a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы  $A$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных ее элементов  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , и величин  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Множество  $A_n$  эквивалентно множеству точек евклидова пространства  $R_{n \cdot \frac{n-1}{2}}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим матрицу  $\Xi$  из пространства  $R_n$ , элементы которой определены следующим образом:

$$x_{ii} = x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.71)$$

а элементы  $x_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , выбраны по произволу. Согласно условиям (7.69), матрица  $\Xi$  принадлежит множеству  $Q_n$ . Следовательно, в соответствии с теоремой 5, существует единственная матрица из

множества  $P_n$ , удовлетворяющая условиям (6.2), причем элементы матрицы  $A$  являются однозначными непрерывно дифференцируемыми функциями элементов матрицы  $E$ . Заменяя в этих функциях величины  $x_{ik}$  равными им величинами  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i + 1, \dots, n$ , получим доказательство первой части теоремы.

Так как величины  $x_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i + 1, \dots, n$ , можно выбрать столькими способами, сколько точек в пространстве  $R_{\frac{n(n-1)}{2}}$ , то теорема доказана полностью.

## Глава вторая

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8. В настоящей главе будут изложены некоторые вопросы качественной теории системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, заданной в нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x, \quad (8.1)$$

где  $t$  — независимое действительное переменное (время),  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — матрица-столбец,  $L(t) = [l_{ik}(t)]$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка, составленная из действительных однозначных и непрерывных функций  $l_{ik}(t)$ , каждая из которых определена на всей действительной прямой  $-\infty < t < +\infty$ .

Как и в пункте 1, совокупность всевозможных матриц-столбцов вида  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , составленных из действительных чисел, будем называть либо линейным векторным пространством, либо, если в ней определена норма, скажем, при помощи формулы (1.5), — метрическим пространством, и обозначать символом  $R_n$ . При рассмотрении системы (8.1) пространство  $R_n$  будем именовать фазовым пространством этой системы [12].

В этих условиях, как известно [12, 13], для каждой системы начальных значений

$$t = t_0, x = x^0, \quad -\infty < t_0 < +\infty, \quad (8.2)$$

существует единственное решение

$$x = \varphi(t, t_0; x^0), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (8.3)$$

системы (8.1), обращающееся при  $t = t_0$  в  $x^0$ ,

$$\varphi(t, t_0; x^0) = x^0. \quad (8.4)$$

Совокупность всех точек  $x$ , определяемых соотношением (8.3), будем называть интегральной кривой системы (8.1).

Обратим внимание на то, что вектор-функция  $\varphi(t, t_0; x^0)$  может быть придан более определенный вид. Действительно, рассмотрим нормальную фундаментальную матрицу  $X$  системы уравнений (8.1), т. е. матрицу, столбцами которой являются линейно-независимые решения системы (8.1)

$$x^k = \{x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}\}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8.5)$$

определяемые начальными данными

$$t = t_0, x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{когда } i = k, \\ 0, & \text{когда } i \neq k. \end{cases} \quad (8.6)$$

Тогда решение системы (8.1), определяемое начальными данными (8.2), как известно [12], может быть записано в виде

$$x = \varphi(t, t_0; x^0) = X(t, t_0) x^0, \quad (8.7)$$

причем [13] имеет место равенство

$$\det X(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n l_{ii}(\tau) d\tau. \quad (8.8)$$

### § 3. Об одном методе получения оценок координат решения системы уравнений (8.1)

9. При помощи метода последовательных приближений могут быть получены оценки координат решений системы уравнений (8.1), неограниченно возрастающие вместе с ростом  $t$  при любом выборе коэффициентов  $l_{ik}(t)$ . Это значит, что в случае, когда система (8.1) устойчива по Ляпунову, и, следовательно  $x_s$  ограничены [12, 14-17], такого рода оценки неограниченно удаляются с ростом  $t$  от точных границ колебания  $x_s$ .

Последующие пункты содержат изложение метода получения оценок, более тесно связанных с точными границами колебания  $x_s$ .

10. Пусть в  $R_n$  задана квадратичная форма

$$G(t; x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(t) x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki}, \quad (10.1)$$

где  $a_{ik}(t)$  суть однозначные непрерывно дифференцируемые функции, заданные на всей действительной прямой  $-\infty < t < +\infty$ .

В связи с системой уравнений (8.1) введем в рассмотрение вторую квадратичную форму

$$g(t; x) = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k = \sum_{s=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_s} \sum_{k=1}^n l_{sk} x_k + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (10.2)$$

Ее коэффициенты получаются по формулам [9]:

$$\left. \begin{aligned} b_{ik} = b_{ki} &= \frac{da_{ik}}{dt} + \sum_{s=1}^n (a_{si} l_{sk} + a_{sk} l_{si}), \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

Если в квадратичную форму (10.1) подставить вместо  $x$  решение (8.3), то получится функция времени и начальных значений

$$\tilde{G}(t, t_0; x^0) = G[t; \varphi(t, t_0; x^0)], \quad (10.4)$$

удовлетворяющая, как это следует из (10.1), (10.2) и (8.1), дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{G}(t, t_0; x^0)}{dt} = g[t; \varphi(t, t_0; x^0)]. \quad (10.5)$$

В дальнейшем квадратичную форму  $G(t; x)$  положительно (отрицательно)-определенную при всяком фиксированном  $t$ ,  $a < t < b$ , будем называть существенно-положительной (отрицательной) в промежутке  $(a, b)$ .

**ЛЕММА 3.** Пусть задана непрерывно-дифференцируемая, существенно-положительная квадратичная форма  $G(t; x)$ .

Тогда вдоль всякой интегральной кривой (8.3)  $x^0 \neq 0$ , системы (8.1) имеет место тождество

$$\tilde{G}(t, t_0; x^0) = G(t_0; x^0) \exp \int_{t_0}^t g[\tau; \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau, \quad (10.6)$$

где  $g(t; x)$  определена соотношением (10.2) и  $\tilde{x}(\tau, t_0; x^0)$  изображает при фиксированном  $\tau$  вполне определенную точку эллипсоида

$$G(\tau; x) = 1 [9]. \quad (10.7)$$

11. Перейдем к построению оценок координат решения (8.3).

Так как точка  $x = \varphi(t, t_0; x^0)$  интегральной кривой (8.3) принадлежит эллипсоиду

$$G(t; x) = \tilde{G}(t, t_0; x^0),$$

то ее координаты, в соответствии с теоремой 2, удовлетворяют неравенствам

$$|x_s| = |\varphi_s(t, t_0; x^0)| \leq \left[ \tilde{G}(t, t_0; x^0) \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.1')$$

где  $A_n^0(t)$  — дискриминант квадратичной формы  $G(t; x)$  и  $A_{n-1}^{(s)}(t)$  — минор  $(n-1)$ -го порядка, получаемый из  $A_n^0(t)$  вычеркиванием  $s$ -той строки и  $s$ -того столбца.

Подставляя в полученные неравенства вместо величины  $\tilde{G}(t, t_0; x^0)$  ее выражение согласно формуле (10.6), придадим им более законченный вид:

$$|x_s| \leq \left\{ G(t_0; x^0) \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \exp \int_{t_0}^t g[\tau; \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (11.1)$$

$s = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < t_0 < +\infty, \quad -\infty < t < +\infty.$

Полагая

$$N_G(t) = \text{Max}_{G(t; x)=1} g(t; x), \quad (11.2)$$

получим функцию, непрерывную на всей действительной прямой  $-\infty < t < +\infty$ . После этого с помощью леммы 3 перепишем неравенства (11.1) в более удобном виде

$$|x_s| \leq \left[ G(t_0; x^0) \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \exp \int_{t_0}^t N_G(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.3)$$

$s = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 \leq t < +\infty.$

Аналогично этому, полагая

$$n(t) = \text{Min}_{G(t; x)=1} g(t; x), \quad (11.4)$$

получим снова функцию, непрерывную на всей действительной прямой  $-\infty < t < +\infty$ , причем неравенства (11.1) переписываются в виде

$$|x_s| \leq \left[ G(t_0; x^0) \cdot \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \exp \int_{t_0}^t n_G(\tau) d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11.5)$$

$s = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < t \leq t_0.$



вид:  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ , то коэффициенты квадратичной формы  $g$ , согласно (12.4) и (12.5), вычисляются по формулам

$$b_{ii} = 2\mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad b_{ik} = l_{ik} + l_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq k.$$

Отсюда следует, что величина  $B_i^{(i+1)}$  является линейной функцией  $\mu_i$  и, стало быть, последовательным выбором значений величин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  можно удовлетворить неравенства (12.6), причем неравенства (12.7), очевидно, выполнены.

Итак, пусть значения величин  $a_{ik}$  и  $\mu_i$  выбраны так, что выполнены условия (12.7) и (12.6); тогда  $\lambda$ -уравнение пары квадратичных форм  $g$  и  $G$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & b_{12} - \lambda a_{12} & \dots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & b_{22} - \lambda a_{22} & \dots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & b_{n2} - \lambda a_{n2} & \dots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (12.8)$$

имеет все корни отрицательные [8].

Для получения оценки функции  $N_G(t)$  оценим корни уравнения (12.8). Раскрывая детерминант  $D(\lambda)$ , получим многочлен степени  $n$  относительно  $\lambda$ :

$$D(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_n\lambda^n, \quad (12.9)$$

причем коэффициенты  $c_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , этого многочлена вычисляются по формулам [11]

$$c_0 = D(0), \quad c_s = \frac{1}{s!} \frac{d^s D}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=0}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (12.10)$$

Далее, пользуясь подстановкой

$$\lambda = -\frac{1}{u}, \quad (12.11)$$

произведем в уравнении (12.8) замену переменной; тогда, согласно (12.9), получим после необходимых преобразований

$$u^n - \frac{c_1}{c_0} u^{n-1} + \dots + (-1)^n \frac{c_n}{c_0} = 0. \quad (12.12)$$

Обозначая корни уравнений (12.8) и (12.12) соответственно через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и  $u_1, u_2, \dots, u_n$  и имея в виду, что  $\lambda_i < 0$ , согласно (12.11), будем иметь:

$$u_i = -\frac{1}{\lambda_i} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.13)$$

После этого из соотношения (12.12) вытекает, что

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{c_1}{c_0} > 0$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{\lambda_i} < \frac{c_1}{c_0} = -\frac{1}{\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.14)$$

где положено

$$\alpha = -\frac{c_0}{c_1} < 0. \quad (12.15)$$

Так как неравенства (12.14) преобразуются к виду

$$\lambda_i < \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то имеет место такая оценка [8]:

$$N_G(t) < \alpha(t). \quad (12.16)$$

Вычислим функцию  $\alpha$ . Согласно формулам (12.10), получим из (12.8):

$$c_0 = B_n^0. \quad (12.17)$$

Далее, дифференцируя  $D(\lambda)$  один раз по  $\lambda$  и полагая в производной  $\lambda = 0$ , найдем выражение для  $c_1$ :

$$c_1 = - \sum_{i=1}^n \tilde{B}_n^{(i)}, \quad (12.18)$$

где символы  $\tilde{B}_n^{(i)}$  обозначают определители  $n$ -го порядка, которые получаются из определителя  $B_n^0$ , если в нем заменить  $i$ -тый столбец  $i$ -тым столбцом определителя  $A_n$ .

Исключая из равенств (12.15), (12.17) и (12.18)  $c_0$  и  $c_1$ , получим эффективное выражение для  $\alpha$ :

$$\alpha = B_n^0 : \sum_{i=1}^n \tilde{B}_n^{(i)} < 0. \quad (12.19)$$

Внося в формулы (11.3) вместо  $N_G(t)$  функцию  $\alpha(t)$ , получим согласно (12.16) оценки координат решения системы уравнений (12.1), определяемого начальными данными  $t = t_0$ ,  $x = x^0$ , в таком виде:

$$|x_s| \leq \left\{ G(x^0) \frac{A_n^{(s)} - 1}{A_n^0} \exp \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (12.20)$$

$$s = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 \leq t < +\infty.$$

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

**Теорема 7.** *Чтобы система уравнений (12.1) была устойчива по Ляпунову, достаточно определить значения величин  $a_{ik}$  и  $\mu_i$  так, чтобы выполнялись условия (12.7) и (12.6). При этом координаты решения рассматриваемой системы, определяемого начальными данными  $t = t_0$ ,  $x = x^0$ , удовлетворяют эффективным неравенствам (12.20).*

**Пример 2.** Пусть задана система однородных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами \*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(1 + \sin^2 t) x_1 + (1 - \sin t \cos t) x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(1 + \sin t \cos t) x_1 - (1 + \cos^2 t) x_2. \end{aligned} \right\}$$

В связи с квадратичной формой

$$G = x_1^2 + x_2^2$$

построим квадратичную форму  $g$ :

$$g = -2(1 + \sin^2 t) x_1^2 - 2 \sin t \cos t x_1 x_2 - 2 \sin t \cos t x_2 x_1 - \\ - 2(1 + \cos^2 t) x_2^2 = -2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1 \sin t + x_2 \cos t)^2.$$

\* Эта система заимствована из книги Г. Н. Дубошина [17].

Так как квадратичная форма  $g$  является отрицательно определенной, то нулевое решение рассматриваемой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow +\infty$ .

Для вычисления оценок координат решения этой системы вычислим функции  $n_G(t)$  и  $N_G(t)$ . С этой целью рассмотрим  $\lambda$ -уравнение пары квадратичных форм  $g$  и  $G$ :

$$\begin{vmatrix} -2(1 + \sin^2 t) - \lambda & -2 \sin t \cos t \\ -2 \sin t \cos t & -2(1 + \cos^2 t) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате вычисления детерминанта получим квадратное уравнение относительно  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0,$$

корни которого таковы:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4.$$

Следовательно [8],

$$n_G(t) = -4, \quad N_G(t) = -2.$$

После этого, согласно (11.3) и (11.5), получим оценки координат решения рассматриваемой системы в таком виде:

$$|x_s| \leq r_0 \cdot e^{-2(t-t_0)}, \quad s = 1, 2, \quad t \leq t_0,$$

$$|x_s| \leq r_0 \cdot e^{-(t-t_0)}, \quad s = 1, 2, \quad t \geq t_0,$$

где

$$r_0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

#### 4. О свойствах оценок (11.1) и структуре семейства интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (8.1)

13. В п. 10 в связи с системой уравнений (8.1) каждой заданной симметричной квадратичной форме  $G(t; x)$  с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами  $a_{ik}(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , сопоставляется другая квадратичная форма  $g(t; x)$ , коэффициенты  $b_{ik}$  которой определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_{ik} = b_{ki} = \frac{da_{ik}}{dt} + \sum_{s=1}^n (a_{si}l_{sk} + a_{sk}l_{si}), \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

где  $l_{sk}$  — коэффициенты системы (8.1). При этом квадратичные формы  $G(t; x)$  и  $g(t; x)$  удовлетворяют дифференциальному соотношению

$$\frac{d\tilde{G}(t, t_0; x^0)}{dt} = g[t; \varphi(t, t_0; x^0)]. \quad (10.5)$$

В этом пункте мы решим обратную задачу: по заданным коэффициентам  $b_{ik}$  отыскать коэффициенты  $a_{ik}$  так, чтобы квадратичные формы  $g(t; x)$  и  $G(t; x)$  удовлетворяли соотношению (10.5).

Ясно, что всякая квадратичная форма  $G(t; x)$ , коэффициенты  $a_{ik}$  которой удовлетворяют системе уравнений (10.3), решает эту задачу.

Система уравнений (10.3) в такой постановке вопроса представляет собой систему  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с  $\nu$  неизвестными функциями  $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$ . Коэффициенты этой системы, как легко усмотреть из самих формул (10.3), представляют собой линейные комбинации однозначных непрерывных функций  $l_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , и потому сами являются однозначными непрерывными функциями. Таким образом, условия теоремы существования и единственности выполнены [13]. Отсюда вытекает, что всякой заданной симметрической квадратичной форме  $g(t; x)$ , в силу уравнений (10.3), сопоставляется  $\nu$ -параметрическое семейство квадратичных форм  $G(t; x)$ , удовлетворяющих соотношению (10.5); причем отдельная квадратичная форма  $G(t; x)$  этого семейства может быть выделена заданием определенных начальных значений ее коэффициентов.

Назовем классом  $K^1$  совокупность всевозможных квадратичных форм  $G(t; x)$  от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , коэффициенты  $a_{ik}$  которых суть действительные функции  $t$ , непрерывно дифференцируемые на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и такие, что выполнены условия

$$a_{ik}(t_0) = a_{ki}^0(t_0) = a_{ik}, \quad (13.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n,$$

где  $a_{ik}^0$  — суть вполне определенные числа, причем каждая из квадратичных форм  $G(t; x)$  является существенно положительной на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ .

Далее, назовем классом  $K^0$  совокупность всевозможных квадратичных форм  $g(t; x)$ , каждая из которых удовлетворяет соотношению (10.5),  $G(t; x) \in K^1$ .

Из определения класса  $K^0$  вытекает, что каждой квадратичной форме  $G(t; x)$  из класса  $K^1$  сопоставляется вполне определенная квадратичная форма  $g(t; x)$  из класса  $K^0$ . Наоборот, каждой квадратичной форме  $g(t; x)$  из класса  $K^0$  сопоставляется вполне определенная квадратичная форма  $G(t; x)$  из класса  $K^1$ , причем, как вытекает из рассуждений, приведенных в начале этого пункта, коэффициенты  $a_{ik}$  квадратичной формы  $G(t; x)$  составляют решение системы дифференциальных уравнений (10.3), определяемое начальными данными (13.1).

**Следствие 4.** *Между классами квадратичных форм  $K^0$  и  $K^1$  возможно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответствующие друг другу элементы  $g(t; x)$  и  $G(t; x)$  удовлетворяли соотношению (10.5).*

В дальнейшем предполагается, что это соответствие осуществлено все время, причем соответствующие друг другу квадратичные формы  $g(t; x)$  и  $G(t; x)$  называются сопряженными.

**14.** В этом пункте мы изучим некоторые зависимости оценок

$$|x_s| \leq \left\{ G(t_0; x^0) \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \exp \int_{t_0}^t g[\tau, \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (11.1)$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

координат решения системы (8.1) от выбора квадратичной формы  $G(t; x)$  и установим прежде всего условия, которым должны удовлетворять квадратичные формы, реализующие оценки, эквивалентные между собой.

**Теорема 8.** *Чтобы две квадратичные формы  $G_1(t; x)$  и  $G_2(t; x)$  из класса  $K^1$  реализовали эквивалентные между собой оценки типа (11.1), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $\psi(t)$ , непрерывно*

дифференцируемая на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \text{а) } \psi(t_0) &= 1, \\ \text{б) } G_2(t; x) &= \psi(t) G_1(t; x) \end{aligned}$$

при всех допустимых  $t$  и  $x$  [18].

Рассмотрим квадратичную форму  $\bar{G}(t; x)$  из класса  $K^1$  и присоединим к ней всевозможные квадратичные формы из этого класса, определяющие эквивалентные оценки. Совокупность квадратичных форм, полученную таким образом, будем называть подклассом в  $K^1$  и обозначим символом  $K_{\bar{G}}^1$ .

Из теоремы 8 вытекает:

**Следствие 5.** Подкласс  $K_{\bar{G}}^1$  состоит из всех квадратичных форм класса  $K^1$ , представимых в виде

$$G(t; x) = \psi(t) \bar{G}(t; x), \quad (14.1)$$

где функция  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемая на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и обращающаяся в единицу при  $t = t_0$ .

Если  $\psi(t)$  представлена константой, то она равна единице.

Два подкласса  $K_{G_1}^1$  и  $K_{G_2}^1$  в  $K^1$  либо не пересекаются между собой, либо, если пересекаются, то совпадают.

Рассмотрим, далее, некоторый подкласс  $K_{\bar{G}}^1$ . Совокупность всевозможных квадратичных форм класса  $K^0$ , каждая из которых сопряжена с некоторой квадратичной формой из  $K_{\bar{G}}^1$ , назовем подклассом в  $K^0$  и обозначим символом  $K_{\bar{g}}^0$ , где квадратичная форма  $\bar{g}$  сопряжена с  $\bar{G}$ . Подклассы  $K_{\bar{g}}^0$  и  $K_{\bar{G}}^1$  будем называть также сопряженными.

**Следствие 6.** Подкласс  $K_{\bar{g}}^0$  состоит из всех квадратичных форм класса  $K^0$ , представимых в виде

$$g(t; x) = \psi(t) \bar{g}(t; x) + \frac{d\psi}{dt} \bar{G}(t; x), \quad (14.2)$$

где  $\bar{G}$  и  $\bar{g}$  — пара сопряженных квадратичных форм и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемая на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  функция, обращающаяся в единицу при  $t = t_0$  [18].

Заменяя в соотношении (14.2) квадратичную форму  $g(t; x)$  ее выражением, согласно формуле (10.2), а затем приравнявая коэффициенты при одинаковых комбинациях  $x_{ik}$ , получим такую систему  $\nu$  уравнений с  $\nu$  неизвестными функциями  $a_{ik}$ :

$$\frac{da_{ik}}{dt} + \sum_{i, k=1}^n (a_{si} l_{sk} + a_{sk} l_{si}) = \psi \bar{b}_{ik} + \frac{d\psi}{dt} \bar{a}_{ik}, \quad (14.3)$$

где  $a_{ik}$  — коэффициенты квадратичной формы  $G(t; x)$ ,

$\bar{a}_{ik}$  — " " "  $\bar{G}(t; x)$ ,

$\bar{b}_{ik}$  — " " "  $\bar{g}(t; x)$ ,

сопряженной с  $\bar{G}(t; x)$ ;

$l_{sk}$  — коэффициенты системы (8.1).

Ясно, что если функции  $\bar{a}_{ik}$  и  $\bar{b}_{ik}$  заданы, а  $\psi(t)$  пробегает совокупность непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в единицу при  $t = t_0$ ,

то решение системы (14.3), определяемое начальными значениями (13.1) и мыслимое в виде квадратичной формы, пробегает подкласс  $K^1_{\bar{G}}$ .

15. Рассмотрим совокупность всевозможных интегральных кривых системы (8.1), проходящих при  $t = t_0$  через точки эллипсоида  $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}^0 x_i^0 x_k^0 = \delta^2$ , где  $\delta$  — произвольное фиксированное положительное число, и назовем эту совокупность семейством интегральных кривых  $S_\delta$ .

Согласно (11.1), оценки координат любого решения семейства  $S_\delta$ , порождаемые квадратичной формой  $G$  класса  $K^1$  с дискриминантом  $A_n^0(t)$ , имеют вид:

$$|x_s| \leq \delta \left\{ \frac{A_{n-1}^{(s)}(t)}{A_n^0(t)} \exp \int_{t_0}^t g[\tau; \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (15.1)$$

$$s = 1, 2, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Если переходить от одной квадратичной формы класса  $K^1$  к другой, то оценки (15.1), вообще говоря, будут меняться. Возникает вопрос: *каким условиям должны удовлетворять квадратичные формы, реализующие точные оценки типа (15.1), и существуют ли таковые?*

При этом, под точными оценками типа (15.1) понимаются такие оценки, которые при каждом значении  $t$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , достигаются соответствующей координатой некоторого решения из семейства  $S_\delta$ .

Имеет место следующая теорема существования:

**Теорема 9.** *Существует квадратичная форма  $G_0(t; x)$ , принадлежащая классу  $K^1$  и реализующая точные оценки типа (15.1) [18].*

Последняя теорема дает возможность составить некоторое представление о геометрической структуре семейства интегральных кривых системы (8.1).

Мы будем интерпретировать систему (8.1) в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $R_{n+1}\{t, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . В этом пространстве уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \delta^2 \quad (15.2)$$

изображает  $(n+1)$ -мерный цилиндр радиуса  $\delta$ , ось которого совпадает с осью  $t$ .

Справедлива теорема:

**Теорема 10.** *Каждая интегральная кривая системы (8.1) целиком лежит на определенной поверхности семейства*

$$G_0(t; x) = \delta^2, \quad (15.3)$$

причем существует топологическое отображение  $F$  пространства  $R_{n+1}$  самого на себя такое, что при фиксированном  $\delta$  поверхность (15.3) переходит в цилиндр (15.2) [18].

**Теорема 11.** *Чтобы квадратичная форма  $G(t; x)$  из класса  $K^1$  реализовала точные оценки типа (11.1), необходимо и достаточно, чтобы сопряженная с ней квадратичная форма  $g(t; x)$  при всяком фиксированном  $t$  была константой на поверхности эллипсоида  $G(t; x) = 1$ . [18].*

Если в системе уравнений (10.3) положить  $b_{ik} = 0$ , то получится система  $\nu$  дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{ik}}{dt} + \sum_{s=1}^n (a_{si} l_{sk} + a_{sk} l_{si}) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, i+1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

относительно  $\nu$  функций  $a_{ik}$ .

Обратим внимание на то, что коэффициенты квадратичной формы  $G_0(t; x)$  могут быть найдены в виде решения системы (15.4), реализующего начальные значения (13.1).

Систему (15.4) мы будем называть связанной с системой (8.1).

16. Рассмотрим семейство  $S$  решений системы дифференциальных уравнений (8.1), определяемых следующими начальными данными:

$$t = t_0, \quad x = x^0, \quad (16.1)$$

причем выполнено условие

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik}^0 x_i^0 x_k^0 = 1, \quad (16.2)$$

где квадратичная форма, стоящая в левой части, положительно определенная, т. е. семейство интегральных кривых, выходящих в момент времени  $t = t_0$  из точек эллипсоида (16.2).

Согласно теореме 10, каждая из интегральных кривых семейства  $S$  принадлежит поверхности

$$G(t; x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}(t) x_i x_k = 1 \quad (16.3)$$

$(n+1)$ -мерного пространства, причем система  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$  коэффициентов

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{22}, \dots, a_{2n}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

квадратичной формы  $G(t; x)$  составляет решение системы дифференциальных уравнений (15.4), связанной с системой (8.1), определяемое начальными данными

$$t = t_0, \quad a_{ik} = a_{ki} = a_{ik}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n. \quad (13.1)$$

Более того, из доказательства теоремы 9 и смысла левых частей уравнений (15.4) вытекает, что через каждую точку  $x = x^0$  поверхности (16.3) проходит интегральная кривая системы уравнений (8.1), целиком принадлежащая этой поверхности.

Отметим, что квадратичная форма  $G(t; x)$  является существенно-положительной на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ . Отсюда следует, в частности, что сечение поверхности (16.3) гиперплоскостью  $t = \text{const.}$  является  $n$ -мерным эллипсоидом.

Легко понять, что поверхность (16.3) является важной геометрической характеристикой семейства всех интегральных кривых системы уравнений (8.1). В связи с этим она имеет большое значение при изучении тех или иных свойств этого семейства. В дальнейшем в интересах сокращения речи поверхность (16.3) будем называть оболочкой системы дифференциальных уравнений (8.1).

Из сказанного ясно, что каждой матрице  $L(t)$  сопоставляется вполне определенная оболочка, выражаемая при помощи квадратичной формы  $G(t; x)$ , или, что то же, вполне определенная матрица  $A(t) = [a_{ik}(t)]$ , причем элементы матрицы составляют решение системы дифференциальных уравнений (15.4), определяемое начальными данными (13.1).

Коснемся, далее, вопроса о том, как матрица  $L$  выражается через матрицу  $A$ .

Пусть задана матрица  $A(t) = [a_{ik}(t)]$   $n$ -го порядка, составленная из непрерывно дифференцируемых функций  $a_{ik}(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , и удовлетворяющая условиям (13.1), причем квадратичная форма  $G(t; x) = x' A(t) x$  является существенно-положительной на прямой  $-\infty < t < +\infty$ .

Существует ли такая система дифференциальных уравнений (8.1) (матрица  $L(t)$ ), для которой поверхность  $x'A(t)x = 1$  являлась бы оболочкой?

Положительный ответ на этот вопрос дает следующее предложение.

**Теорема 12.** Если матрица  $A(t) = [a_{ik}(t)]$ ,  $n$ -го порядка, составлена из непрерывно дифференцируемых функций  $a_{ik}(t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , удовлетворяющих условиям (13.1), и соответствующая ей квадратичная форма  $G(t; x) = x'A(t)x$  существенно-положительна на прямой  $-\infty < t < +\infty$ , то существует бесконечное множество  $L_n^*$  матриц  $L$ , таких и только таких, что система уравнений (8.1) имеет в качестве оболочки поверхность  $G(t; x) = 1$ .

Множество  $L_n^*$  эквивалентно множеству всевозможных упорядоченных групп по  $\frac{n(n-1)}{2}$  непрерывных функций в каждой и содержит по крайней мере одну треугольную матрицу.

**Доказательство.** Для того, чтобы заданная поверхность (16.3) была оболочкой для системы дифференциальных уравнений (8.1), необходимо и достаточно, чтобы элементы  $l_{ik}$  матрицы  $L$  удовлетворяли системе уравнений (15.4). В такой постановке вопроса система уравнений (15.4) представляет собой  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$  алгебраических уравнений относительно  $n^2$  неизвестных величин  $l_{ik}$  и тем самым является неопределенной алгебраической системой.

В соответствии с алгоритмом решения такого рода систем будем считать  $\frac{n(n-1)}{2}$  величин  $l_{ik}$ , у которых первый индекс меньше второго, заданными в виде действительных непрерывных функций  $t$ , определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ . После этого перенесем в уравнениях (15.4) направо все члены, которые не содержат неизвестных; в результате этого система (15.4) примет вид:

$$\Sigma' (a_{sk}l_{sk} + a_{sk}l_{si}) = -\frac{da_{ik}}{dt} - \Sigma'' (a_{si}l_{ik} + a_{sk}l_{si}), \quad (16.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n,$$

где символ  $\Sigma'$  обозначает распространение суммирования на те и только те значения индекса  $s$  из совокупности  $(1, 2, \dots, n)$ , которые больше или равны второму индексу в выражении  $l_{sk}$  или  $l_{si}$ , символ  $\Sigma''$  обозначает распространение суммирования на остальные значения индекса  $s$ .

Если рассматривать систему (16.4) в том порядке, в котором она записана, то она распадается на  $n$  групп уравнений, причем к одной и той же группе относятся те и только те уравнения, в которых символ  $\frac{da_{ik}}{dt}$  имеет один и тот же первый индекс. В каждой из этих групп уравнения располагаются в порядке возрастания вторых индексов, а сами группы — в порядке возрастания первых индексов в символе  $\frac{da_{ik}}{dt}$ . Далее, каждое уравнение системы (16.4) перепишем в определенном порядке следования неизвестных величин  $l_{ik}$ . Для этого разобьем все величины  $l_{ik}$ , входящие в левые части уравнений (16.4), на группы, относя к одной группе те и только те величины  $l_{ik}$ , которые имеют одинаковые вторые индексы. В каждой группе величины  $l_{ik}$  расположим в порядке возрастания первых индексов, а сами группы — в порядке возрастания вторых индексов.

Наконец, рассмотрим детерминант  $D$  системы (16.4). Он будет состоять из  $\nu$  строк и  $\nu$  столбцов. Если назвать полосой совокупность строк, состоящих из коэффициентов уравнений одной и той же группы, то детерминант  $D$  разобьется на  $n$  полос. В интересах вычисления детерминанта  $D$ , изучим структуру  $m$ -той полосы. Для этого разобьем рассматриваемую полосу на три

клетки, относя к первой из них коэффициенты при неизвестных  $l_{ik}$  из первых  $m-1$  групп, ко второй — коэффициенты при неизвестных  $l_{ik}$  из  $m$ -той группы и к третьей — коэффициенты при остальных неизвестных  $l_{ik}$ .

Мы покажем, что первая клетка рассматриваемой полосы либо не содержит ни одного столбца ( $m=1$ ), либо в противном случае состоит сплошь из нулей, а вторая имеет вид:

$$\left. \begin{array}{cccc} 2a_{mm} & 2a_{mm+1} & \dots & 2a_{mn} \\ a_{m+1m} & a_{m+1m+1} & \dots & a_{m+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm} & a_{nm+1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\} \quad (16.5)$$

Действительно, рассмотрим  $m$ -тую группу уравнений (16.4). Согласно определению, ее можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma' 2a_{sm} l_{sm} = -\frac{da_{mm}}{dt} - \Sigma'' 2a_{sm} l_{sm}, \\ \Sigma' (a_{sm+1} l_{sm} + a_{sm} l_{sm+1}) = -\frac{da_{mm+1}}{dt} - \Sigma'' (a_{sm+1} l_{sm} + a_{sm} l_{sm+1}), \\ \dots \\ \Sigma' (a_{sn} l_{sm} + a_{sm} l_{sn}) = -\frac{da_{mn}}{dt} - \Sigma'' (a_{sn} l_{sm} + a_{sm} l_{sn}). \end{array} \right\} \quad (16.6)$$

Из левых частей полученных уравнений вытекает, что они не содержат неизвестных  $l_{ik}$ , относящихся к первым  $m-1$  группам, а это значит, что первая клетка рассматриваемой полосы либо не содержит ни одного столбца ( $m=1$ ), либо в противном случае состоит сплошь из нулей. Далее, если бы мы пожелали записать левые части уравнений (16.6) подробно, то нам пришлось бы, согласно определению символа  $\Sigma'$ , распространить суммирование на все значения индекса  $s$  из совокупности  $(m, m+1, \dots, n)$ . В результате этого мы получили бы таблицу коэффициентов, совпадающую с таблицей (16.5).

После этого при помощи теоремы Лапласа детерминант  $D$ , как легко видеть, может быть представлен в таком виде [1]:

$$D = 2^n \cdot A_n^0 \cdot A_{n-1}^{(1)} \cdot A_{n-2}^{(1,2)} \dots A_1^{(1,2,\dots,n-1)}. \quad (16.7)$$

Отсюда следует, что  $D \neq 0$ . Действительно, так как по предположению квадратичная форма  $G(t; x)$  существенно-положительна на прямой  $-\infty < t < +\infty$ , то, согласно теореме Сильвестра [1], ее дискриминант  $A_n^0$  и все его угловые миноры  $A_{n-1}^{(1)}, A_{n-2}^{(1,2)}, \dots, A_1^{(1,2,\dots,n-1)}$  суть положительные числа.

Таким образом доказана разрешимость системы алгебраических уравнений (16.4) относительно  $\nu$  величин  $l_{ik}$ , у которых первый индекс больше или равен второму. Для того чтобы ее разрешить, в соответствии с правилом Крамера [1], введем в рассмотрение  $\nu$  величин  $D_r$ ,  $r=1, 2, \dots, \nu$ , которые получаются, если в детерминанте  $D$  заменить  $r$ -тый столбец столбцом свободных членов системы (16.4). Кроме того введем функцию

$$\varphi(i, k) = (i-1)n + k - \frac{i(i-1)}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n.$$

При помощи полученных символов решение системы (16.4) можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} l_{ki} = \frac{D_{\varphi(i, k)}}{D}, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad k = i, i+1, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (16.8)$$

Далее, рассмотрим матрицу  $L = [l_{ik}]$ , составленную из  $\frac{n(n-1)}{2}$  непрерывных функций  $l_{ik}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, i+2, \dots, n$ , задаваемых по произволу, и  $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$  непрерывных функций  $l_{ki}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k = i, i+1, \dots, n$ , определяемых после этого по формулам (16.8). Элементы построенной таким образом матрицы  $L$ , как легко видеть, удовлетворяют уравнениям (15.4), и, следовательно, поверхность  $x'A(t)x = 1$  является оболочкой для системы (8.1).

Из построения матрицы  $L$  вытекает, что множество  $M$  всех таких матриц эквивалентно множеству всевозможных упорядоченных групп непрерывных функций по  $\frac{n(n-1)}{2}$  функций в каждой группе.

Ясно, что множество  $M$  содержит треугольную матрицу  $L$ , у которой тождественно равны нулю все элементы, стоящие выше главной диагонали ( $l_{ik} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, i+2, \dots, n$ ).

Из того обстоятельства, что по формулам (16.8) получаются все решения системы (16.4), если только свободные неизвестные  $l_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , пробегают все допустимое множество [1], вытекает следующее равенство

$$L_n^* = M.$$

Теорема доказана.

17. В предшествующем пункте системе дифференциальных уравнений была сопоставлена вполне определенная поверхность  $(n+1)$ -мерного пространства, называемая оболочкой и выражаемая уравнением (16.3), причем элементы  $a_{ik}(t)$  матрицы коэффициентов квадратичной формы  $G(t; x)$  составляют решение системы дифференциальных уравнений (15.4), удовлетворяющее начальным условиям (13.1).

Знание оболочки системы (8.1) дает возможность вычислить точные границы колебания координат решений семейства  $S$  этой системы. Эти границы могут быть записаны в таком виде [18]:

$$|x_i| \leq \left[ \frac{A_{n-1}^{(i)}(t)}{A_n^0(t)} \right]^{\frac{1}{2}} = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.1)$$

Таким образом, системе дифференциальных уравнений (8.1) сопоставляется  $n$  непрерывно дифференцируемых положительных функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и таких, что функция  $x_i(t)$  вместе с функцией  $-x_i(t)$  составляют точные границы колебания  $i$ -той координаты решений семейства  $S$  этой системы.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть дана упорядоченная группа  $n$  положительных непрерывно дифференцируемых функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , каждая из которых задана на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ . Требуется построить систему дифференциальных уравнений (8.1) так, чтобы функции  $x_i(t)$  и  $-x_i(t)$  составляли точные границы колебания  $i$ -той координаты решений семейства  $S$  этой системы.

Решить эту задачу значит построить такую существенно-положительную на прямой  $-\infty < t < +\infty$  квадратичную форму  $G(t; x)$ , матрица  $A(t)$  коэффициентов которой составлена из действительных непрерывно дифференцируемых функций  $t$ , определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ , что при всяком фиксированном значении  $t$  числа  $x_i(t)$  и  $-x_i(t)$  составляют точные границы колебания  $i$ -той координаты точки  $x$ , движущейся по поверхности эллипсоида  $G(t; x) = 1$ .

Действительно, если такая квадратичная форма построена, то, согласно теореме 12, найдется по крайней мере одна матрица  $L(t)$ , составленная из

непрерывных функций  $l_{ik}(t)$ , определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и такая, что поверхность  $G(t; x) = 1$  явится оболочкой для системы уравнений (8.1).

Положительное решение поставленной задачи приводится ниже.

**Теорема 13.** Для всякой упорядоченной группы из  $n$  действительных положительных функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , определенных и непрерывно дифференцируемых на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ , существует бесконечное множество  $A_n^*$  существенно-положительных квадратичных форм  $x'A(t)x$ , коэффициенты которых суть непрерывно дифференцируемые функции  $t$ , определенные на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ , причем выполнены условия

$$\left[ \frac{A_{n-1}^{(i)}(t)}{A_n^0(t)} \right]^{\frac{1}{2}} = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.2)$$

Множество  $A_n^*$  эквивалентно множеству всевозможных упорядоченных групп непрерывно дифференцируемых функций, определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ , по  $\frac{n(n-1)}{2}$  функций в каждой группе.

**Доказательство.** Рассмотрим фиксированное значение  $t$ ; тогда, согласно теореме 6, для положительных чисел  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , найдется бесчисленное множество матриц  $A(t)$  из множества  $P_n$ , удовлетворяющих условиям (17.2), причем диагональные элементы  $a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы  $A(t)$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями остальных элементов  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , и величин  $x_i$ . Если теперь элементы  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , являются непрерывно дифференцируемыми функциями  $t$ , то и элементы  $a_{ii}$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями  $t$ , ибо величины  $x_i$  являются таковыми по условию. Непосредственно из определения множества  $P_n$  вытекает, что квадратичная форма  $x'A(t)x$  существенно-положительна.

Так как величины  $c_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = i+1, \dots, n$ , можно выбрать столькими способами, сколькими способами можно выбрать упорядоченные группы по  $\frac{n(n-1)}{2}$  непрерывно дифференцируемых функций в каждой, то теорема доказана.

Таким образом, мы показали, что для каждой группы из  $n$  действительных положительных функций  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , определенных и непрерывно дифференцируемых на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$ , существует бесконечное множество матриц  $L(t)$ , составленных из непрерывных функций  $l_{ik}(t)$ , определенных на всей прямой  $-\infty < t < +\infty$  и таких, что для каждой из них функции  $x_i(t)$  и  $-x_i(t)$  составляют точные границы колебания  $i$ -той координаты решений семейства  $S$  системы уравнений (8.1).

Покажем, что множество таких матриц  $L(t)$  эквивалентно топологическому произведению множеств  $A_n^*$  и  $L_n^*$ .

Действительно, согласно теореме 13, мы должны для каждой матрицы  $A(t)$  из множества  $A_n^*$  построить всевозможные матрицы  $L(t)$ , а последние, согласно теореме 12, составляют множество  $L_n^*$ .

## § 5. Об устойчивости нулевого решения системы (8.1) по Ляпунову

18. В работе „Общая задача об устойчивости движения“ А. М. Ляпунов, излагая непрямые методы исследования систем дифференциальных уравнений на устойчивость, в теореме 1 и в примечании 2 к этой теореме изложил достаточные условия соответственно устойчивости и асимптотической устой-

чивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных в нормальной форме, правые части которых удовлетворяют определенным условиям.

Опираясь на теорию, изложенную в предшествующих параграфах настоящей работы, мы покажем, что достаточные условия устойчивости, высказанные А. М. Ляпуновым в его первой теореме, в случае линейных систем являются и необходимыми. Кроме того, мы покажем, что достаточные условия асимптотической устойчивости, изложенные А. М. Ляпуновым во втором примечании, в случае линейных систем, в результате незначительного видоизменения, превращаются в необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

С этой целью мы приведем следующие два предложения.

**Теорема 14.** *Чтобы нулевое решение системы уравнений (8.1) было устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная квадратичная форма  $G(t; x)$  с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и такая, что ее производная в силу дифференциальных уравнений (8.1) неположительна\** [18].

**Теорема 15.** *Чтобы нулевое решение системы (8.1) было асимптотически устойчиво по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая положительно определенная квадратичная форма  $G(t; x)$  с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, что сопряженная с ней относительно системы (8.1) квадратичная форма  $g(t; x)$  является существенно-отрицательной на полупрямой  $t_0 \leq t < +\infty$ , причем интеграл*

$$\int_{t_0}^{+\infty} N_G(t) dt$$

расходится [19].

19. В последующих двух пунктах настоящего параграфа рассматривается понятие монотонной устойчивости нулевого решения системы (8.1).

Предположим, что  $R_n$  является общим нормированным пространством, т. е. в  $R_n$  определена неотрицательная функция  $N(x) = \|x\|$ , называемая нормой вектора  $x$  и удовлетворяющая условиям

- 1)  $N(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ,
- 2)  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ ,
- 3)  $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$  для всякого числа  $\lambda$ .

**Определение.** *Мы скажем, что нулевое решение  $x = 0$  системы (8.1) монотонно устойчиво относительно нормы  $N$ , если существует такое число  $T$ , что при любом  $\varepsilon > 0$ , всякая интегральная кривая (8.3), попадающая в сферу  $\|x\| \leq \varepsilon$  в момент времени  $t \geq T$ , не покидает этой сферы в дальнейшем.*

Из определения вытекает, что если нулевое решение  $x = 0$  системы (8.1) монотонно устойчиво относительно нормы  $N$ , то и всякое ее решение (8.3) монотонно устойчиво относительно нормы  $N$ , т. е. для всякой пары векторов  $x'$  и  $x''$  имеет место неравенство

$$\|\varphi(t, t_0; x') - \varphi(t, t_0; x'')\| \leq \|x' - x''\|, \quad (19.1)$$

справедливое при всех  $t \geq t_0$ ,  $t_0 \geq T$ .

Систему (8.1), монотонно устойчивую относительно нормы  $N(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ , будем называть просто монотонно устойчивой.

\* Эта теорема является следствием более общей теоремы, доказанной К. П. Персидским.

Ясно, что система (8.1), монотонно устойчивая относительно нормы  $N$ , и подавно устойчива по Ляпунову.

Непосредственно из определения вытекает следующее очевидное предложение.

**Лемма 4.** *Чтобы нулевое решение системы (8.1) было монотонно устойчивым относительно нормы  $N$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $T$ , что при любых допустимых  $t_0$  и  $x^0$  функция времени  $\|\varphi(t, t_0; x^0)\|$  монотонно не возрастает на полупрямой  $T \leq t < +\infty$ .*

Будем предполагать, что норма  $N(x) = N(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является непрерывно дифференцируемой функцией своих аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и введем в рассмотрение функцию

$$S(t; x) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial N}{\partial x_s} \cdot \sum_{k=1}^n l_{sk} x_k, \quad (19.2)$$

где суммы  $\sum_{k=1}^n l_{sk} x_k$  изображают правые части уравнений (8.1).

Если в выражение  $N(x)$  подставить вместо  $x$  решение (8.3), то получится функция времени и начальных значений

$$\tilde{N}(t, t_0; x^0) = \|\varphi(t, t_0; x^0)\|, \quad (19.3)$$

удовлетворяющая, как это следует из (8.1) и (19.2) дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{N}(t, t_0; x^0)}{dt} = S[t; \varphi(t, t_0; x^0)]. \quad (19.4)$$

**Теорема 16.** *Чтобы нулевое решение системы (8.1) было монотонно устойчивым относительно нормы  $N$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $T$ , что функция  $S(t; x)$  неположительна при всяком фиксированном  $t \geq T$  [8].*

Имеет место предложение, аналогичное лемме 3.

**Лемма 5.** *Вдоль всякой интегральной кривой (8.3),  $x^0 \neq 0$ , имеет место тождество*

$$\tilde{N}(t, t_0; x^0) = \|x^0\| \exp \int_{t_0}^t S[\tau; \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau, \quad (19.5)$$

где  $S(t; x)$  определена соотношением (19.2) и  $\tilde{x}(\tau, t_0; x^0)$  изображает при фиксированном  $\tau$  вполне определенную точку сферы

$$\|x\| = 1 \quad [8]. \quad (19.6)$$

Для монотонно устойчивой системы (8.1) существуют такие величины:

$$\left. \begin{aligned} p &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Min}_{\|x\|=1} R(t; x^0), \\ q &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Max}_{\|x^0\|=1} R(t; x^0), \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

где

$$R(t; x^0) = \int_1^t S[\tau; \tilde{x}(\tau, t_0; x^0)] d\tau, \quad (19.8)$$

удовлетворяющие, как легко установить, неравенствам

$$-\infty \leq p \leq q \leq 0.$$

В этих условиях возможны только такие три различных случая:

- 1)  $q = -\infty$ ;
- 2)  $q > -\infty$ ,  $p = -\infty$ ;
- 3)  $p > -\infty$ .

1) Если  $q = -\infty$ , то все интегральные кривые системы (8.1) являются  $0^+$ -кривыми [12] (асимптотическая устойчивость по Ляпунову [14]).

2) Если  $q > -\infty$ ,  $p = -\infty$ , то семейство интегральных кривых системы (8.1) распадается на два непустых многообразия, одно из которых состоит из  $0^+$ -кривых, а другое — из кривых, отстоящих от точки  $x = 0$  на положительном расстоянии.

3) Если  $p > -\infty$ , то среди интегральных кривых системы (8.1)  $0^+$ -кривых нет [8].

**20.** Дальнейшее рассмотрение будет ограничено более узким выбором норм. Именно, мы рассмотрим положительно определенную квадратичную форму  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$G(x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki} = \text{const.}$$

Замечая, что функция  $\sqrt{G(x)}$  удовлетворяет всем аксиомам нормы, определим в  $R_n$  норму  $N_0$  соотношением

$$N_0(x) = \sqrt{G(x)}. \quad (20.1)$$

Согласно (19.2),

$$S_0(t; x) = \frac{1}{2N_0(x)} g(t; x), \quad (20.2)$$

где положено

$$g(t; x) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_s} \sum_{k=1}^n l_{sk} x_k = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k, \quad (20.3)$$

причем коэффициенты  $b_{ik}$  получаются по формулам (12.4).

Согласно (20.2) функции  $S_0(t; x)$  и  $g(t; x)$  всегда одного знака или одновременно равны нулю, ибо  $N_0(x) > 0$  для всякого  $x \neq 0$ . В этой связи из теоремы 16 вытекает такое предложение.

**Теорема 17.** *Чтобы нулевое решение системы (8.1) было монотонно устойчивым относительно нормы  $N_0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $T$ , что квадратичная форма  $g(t; x)$  неположительна при всяком фиксированном  $t \geq T$  [8].*

Для получения условий монотонной устойчивости системы (8.1) относительно нормы  $N_0$ , формулируемых с помощью коэффициентов системы, обозначим матрицу коэффициентов квадратичной формы  $g(t; x)$  символом  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

Ранг квадратичной формы  $g(t; x)$ , рассматриваемой при фиксированном  $t$ , обозначим через  $r(t)$ . Ясно, что  $r(t)$  является простой целочисленной функцией, значения которой удовлетворяют неравенствам  $0 \leq r(t) \leq n$ .

С помощью этих обозначений и при учете следствия 1 теорема 17 может быть переписана в следующей равносильной ей форме:

**Теорема 18.** *Чтобы нулевое решение системы (8.1) было монотонно устойчивым относительно нормы  $N_0$ , необходимо и достаточно, чтобы*

существовало такое число  $T$ , что для всякого фиксированного  $t \geq T$  найдется такая нумерация переменных квадратичной формы  $g(t; x)$ , при которой имеют место неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^i B_i^{(i+1)} &> 0, \quad i = 1, 2, \dots, r(t), \\ B_i^{(i+1)} &= 0, \quad i = r+1, \dots, n-1, \quad B_n^0 = 0. \end{aligned}$$

Вычисление величин  $p$  и  $q$ , введенных соотношениями (19.7), невозможно без полной интеграции системы (8.1). Однако возможно найти оценки величин  $p$  и  $q$  и на этой основе формулировать эффективные достаточные условия для установления 1) и 3) случаев расположения интегральных кривых в таком виде.

**Теорема 19.** В случае, когда нулевое решение системы (8.1) монотонно устойчиво:

а) если интеграл

$$\int^{+\infty} N_G(t) dt$$

расходится, то все ее интегральные кривые являются  $0^+$ -кривыми;

б) если интеграл

$$\int^{+\infty} n_G(t) dt$$

сходится, то любая ее интегральная кривая отстоит на положительном расстоянии от точки  $x = 0$  [8].

В примере 2 нулевое решение рассматриваемой системы монотонно устойчиво, причем реализуется первый тип расположения интегральных кривых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. М. — Л. 1949.
2. Э. Чезаро. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ОНТИ, 1936.
3. А. И. Мальцев. Основы линейной алгебры. М. — Л. 1948.
4. Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар. Теория матриц и ее приложения, ИЛ, 1950.
5. И. М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М. — Л. 1948.
6. С. С. Банах. Курс функционального анализа. „Радянська школа“, 1948.
7. Ф. Хаусдорф. Теория множеств. М. — Л. 1937.
8. А. Д. Горбунов. Об условиях монотонной устойчивости системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Вестник Московского университета № 3, 1951.
9. А. Д. Горбунов. Об одном методе получения оценок решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Вестник Московского университета № 10, 1950.
10. Б. Л. Ван-Дер-Варден. Современная алгебра, ч. I. М. — Л. 1947.
11. Г. М. Фихтеггольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. Гостехиздат, 1948.
12. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. — Л. 1949.
13. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М. — Л. 1939.
14. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. М. — Л. 1950.
15. Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
16. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М. — Л. 1952.
17. Г. Н. Дубошин. Основы теории устойчивости движения. Издательство Московского университета, 1952.
18. А. Д. Горбунов. О некоторых свойствах решений системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Вестник Московского университета № 6, 1951.
19. А. Д. Горбунов. Об условиях асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений. Вестник Московского университета, № 9, 1953.