V. A. Abrashkin, Group schemes over a discrete valuation ring with small ramification,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 1, 60–95

В. А. Абрашкин

ГРУППОВЫЕ СХЕМЫ НАД КОЛЬЦОМ ДИСКРЕТНОГО НОРМИРОВАНИЯ С МАЛЫМ ВЕТВЛЕНИЕМ

Пусть O кольцо целых элементов локального поля K характеристики 0 с полем вычетов k характеристики $p>0$ и индексом ветвления $e \leqslant p-1$, $\Gamma=\mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$. В работе получена явная конструкция конечных коммутативных групповых схем G над кольцом O, которые аннулируются умножением на p, и получено их описание с помощью обобщенных конечных систем Хонды. Исследуется функтор $G \mapsto G(\bar{K})$ (включая случай $e=p-1$) и получены достаточные (являющиеся также необходимыми при $e=1$) условия, при которых заданный $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модуль реализуется в виде Γ-модуля $\bar{K}$-точек $G(\bar{K})$ групповой схемы G рассматриваемого типа.

Введение

1. Всюду в работе будут использованы следующие обозначения и предположения. K полное относительно дискретного нормирования поле характеристики 0 с совершенным полем вычетов k характеристики $p>0$. Поле K содержит подполе K_0, изоморфное полю частных кольца векторов Витта $O_0=W(k)$ с коэффициентами в поле k. K является конечным вполне разветвленным расширением над K_0, и мы предполагаем, что $e=[K:K_0]\leqslant p-1$. Тогда для кольца целых чисел O поля K мы имеем $O=O_0[\pi]$, где $\pi\in K$ униформизирующий элемент, удовлетворяющий уравнению $\pi^e+p=0$. В случае $e=p-1$ мы будем считать, что поле вычетов k алгебраически замкнуто. Через σ обозначим абсолютный автоморфизм Фробениуса на k, O_0, K_0, а через Γ группу Галуа $\mathrm{Gal}\,(\bar{K}/K)$ алгебраического замыкания $\bar{K}$ поля K.

2. Пусть $\mathfrak{G}_O$ категория конечных коммутативных (плоских) групповых схем над кольцом O, аннулируемых умножением на p. Через $\mathfrak{G}_O^*$ обозначим категорию, объектами которой являются объекты категории $\mathfrak{G}_O$, а для любых $G_1, G_2\in\mathfrak{G}_O^*$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_O^*}(G_1, G_2)=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_O}(G_1, G_2)/R,$$

где $R=R(G_1, G_2)$ состоит из морфизмов групповых схем следующего вида $G_1\to G_1^{\mathrm{et}}\to G_2^m\to G_2$. Здесь крайние морфизмы являются соответственно проекцией на наибольший этальный фактор и вложением наибольшего мультипликативного подобъекта, а средний является произвольным морфизмом групповых схем. Композиция морфизмов в категории $\mathfrak{G}_O^*$ индуцирована композицией морфизмов в категории $\mathfrak{G}_O$. Отметим, что при $e<p-1$ $\mathfrak{G}_O^*=\mathfrak{G}_O$. Аналогично полные подкатегории в $\mathfrak{G}_O$ и $\mathfrak{G}_O^*$, состоящие из связных (соответственно унипотентных) объектов, отождествляются. Следовательно, введение категории $\mathfrak{G}_O^*$ имеет смысл лишь при $e=p-1$ и включении в рассмотрение всех объектов категории $\mathfrak{G}_O$.

3. Теория Фонтэна [7] в применении к объектам, аннулируемым умножением на p, дает антиэквивалентность категории $\mathfrak{G}_O$ и категории конечных си-

Ключевые слова: групповые схемы, системы Хонды, кольцо целых элементов локального поля.

стем Хонды $\mathscr{H}_k$ в случае $e=1$, $p>2$, а в случае $e=1$, $p=2$ эта антиэквивалентность имеет место при ограничении на подкатегории унипотентных объектов этих категорий. В [1] автором была построена антиэквивалентность категорий $\mathfrak{G}_O^*$ и $\mathscr{H}_k$ в случае $e=1$ без ограничения, связанного с унипотентностью соответствующих объектов при $p=2$. Эта антиэквивалентность совпадает с антиэквивалентностью Фонтэна в случае $p>2$. В настоящей работе эта конструкция обобщается на случай категории $\mathfrak{G}_O^*$, где кольцо O удовлетворяет ограничениям из п. 1. При этом оказывается, что $\mathfrak{G}_O^*$ антиэквивалентна абелевой категории обобщенных систем Хонды SH_O, которая строится в § 1. В § 2 мы строим функтор $\mathrm{SH}^*\colon \mathfrak{G}_O^* \to \mathrm{SH}_O$, а в § 3 строится квазиобратный к SH^* функтор $\mathfrak{G}^*: \mathrm{SH}_O \to \mathfrak{G}_O^*$. Отметим, что исключение из рассмотрения случая $e=p-1$ или ограничение полными подкатегориями связных или унипотентных объектов категории $\mathfrak{G}_O$ позволило бы существенно упростить многие доказательства.

4. В § 4 исследуется функтор из категории $\mathfrak{G}_O$ в категорию МГ конечных $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модулей, ставящий в соответствие групповой схеме G Г-модуль ее $\bar{K}$-точек $G(\bar{K})$. Как было показано Рейно в [12], функтор $G \mapsto G(\bar{K})$ является вполне строгим при $e<p-1$. Мы показываем, что этот результат остается справедливым в случае $e=p-1$, если категорию $M\Gamma$ заменить на категорию кофильтрованных модулей Галуа. Другой вариант: если мы рассмотрим полную подкатегорию $\mathfrak{G}_O^+$ (соответственно $\mathfrak{G}_O^-$) в $\mathfrak{G}_O$, состоящую из максимальных (соответственно минимальных) объектов в смысле Рейно ([12], п. 2.2), то функтор $G \mapsto G(\bar{K})$ при ограничении на категории $\mathfrak{G}_O^+$ и $\mathfrak{G}_O^-$ является вполне строгим.

5. В § 5 мы формулируем некоторые результаты об описании модулярных кристаллических представлений группы Галуа Г и применяем их для получения достаточных (являющихся в случае $e=1$ также необходимыми) условий представимости $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модулей в виде $G(\bar{K})$, где $G\in\mathfrak{G}_O$. Эти условия обобщают условия, полученные автором в [2] для случая $e=1$, $p\geqslant 3$. Например, если $e<(p-1)/2$, то всякий конечный $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модуль, удовлетворяющий гипотезе Серра о действии группы слабого ветвления и имеющий верхние числа ветвления $v\leqslant e/(p-1)$, реализуется, как Г-модуль $G(\bar{K})$ для некоторой $G\in\mathfrak{G}_O$.

В заключение отметим, что основная часть этих результатов была анонсирована автором в работе [3]. Кроме того, здесь используется более естественная категория обобщенных систем Хонды SH_O по сравнению с категорией $\mathscr{H}_O$ из [3] (см. также замечание из п. 7.10 § 3).

§ 1. Предварительные сведения

1. Ковекторы.

1.1. Для целого $m\geqslant 0$ обозначим через $\varphi_m\in\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_m]$ полиномы, определяющие сложение векторов Витта. Они определяются индуктивно с помощью равенств

$$\varphi_m+\frac{1}{p}\varphi_{m-1}^p+\ldots+\frac{1}{p^m}\varphi_0^{p^m}=\left(X_m+\frac{1}{p}X_{m-1}^p+\ldots+\frac{1}{p^m}X_0^{p^m}\right)+$$
$$+\left(Y_m+\frac{1}{p}Y_{m-1}^p+\ldots+\frac{1}{p^m}Y_0^{p^m}\right).$$

Для каждого $m\geqslant 0$

$$\varphi_m=X_m+Y_m+P_m(X_0, \ldots, X_{m-1}, Y_0, \ldots, Y_{m-1})$$

и, если положить $\deg X_i=\deg Y_i=p^i$ при $0\leqslant i\leqslant m$, то $\deg\varphi_m=p^m$ (см. п. 1, ч. III, [11]).

1.2. Для всякой конечной k-алгебры A_k с радикалом A_k^0 положим

$$CW_k(A_k)=\{\bar{f}=(f_{-n})_{n\geqslant 0}\mid f_{-n}\in A_k$$

и для почти всех n $f_{-n}\in A_k^0\}$.

Этот функтор является групповым относительно операции

$$(f_{-n})_{n\geqslant 0}+(g_{-n})_{n\geqslant 0}=(h_{-n})_{n\geqslant 0},$$

где

$$h_{-n}=\lim_{m\to\infty}\varphi_m(f_{-n},\ldots,f_{-n-m};\ g_{-n},\ldots,g_{-n-m})$$

(см. [8]).

1.3. Напомним, что кольцо Дьедонне $D_k=O_0[F,\ V]$ с соотношениями

$$FV=VF=p,\quad \sigma(\alpha)F=F(\alpha),\quad \alpha V=V\sigma(\alpha)$$

для любого $\alpha\in O_0$. Структура D_k-модуля на CW_k определяется соотношениями

$$F:(f_{-n})_{n\geqslant 0}\mapsto(f_{-n}^p)_{n\geqslant 0},\qquad V:(f_{-n})_{n\geqslant 0}\mapsto(f_{-n-1})_{n\geqslant 0},$$

$$[\alpha]\cdot(f_{-n})_{n\geqslant 0}=((\sigma^{-n}(\alpha))f_{-n})_{n\geqslant 0},$$

где

$$\alpha\in k,\quad [\alpha]=(\alpha,\ 0,\ \ldots)\in W(k)=O_0.$$

2. Категории $\mathfrak{G}_k$, $\mathfrak{m}_k$.

2.1. Пусть $\mathfrak{G}_k$ — категория конечных коммутативных групповых схем над k, аннулируемых умножением на p, $\mathfrak{m}_k$ — категория левых D_k-модулей, имеющих конечную длину над O_0 и аннулируемых умножением на p. Из теории Дьедонне [6] имеем антиэквивалентность $\mathfrak{m}:\mathfrak{G}_k\to\mathfrak{m}_k$, которая строится следующим образом: если $G_k=\operatorname{Spec}A_k\in\mathfrak{G}_k$, $\Delta:A_k\to A_k\otimes A_k$ косложение, то $\mathfrak{m}(G_k)=\{\bar{f}\in CW_k(A_k)\mid\Delta\bar{f}=\bar{f}\otimes 1+1\otimes\bar{f}\}=\operatorname{Hom}(G_k,\ CW_k)$ (здесь $\Delta\bar{f}=(\Delta f_{-n})_{n\geqslant 0}$, $\bar{f}\otimes 1=(f_{-n}\otimes 1)_{n\geqslant 0}$, $1\otimes\bar{f}=(1\otimes f_{-n})_{n\geqslant 0}$, если $\bar{f}=(f_{-n})_{n\geqslant 0}$). Структура D_k-модуля на $\mathfrak{m}(G_k)$ определяется соответствующей структурой D_k-модуля на CW_k. Если F_{G_k} и V_{G_k} соответственно морфизм Фробениуса и «Verschiebung» групповой схемы G, то $\mathfrak{m}(F_{G_k})=F$ и $\mathfrak{m}(V_{G_k})=V$. Для $m=(f_{-n})_{n\geqslant 0}\in\mathfrak{m}(G_k)$ это означает, в частности, что

$$Vm=(V_{G_k}(f_{-n}))_{n\geqslant 0},\ \text{т. е.}\ f_{-n-1}=V_{G_k}(f_{-n})$$

для всех $n\geqslant 0$.

2.2. В соответствии с условиями обратимости и нильпотентности σ-линейного морфизма F на объектах категории $\mathfrak{m}_k$ определяются ее полные подкатегории этальных $\mathfrak{m}_k^{\mathrm{et}}$ и соответственно связных $\mathfrak{m}_k^c$ объектов и имеется отождествление $\mathfrak{m}_k=\mathfrak{m}_k^{\mathrm{et}}\oplus\mathfrak{m}_k^c$. Аналогично требования обратимости и нильпотентности σ^{-1}-линейного морфизма V выделяют в $\mathfrak{m}_k$ полные подкатегории мультипликативных $\mathfrak{m}_k^m$ и унипотентных $\mathfrak{m}_k^u$ объектов и имеется разложение $\mathfrak{m}_k=\mathfrak{m}_k^m\oplus\mathfrak{m}_k^u$. Теперь антиэквивалентность $\mathfrak{m}$ из п. 2.1 позволяет перенести эти определения на категорию $\mathfrak{G}_k$ и определить соответствующие полные подкатегории $\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}$, $\mathfrak{G}_k^c$, $\mathfrak{G}_k^m$, $\mathfrak{G}_k^u$.

3. Категории $\mathfrak{G}_O$, $\mathfrak{G}_O^*$.

3.1. Обозначим через $\mathfrak{G}_O$ категорию конечных коммутативных (плоских) групповых схем над O, аннулируемых умножением на p. Если $G\in\mathfrak{G}_O$, то соответствие $G\mapsto G\otimes k$ определяет функтор red: $\mathfrak{G}_O\to\mathfrak{G}_k$ и в соответствии с типом соответствующего объекта $\operatorname{red}(G)$ определим полные подкатегории этальных $\mathfrak{G}_O^{\mathrm{et}}$, связных $\mathfrak{G}_O^c$, мультипликативных $\mathfrak{G}_O^m$ и унипотентных $\mathfrak{G}_O^u$ объектов категории $\mathfrak{G}_O$.

3.2. Любой объект G категории $\mathfrak{G}_0$ имеет наибольшие связный подобъект G^c и этальный факторобъект G^{et}, функторы $G \mapsto G^c$ и $G \mapsto G^{\mathrm{et}}$ являются точными и в $\mathfrak{G}_0$ имеем каноническую точную последовательность $0 \to G^c \to G \to G^{\mathrm{et}} \to 0$. Аналогично G имеет наибольшие мультипликативный подобъект G^m и унипотентный факторобъект G^u, функторы $G \mapsto G^m$ и $G \mapsto G^u$ точные и в G_0 имеется каноническая точная последовательность $0 \to G^m \to G \to G^u \to 0$.

3.3. Категория $\mathfrak{G}_0^*$ состоит из тех же объектов, что и категория $\mathfrak{G}_0$, множеством морфизмов любых ее объектов G_1, G_2 являются классы эквивалентности $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1, G_2)/R(G_1, G_2)$, где $R(G_1, G_2)$ подгруппа морфизмов в категории $\mathfrak{G}_0$ вида $G_1 \to G_1^{\mathrm{et}} \to G_2^m \to G_2$, где крайние морфизмы это соответственно проекция на наибольший этальный фактор и вложение наибольшего мультипликативного подобъекта, а средний является произвольным морфизмом в категории $\mathfrak{G}_0$. Из 3.2 вытекает, что категории $\mathfrak{G}_0^c$ и $\mathfrak{G}_0^u$ (а следовательно, $\mathfrak{G}_0^m$ и $\mathfrak{G}_0^{\mathrm{et}}$) отождествляются с полными подкатегориями в $\mathfrak{G}_0^*$. Кроме того, в случае $e < p-1$ $\mathfrak{G}_0^* = \mathfrak{G}_0$, так как здесь $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1^{\mathrm{et}}, G_2^m) = 0$.

4. Когомологии Хохшильда этальных групповых схем (здесь $k = \bar{k}$).

4.1. Всякая аннулируемая умножением на p этальная групповая схема G над k задается k-алгеброй $k(G) = k[\bar{z}]$ (где $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\bar{z}^p = \bar{z}$), косложением Δ и коединицей e, причем $\Delta(\bar{z}) = \bar{z} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{z}$ и $e(\bar{z}) = 0$. Ядро коединичного морфизма $e: k(G) \to k$ обозначим через $k^0(G)$.

4.2. k-модуль 2-коциклов $Z^2(G)$ групповой схемы G из п. 4.1 состоит из $f \in k^0(G) \otimes k^0(G)$, удовлетворяющих соотношению

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) f + f \otimes 1 = 1 \otimes f + (\mathrm{id} \otimes \Delta) f$$

и симметричных относительно перестановки сомножителей в произведении $k^0(G) \otimes k^0(G)$. k-модуль 2-кограниц $B^2(G)$ состоит из 2-коциклов вида $\Delta\varphi - \varphi \otimes 1 - 1 \otimes \varphi$, где $\varphi \in k^0(G)$. Фактор $H^2(G) = Z^2(G)/B^2(G)$ называется 2-й группой когомологий Хохшильда групповой схемы G. k-базис $H^2(G)$ состоит из коциклов вида $\psi_1(z_i \otimes 1, 1 \otimes z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\psi_1(X, Y) = \frac{1}{p}(X^p + Y^p - (X+Y)^p) \in \mathbb{Z}[X, Y]$.

4.3. На k-модулях $Z^2(G)$, $B^2(G)$, $H^2(G)$ имеется биективное σ-линейное действие морфизма Фробениуса, индуцированное соотношением $z_i \mapsto z_i^p$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Легко проверить, что элементы вида $\delta^+(z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n})$, где $\delta^+ = \Delta - \mathrm{id} \otimes 1 - 1 \otimes \mathrm{id}$, $0 \leqslant k_1, \ldots, k_n < p$, $k_1 + \ldots + k_n \geqslant 2$, образуют базис k-модуля $B^2(G)$. Следовательно, можно определить k-линейное вложение $s: B^2(G) \to k^0(G)$, положив в вышеприведенных обозначениях $s(\delta^+(z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n})) = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$. Очевидно, морфизм s перестановочен с действием морфизма Фробениуса.

4.4. Морфизмы коумножения на целое m $[m]: k^0(G) \to k^0(G)$ определяют действие мультипликативной группы $\mathbb{F}_p^*$ на k-модуле $k^0(G)$, относительно которого $k^0(G) = \oplus_\chi A_\chi$, где χ пробегает множество характеров $\chi: \mathbb{F}_p^* \to k^*$ и $A_\chi = \{a \in k^0(G) \mid [m] a = \chi(m) a\}$. Пусть χ_0 тривиальный характер (т. е. $\chi_0 \equiv 1$), pr_{χ_0} проекция $k^0(G) \to A_{\chi_0}$. Рассмотрим k-линейный морфизм

$$\mathrm{inv}: k^0(G) \otimes k^0(G) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{\chi_0} \otimes \mathrm{id}} A_{\chi_0} \otimes k^0(G) \xrightarrow{\mathrm{mult}} k^0(G),$$

где mult отображение, индуцированное морфизмом умножения в k-алгебре $k(G)$.

Утверждение. inv *индуцирует изоморфизм* $H^2(G) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} k z_i$.

Доказательство. Прежде всего на $k^0(G)$ имеем

$(\Delta - \mathrm{id} \otimes 1 - 1 \otimes \mathrm{id}) \cdot (\mathrm{pr}_{\chi_0} \otimes \mathrm{id}) \cdot \mathrm{mult} = \Delta \cdot (\mathrm{pr}_{\chi_0} \otimes \mathrm{id}) \cdot \mathrm{mult} - \mathrm{pr}_{\chi_0} =$

$$=\frac{1}{p-1}\sum_{m\in\mathbf{F}_p}\Delta\cdot([m]\otimes\mathrm{id})\cdot\mathrm{mult}-\mathrm{pr}_{\chi_0}=\frac{1}{p-1}\sum_{m\in\mathbf{F}_p}[m+1]-\mathrm{pr}_{\chi_0}=0,$$

следовательно, $\mathrm{inv}(B^2(G))=0$. Но $\mathrm{inv}(\psi_1(z_i\otimes 1,\ 1\otimes z_i))=-\mathrm{mult}(z_i^{p-1}\otimes z_i)=-z_i^p=-z_i$ для $1\leqslant i\leqslant n$ и, согласно п. 4. 2, утверждение доказано.

5. Категория обобщенных систем Хонды SH_O.

5. 1. Объектами категории SH_O являются наборы $\mathcal{M}=(M,\ M^0,\ M^1,\ \varphi,\ \psi)$, где

а) M аннулируемый умножением на p O-модуль конечной длины;

б) $M^0=\{m\in M\mid \pi m=0\}=\mathrm{Ker}\,\pi|_M$;

в) $\varphi: M^0\to M$ — σ-линейный морфизм k-модулей (структура k-модуля на M^0 и M индуцирована вложением $k=O_0/pO_0\subset O/pO$);

г) $M^1=\{m\in M^0\mid\varphi(m)\in\pi M\}$;

д) $\psi: M^1\to M$ — σ-линейный морфизм k-модулей такой, что $\pi\psi(m)=\varphi(m)$ для любого $m\in M^1$.

При этом должно быть выполнено следующее свойство:

е) $\mathrm{Im}\,\varphi$ и $\mathrm{Im}\,\psi$ порождают O-модуль M, т. е. $M=\varphi(M^0)O+\psi(M^1)O$.

Замечания. а) Ввиду д) свойство е) эквивалентно равенству $M=\varphi(M^0)O+\psi(M^1)$; б) Мы будем использовать обозначение $\mathrm{rk}\,\mathcal{M}=\dim_k M^0$.

5. 2. Если $\mathcal{N}=(N,\ N^0,\ N^1,\ \varphi,\ \psi)$ другой объект из SH_O, то всякий морфизм из $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_O}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ задается O-линейным морфизмом $f: M\to N$ таким, что $(f|_{M^0})\cdot\varphi=\varphi\cdot f$ и $(f|_{M^1})\cdot\psi=\psi\cdot f$.

Замечание. В случае $e=1$, т. е. $O=O_0$, категория SH_O совпадает с категорией $\mathcal{H}_k$ конечных систем Хонды из [1].

5. 3. Пусть $F\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_O}(\mathcal{M},\ \mathcal{N})$ задается O-линейным морфизмом $f: M\to N$ из п. 2. Легко проверить, что F инъективен $\Leftrightarrow f$ инъективен $\Leftrightarrow f|_{M^0}$ инъективен. Аналогично F сюръективен $\Leftrightarrow f$ сюръективен $\Leftrightarrow f|_{M^0}$ сюръективен. Далее, SH_O — абелева категория. В частности, для морфизма F из п. 2 имеем:

$$\mathrm{Ker}\,F=(M_1,\ M_1^0,\ M_1^1,\ \varphi,\ \psi),$$

где

$$M_1^0=\mathrm{Ker}(f|_{M^0}),\quad M_1^1=\{m\in M_1^0\mid\varphi(m)\in\pi\varphi(M_1^0)O\},\quad M_1=\varphi(M_1^0)O+\psi(M_1^1),$$

а морфизмы φ и ψ индуцированы вложениями $M_1^0\subset M^0$, $M_1^1\subset M^1$. Соответственно $\mathrm{Im}\,F=(N_1,\ N_1^0,\ N_1^1,\ \varphi,\ \psi)$, где $N_1=f(M)$, $N_1^0=f(M^0)$, $N_1^1=f(M^1)$, с индуцированными морфизмами φ и ψ.

5. 4. Предложение. *Пусть* $\mathcal{M}=(M,\ M^0,\ M^1,\ \varphi,\ \psi)\in\mathrm{SH}_O$, *тогда имеем равенство k-модулей* $M=\varphi(M^0)O\oplus\psi(M^1)$.

Доказательство. Пусть $\bar\varphi: M^0\to M/\pi M$, $\bar\psi: M^1\to M/\pi M$ — σ-линейные морфизмы k-модулей, полученные композицией исходных морфизмов φ и ψ с проекцией $M\to M/\pi M$. Тогда имеем точные последовательности k-модулей

$$0\to M^1\to M^0\to\mathrm{Im}\ \bar\varphi\to 0,$$

$$0\to\mathrm{Im}\,\bar\varphi\to M/\pi M\to\mathrm{Im}\,\bar\psi/\mathrm{Im}\,\bar\psi\cap\mathrm{Im}\ \bar\varphi\to 0.$$

Из равенства $\dim_k M/\pi M=\dim_k M^0$ теперь получаем, что $\dim_k M^1=\dim_k\times(\mathrm{Im}\,\bar\psi/\mathrm{Im}\,\bar\psi\cap\mathrm{Im}\,\bar\varphi)$, следовательно, $\bar\psi$ инъективен и $\mathrm{Im}\,\bar\psi\cap\mathrm{Im}\,\bar\varphi=0$. Это означает, что $\varphi(M^0)O\cap\psi(M^1)=0$ и $M=\varphi(M^0)O\oplus\psi(M^1)$.

Следствие. $M=\varphi(M^0)O+M^0$.

Доказательство. Пусть $m\in M$, тогда существуют (однозначно определенные) $n\in\varphi(M^0)O$ и $m_1\in M^1$ такие, что $m=n+\psi(m_1)$. Далее, $\pi\psi(m_1)=\varphi(m_1)\in\pi\varphi(M^0)O$, следовательно, существует $n_1\in\varphi(M^0)O$ такой, что $\pi\psi(m_1)=$

$=\pi n_1$. Это означает, что $m=(n+n_1)+(\psi(m_1)-n_1)$, где $n+n_1\in\varphi(M^0)O$, а $\psi(m_1)-n_1\in \operatorname{Ker}\pi|_M=M^0$.

5.5. Предложение. *Существует строгий функтор* $\mathcal{S}\mathrm{m}:\mathrm{SH}_O\to\mathfrak{m}_k$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}=(M, M^0, M^1, \varphi, \psi)\in \mathrm{SH}_O$. Положим $\mathcal{S}\mathrm{m}(\mathcal{M})=M^0$, где структура O_0-модуля на M^0 определена с помощью проекции $O_0\to O_0/pO_0=k$ и структуры k-модуля на M^0 (см. п. 5.1, в)). Для любого $m\in M^0$ равенство $F(m)=-\frac{p}{\pi}\varphi(m)$ определяет σ-линейный морфизм $F:M^0\to M^0$. Далее, для любого $m\in M^0$ однозначно определен элемент $m_1\in M^1$ такой, что $m-\psi(m_1)\in\in\varphi(M^0)O$ (см. п. 5.4), следовательно, соответствие $m\mapsto m_1$ определяет σ^{-1}-линейный морфизм $V:M^0\to M^0$. Легко видеть, что $FV=VF=0$, т. е. $\mathcal{S}\mathrm{m}(\mathcal{M})$ является объектом категории $\mathfrak{m}_k$. Функториальность отображения $\mathcal{M}\mapsto\mathcal{S}\mathrm{m}(\mathcal{M})$ и строгость полученного функтора очевидны.

Замечание. Из следствия п. 5.4 вытекает, что $\operatorname{Im} V=M^1$.

5.6. Определим полные подкатегории связных SH_O^c, этальных SH_O^{et}, унипотентных SH_O^u и мультипликативных SH_O^m объектов $\mathcal{M}$ категории обобщенных систем Хонды SH_O в соответствии с типом соответствующего объекта $\mathcal{S}\mathrm{m}(\mathcal{M})$ категории $\mathfrak{m}_k$ (см. п. 2.2). Тогда всякий объект $\mathcal{M}$ категории SH_O имеет наибольшие этальный $\mathcal{M}^{et}$ и унипотентный $\mathcal{M}^u$ подобъекты, наибольшие связный $\mathcal{M}^c$ и мультипликативный $\mathcal{M}^m$ факторобъекты и в SH_O имеем канонические точные последовательности

$$0\to\mathcal{M}^{et}\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}^c\to 0,$$
$$0\to\mathcal{M}^u\to\mathcal{M}\to\mathcal{M}^m\to 0.$$

5.7. Следующие свойства объектов $\mathcal{M}=(M, M^0, M^1, \varphi, \psi)$ категории SH_O понадобятся нам в § 3.

5.7.1. Предложение. *Пусть* $\{m_1,\ldots,m_{n'}\}$ — *k-базис в* M^1, $\{m_{n'+1},\ldots,m_n\}$ — *его дополнение до k-базиса в* M^0, *тогда* $\{\psi(m_1),\ldots,\psi(m_{n'}), \varphi(m_{n'+1}),\ldots,\varphi(m_n)\}$ ***является минимальной системой образующих*** O-*модуля* M (*т. е.* ***при редукции*** $\operatorname{mod}\pi M$ *они дают k-базис в* $M/\pi M$).

Доказательство. По определению (см. п. 5.1, е) $\{\psi(m_1),\ldots,\psi(m_{n'}), \varphi(m_{n'+1}),\ldots,\varphi(m_n)\}$ является системой образующих O-модуля M; но $n=\dim_k M^0=\dim_k M/\pi M$, следовательно, это минимальная система образующих.

5.7.2. Предложение. *Пусть* $\{m_1,\ldots,m_n\}$ — *k-базис в* M^0, $\{m_1',\ldots,m_n'\}$ — *минимальная система образующих O-модуля M. Тогда в кольце O-матриц порядка n существует C, делящая $(p/\pi)E$* (E единичная матрица порядка n), *для которой выполнено равенство* $(m_1,\ldots,m_n)=(m_1',\ldots,m_n')C$.

Доказательство. Это утверждение инвариантно относительно замены базиса в M^0 и минимальной системы образующих в M. Согласно классификации модулей над кольцом главных идеалов, существуют базис $\tilde m_1,\ldots,\tilde m_n$ в M^0 и минимальная система образующих $\tilde m_1',\ldots,\tilde m_n'$ в M такие, что для некоторых $\alpha_i\in O$, $1\leqslant i\leqslant n$, выполнено $\tilde m_i=\alpha_i\tilde m_i'$. Так как $pM=0$ и $M^0=\operatorname{Ker}\pi|_M$, для всех i $\alpha_i\,|\,(p/\pi)$ и, следовательно, $C=((\alpha_i\delta_{ij}))_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}$ делит $(p/\pi)E$.

6. Идеалы $J(A)$, $J'(A)$.

6.1. Пусть A коммутативная O-алгебра без кручения конечного ранга над O. Обозначим через $J'(A)$ наибольший идеал в A, имеющий структуру нильпотентных разделенных степеней (см., например, [5]). Это требование эквивалентно тому, что элемент $a\in A$ лежит в $J'(A)$ тогда и только тогда, когда все члены последовательности $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, где $a_0=a$, $a_{n+1}=-\frac{1}{p}a_n^p$ при $n\geqslant 0$, лежат в A и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Если A^{et} наибольшая этальная O-подалгебра в A, то положим $J(A)=J'(A)+\pi A^{et}$.

6.2. Имеем следующие свойства:

а) $J(A)$ *идеал в* A;

б) *при* $e \neq p-1$ $J'(A) = J(A)$;

в) $\pi A \subset J(A)$ *и для любого* $a \in J(A)$ $-\frac{1}{p} a^p \in J(A)$;

г) *если* $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ *последовательность элементов из* $J(A)$ *таких, что* $a_{n+1} = -\frac{1}{p} a_n^p$, $n \geqslant 0$, *то все ее предельные точки лежат в* πA^{et};

д) *пусть* $a_i \in A$ *таковы, что* $a_i^p \in \pi A$, $1 \leqslant i \leqslant p$, *тогда* $a_1 \ldots a_p \in J(A)$;

е) *пусть* A^c *идеал в* A, *состоящий из топологически нильпотентных элементов* (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{p^n} = 0$), *тогда* $\pi A^c \subset J'(A)$.

6.3. Рассмотрим вложенные O-модули $A \bmod J(A) \subset \left(\frac{\pi}{p} O \otimes_O A\right) \bmod J(A)$. Из свойства 6.2, в) вытекает, что эти модули аннулируются умножением на p, следовательно, вложение $k = O_0/pO_0 \subset O/pO$ определяет на них структуру k-модулей. Пусть $[A \bmod J(A)]'$ — k-подмодуль в $A \bmod J(A)$, состоящий из $a = \hat{a} \bmod J(A)$ таких, что $a^p \in \pi A$. Легко проверяется следующее предложение.

Предложение.

1) *Соответствие* $a \mapsto \left(-\frac{\pi}{p} \hat{a}^p\right) \bmod J(A)$, *где* $a = \hat{a} \bmod J(A)$, $\hat{a} \in A$, *корректно определяет* σ-*линейный морфизм* $\varphi_A : A \bmod J(A) \to \left(\frac{\pi}{p} O \otimes_O A\right) \bmod J(A)$ *функториально зависящий от* O-*алгебры* A.

2) *Соответствие* $a \mapsto \left(-\frac{1}{p} \hat{a}^p\right) \bmod J(A)$ *корректно определяет* σ-*линейный морфизм* $\psi_A : [A \bmod J(A)]' \to \left(\frac{\pi}{p} O \otimes_O A\right) \bmod J(A)$, *функториально зависящий от* O-*алгебры* A.

§ 2. Функтор SH * : $\mathfrak{G}_O^* \to \mathrm{SH}_O$

1. Для любого объекта G категории $\mathfrak{G}^*$ условимся обозначать через $A(G)$ O-алгебру групповой схемы G, $\Delta : A(G) \to A(G) \otimes A(G)$ косложение, $J(G) = J(A(G))$ идеал из п. 6.1 § 1, $G_k = G \otimes k$, $A(G_k) = A(G) \otimes k$. Тем же символом Δ мы обозначим косложение для $A(G_k)$ и $A(G) \otimes K$.

Пусть $\mathfrak{m}(G_k)$ модуль Дьедонне групповой схемы G_k (см. п. 2.1, § 1). Рассмотрим отображение $i : \mathfrak{m}(G_k) \to A(G)/J(G)$, определенное следующим образом: если $m = (f_{-n})_{n\geqslant 0} \in \mathfrak{m}(G_k)$, то $i(m) = \hat{f}_0 \bmod J(G)$, где $\hat{f}_0 \in A(G)$ таков, что $\hat{f}_0 \bmod \pi = f_0$.

1.1. *i является морфизмом O_0-модулей.*

Доказательство: Пусть $m_1 = (f_{-n})_{n\geqslant 0}$, $m_2 = (g_{-n})_{n\geqslant 0}$ элементы $\mathfrak{m}(G_k)$. Тогда $f_{-n}^p = g_{-n}^p = 0$ при $n \geqslant 1$. Это вытекает из равенства $0 = pm_1 = FV(f_{-n})_{n\geqslant 0} = (f_{-n-1}^p)_{n\geqslant 0}$ и аналогичного равенства для m_2. Далее, пусть $m_1 + m_2 = (h_{-n})_{n\geqslant 0}$. Согласно п. 1.1 и 1.2 § 1, $h_0 = f_0 + g_0 + P(f_{-1}, f_{-2}, \ldots; g_{-1}, g_{-2}, \ldots)$ и ряд P состоит из мономов степени $\geqslant p$, откуда по свойству 6.1, д) для подъемов $\hat{f}_{-n}$, $\hat{g}_{-n}$ в $A(G)$ элементов f_{-n}, g_{-n} имеем $P(\hat{f}_{-1}, \hat{f}_{-2}, \ldots; \hat{g}_{-1}, \hat{g}_{-2}, \ldots) \in J(G)$, т. е. $\hat{h}_0 \equiv \hat{f}_0 + \hat{g}_0 \bmod J(G)$. Аналогично проверяется соотношение $[\alpha] \cdot i = i \cdot [\alpha]$, где $[\alpha] \in O_0 \subset O$ — представитель Тейхмюллера произвольного элемента $\alpha \in k$.

1.2. *Для любого* $m \in \mathfrak{m}(G_k)$ $\Delta(i(m)) = i(m) \otimes 1 + 1 \otimes i(m)$.

Это соотношение записано в предположении, что индуцированные морфизмами O-алгебр Δ, $\mathrm{id} \otimes 1$, $1 \otimes \mathrm{id} : A(G) \to A(G) \otimes A(G)$ отображения $A(G)/J(G) \to A(G) \otimes A(G)/J(G \otimes G)$ обозначены теми же символами. Для его проверки мы должны показать, что если $i(m)=\hat f_0 \bmod J(G)$, то $\Delta\hat f_0 \equiv \hat f_0\otimes 1+1\otimes \hat f_0 \times$ $\times \bmod J(G\times G)$. Но

$$\Delta\hat f_0 \bmod J(G\times G)=i\left((\Delta f_{-n})_{n\geqslant 0}\right)=i\left((f_{-n}\otimes 1)_{n\geqslant 0}\right)+i\left((1\otimes f_{-n})_{n\geqslant 0}\right)=$$
$$=\hat f_0\otimes 1+1\otimes\hat f_0 \bmod J(G\times G),$$

согласно п. 1.1.

1.3. Лемма. *Пусть* $(f_{-n})_{n\geqslant 0}\in \mathfrak{m}(G_k)$ *и существует* $\hat f_1\in A(G)$ *такой, что* $\delta^+(\hat f_1) \bmod \pi=\delta^+\left(-\frac{1}{p}\hat f_0^p \bmod \pi\right)$, *где* $\delta^+=\Delta-\mathrm{id}\otimes 1-1\otimes \mathrm{id}$. *Тогда* $(\ldots, f_{-n},\ldots, f_0, \hat f_1 \bmod \pi)\in \mathfrak{m}(G_k)$.

Доказательство. Мы будем использовать ковекторы с коэффициентами в O-алгебрах $A(G)$ (см. [8]). Рассмотрим $\hat m=(\ldots,\hat f_{-1},\hat f_0,\hat f_1)\in CW(A(G))$, где $\hat f_{-i} \bmod \pi=f_{-i}$, $i\geqslant 0$, и $\hat f_1\in A(G)$ элемент из условия леммы. Положим $\hat m\otimes 1+1\otimes\hat m=(s_{-n})_{n\geqslant 0}$, где все $s_{-n}\in A(G)\otimes A(G)$. Тогда при всех $n\geqslant 0$ имеем $\Delta\hat f_{-n}\equiv s_{-n-1} \bmod \pi$, так как $(f_{-n})_{n\geqslant 0}\in\mathfrak{m}(G_k)$, следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что $\Delta\hat f_1\equiv s_0 \bmod \pi$.

По определению сложения в $CW(A(G\otimes G))$ имеем

$$s_0+\frac{s_{-1}^p}{p}+\frac{s_{-2}^{p^2}}{p^2}+\ldots=\left(\hat f_1+\frac{\hat f_0^p}{p}+\frac{f_{-1}^{p^2}}{p^2}+\ldots\right)\times 1+$$
$$+1\otimes\left(\hat f_1+\frac{\hat f_0^p}{p}+\frac{\hat f_{-1}^{p^2}}{p^2}+\ldots\right), \qquad (2.1)$$

С помощью индукции по $A\geqslant 0$ для любых целых $n\geqslant 0$ получим сравнения

$$\frac{1}{p^A}\Delta\hat f_{-n}^{p^A}\equiv\frac{1}{p^A}s_{-n-1}^{p^A} \bmod \pi A(G\otimes G).$$

Заметим, что при $n\geqslant 2$

$$\frac{1}{p^{n+1}}\hat f_{-n}^{p^{n+1}}\in\pi^{p^n-e(n+1)}A(G)\subset\pi A(G),$$

так как

$$p^n-e(n+1)\geqslant p^n-(p-1)(n+1)=(p-1)(1+p+\ldots+p^{n-1}-$$
$$-(n+1))+1\geqslant 1.$$

Следовательно, равенство (2.1) дает

$$s_0+\frac{1}{p}\Delta\hat f_0^p+\frac{1}{p^2}\Delta\hat f_{-1}^{p^2}\equiv g\otimes 1+1\otimes g+$$
$$+\left(\frac{1}{p^2}\hat f_{-1}^{p^2}\right)\otimes 1+1\otimes\left(\frac{1}{p^2}\hat f_{-1}^{p^2}\right) \bmod \pi A(G\times G), \qquad (2.2)$$

где

$$g=\hat f_1+\frac{1}{p}\hat f_0^p\in A(G)\otimes K$$

по условию удовлетворяет сравнению

$$\Delta g\equiv g\otimes 1+1\otimes g \bmod \pi A(G\times G).$$

Далее,

$$f_{-1}^p=0\Rightarrow\frac{1}{\pi}\hat f_{-1}^p\in A(G).$$

Из $\Delta\hat{f}_{-1}\equiv\hat{f}_{-1}\otimes 1+1\otimes\hat{f}_{-1} \bmod J(G\times G)$ (см. п. 1.2) с помощью п. 6.2, д) § 1 получаем

$$\Delta\hat{f}^{p}_{-1}\equiv\hat{f}^{p}_{-1}\otimes 1+1\otimes\hat{f}^{p}_{-1} \bmod pJ(G\times G)$$

и, следовательно,

$$\Delta\left(\frac{1}{\pi}\hat{f}^{p}_{-1}\right)\equiv\left(\frac{1}{\pi}\hat{f}^{p}_{-1}\right)\otimes 1+1\otimes\left(\frac{1}{\pi}\hat{f}^{p}_{-1}\right) \bmod J(G\times G).$$

Это дает

$$\Delta\left[\left(\frac{\hat{f}^{p}_{-1}}{\pi}\right)^{p}\right]\equiv\left(\frac{\hat{f}^{p}_{-1}}{\pi}\right)^{p}\otimes 1+1\otimes\left(\frac{\hat{f}^{p}_{-1}}{\pi}\right)^{p} \bmod pA(G\times G),$$

откуда

$$\Delta\left(\frac{1}{p^{2}}\hat{f}^{p^{2}}_{-1}\right)\equiv\left(\frac{1}{p^{2}}\hat{f}^{p^{2}}_{-1}\right)\otimes 1+1\otimes\left(\frac{1}{p^{2}}\hat{f}^{p^{2}}_{-1}\right) \bmod \pi A(G\times G),$$

так как $\frac{\pi^{p}}{p^{2}}\cdot p\equiv 0 \pmod{\pi}$. Из сравнения (2.2) теперь получаем

$$s_{0}\equiv-\frac{1}{p}\Delta\hat{f}^{p}_{0}+g\otimes 1+1\otimes g\equiv-\frac{1}{p}\Delta\hat{f}^{p}_{0}+\Delta g\equiv\Delta\hat{f}_{1} \bmod \pi A(G\times G).$$

Лемма доказана.

1.4. *i инъективен.*

Доказательство. Пусть $m_{0}=(f_{-n})_{n\geqslant 0}\in \operatorname{Ker} i$. Тогда $\hat{f}_{0}\in J(G)$ и, применяя лемму 1.3, для $\hat{f}_{1}=-\frac{1}{p}\hat{f}^{p}_{0}\in A(G)$ получаем, что

$$m_{1}=\left(\ldots,\hat{f}_{0},\ -\frac{1}{p}\hat{f}^{p}_{0} \bmod \pi\right)\in \mathfrak{m}(G_{k}).$$

Далее, $Vm_{1}=m$ и, так как $-\frac{1}{p}\hat{f}^{p}_{0}\in J(G)$ (см. п. 6.2, в)), $m_{1}\in\operatorname{Ker} i$. Повторяя это рассуждение, получаем для $t\geqslant 0$ последовательность ковекторов $m_{t}=(f^{(t)}_{-n})_{n\geqslant 0}\in\operatorname{Ker} i$ таких, что

$$Vm_{t+1}=m_{t} \text{ и } f^{(t+1)}_{0}=-\frac{1}{p}\hat{f}^{(t)p}_{0} \bmod \pi.$$

Согласно свойству 6.2, в) существует номер t_{0} такой, что $f^{(t_{0})}_{0}=0$. Отсюда для всех $n\geqslant 0$

$$f^{(t_{0})}_{-n}=V^{n}_{G}\left(f^{(t_{0})}_{0}\right)=0$$

(см. п. 2.1, § 1), т. е. $m_{t_{0}}=0$. Следовательно, $m_{0}=V^{t_{0}}(m_{t_{0}})=0$.

2. Для $G\in\mathfrak{G}_{O}$ рассмотрим σ-линейные морфизмы k-модулей из п. 6.3 § 1

$$\varphi_{A(G)}: A(G) \bmod J(G)\to\left[\frac{\pi}{p}O\otimes_{O}A(G)\right] \bmod J(G),$$

$$\psi_{A(G)}: [A(G) \bmod J(G)]'\to\left[\frac{\pi}{p}O\otimes_{O}A(G)\right] \bmod J(G)$$

и положим

$$i(\mathfrak{m}(G_{k}))=M^{0},\quad i(V\mathfrak{m}(G_{k}))=M^{1}.$$

Так как $M^{1}\subset[A(G) \bmod J(G)]'$ (см. д-во п. 1.1) $\psi_{A(G)}$ определено на M^{1}. Обозначим O-подмодуль в $\left[\frac{\pi}{p}O\otimes_{O}A(G)\right] \bmod J(G)$, порожденный $\varphi_{A(G)}(M^{0})$ и $\psi_{A(G)}(M^{1})$ через M.

Утверждение. *Пусть $\varphi_{A(G)}|_{M_{0}}=\varphi$, $\psi_{A(G)}|_{M^{1}}=\psi$, тогда $(M, M^{0}, M^{1}, \varphi, \psi)\in\mathrm{SH}_{O}$.*

Доказательство. Мы должны проверить, что $M^0 = \operatorname{Ker} \pi|_M$ и
$$M^1 = \{m \in M^0 \mid \varphi(m) \in \pi\varphi(M^0) O\}.$$

2.1. Рассмотрим произвольный элемент
$$g \in M = \varphi(M^0) O + \psi(M^1) O = \varphi(M^0) O + \psi(M^1).$$

Тогда он может быть представлен в виде
$$g = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} o_j \varphi(i(m_j)) + \psi(i(m)), \tag{2.3}$$
где
$$m_j = (f_{-n}^{(j)})_{n \geqslant 0} \in \mathfrak{m}(G_k), \quad o_j \in O, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad m = (f_{-n})_{n \geqslant 0} \in \mathfrak{m}(G_k).$$

Для произвольного $a \in A(G) \bmod J(G)$ выберем $\hat{a} \in A(G)$ такой, что $a = \hat{a} \bmod J(G)$. Тогда каждому представлению элемента $g \in M$ в виде (2.3) отвечает элемент
$$\tilde{g} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} o_j \left(-\frac{\pi}{p} \hat{f}_0^{(j)p}\right) - \frac{1}{p} \hat{f}_0^p \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G) \tag{2.4}$$
такой, что $\tilde{g} \bmod J(G) = g$.

2.2. *Для любого* $g \in \varphi(M^0) O$ *существует* $\tilde{g} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$ *такой, что* $g = \tilde{g} \bmod J(G)$ *и* $\delta^+ \tilde{g} \in \pi A(G \times G)$.

Действительно, в соотношении (2.3) можно считать, что $m = 0$, тогда можно взять $\tilde{g} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$, определенный формулой (2.4), так как из соотношений $\delta^+ \hat{f}_0^{(j)} \in J(G \times G)$ (см. п. 1.2) вытекает, что
$$\delta^+ \hat{f}_0^{(j)p} \in pA(G \times G), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

2.3. *Для любого* $g \in M$ *существует* $\tilde{g} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$ *такой, что* $g = \tilde{g} \bmod J(G)$ *и* $\delta^+ (\pi \tilde{g}) \in \pi A(G \times G)$.

Доказывается аналогично п. 2.2.

2.4. $\operatorname{Ker} \pi|_M \subset A(G) \bmod J(G)$.

Пусть $g \in \operatorname{Ker} \pi|_M$, тогда для элемента $\tilde{g} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$ из п. 2.3 имеем $\pi \tilde{g} \in J(G)$ и ковектор $(\ldots, 0, (\pi \tilde{g}) \bmod \pi A(G)) \in \mathfrak{m}(G_k)$. Из п. 1.4 теперь вытекает, что этот ковектор равен нулевому, т. е. $\tilde{g} \in A(G)$, ч. т. д.

2.5. $\operatorname{Ker} \pi|_M \subset M^0$.

Если $g \in \operatorname{Ker} \pi|_M$, то для отвечающего ему элемента $\tilde{g}$ из п. 2.1 (2.4) имеем $\tilde{g} \in A(G)$ (см. п. 2.4), $\delta^+ \left(\tilde{g} + \frac{1}{p} \hat{f}_0^p\right) \in \pi A(G \times G)$ (см. п. 2.2). Если мы положим $\hat{f}_1 = \tilde{g}$, то можно применить лемму 1.3 к ковектору $m = (f_{-n})_{n \geqslant 0} \in \mathfrak{m}(G_k)$ из п. 2.1 и получить, что $(\ldots, f_{-n}, \ldots, f_0, \hat{f}_1 \bmod \pi) \in \mathfrak{m}(G_k)$. Это означает, что $g = \tilde{g} \bmod J(G) = \hat{f}_1 \bmod J(G) \in i(\mathfrak{m}(G_k)) = M^0$.

Следствие. $\operatorname{Ker} \pi|_{\varphi(M^0)O} \subset i(\operatorname{Ker} V)$.

2.6. *Пусть* $h \in M^1$ *таков, что* $\psi(h) \in \varphi(M^0) O$. *Тогда* $h = 0$.

Если $h = i(m)$, то $m = (f_{-n})_{n \geqslant 0} \in V\mathfrak{m}(G_k)$ и $\psi(h) = -\frac{1}{p} \hat{f}_0^p \bmod J(G)$. Согласно п. 2.3, $\psi(h) \in \varphi(M^0) O$ влечет существование $\tilde{g} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$ такого, что $\psi(h) = \tilde{g} \bmod J(G)$ и $\delta^+ \tilde{g} \in \pi A(G \times G)$. Следовательно, можно применить лемму 1.3 к $\hat{f}_1 = \tilde{g} + \frac{1}{p} \hat{f}_0^p \in J(G)$ и ковектору $m = (f_{-n})_{n \geqslant 0}$ и получить, что $(\ldots, f_{-n}, \ldots, f_0,$

$\hat{f}_1 \bmod \pi) \in \mathfrak{m}(G_k)$. Теперь из п. 1.4 вытекает, что это нулевой ковектор, откуда $m = 0$, ч. т. д.

Следствие. $\psi : M^1 \to M$ — *инъективный морфизм k-модулей.*

2.7. $\{g \in M^0 \mid \varphi(g) \in \pi\varphi(M^0)O\} \subset M_1$.

Если $g = i(m) \in M^0$, где $m = (f_{-n})_{n \geqslant 0}$, $\varphi(g) \in \pi\varphi(M^0)O$, то, согласно п. 2.3, существует $\tilde{h} \in \frac{\pi}{p} O \times_O A(G)$ такой, что $-\frac{\pi}{p}\hat{f}_0^p \equiv \pi\tilde{h} \bmod J(G)$, причем $\delta^+\tilde{h} \in \pi A(G \times G)$. Если $\gamma = -\frac{\pi}{p}\hat{f}_0^p - \pi\tilde{h}$, то (см. п. 2.2) $\delta^+\gamma \in \pi A(G \times G)$, следовательно, ковектор $(\ldots, 0, \gamma \bmod \pi) \in \mathfrak{m}(G_k)$, но $\gamma \in J(G)$, и, согласно п. 1.4 $\gamma \bmod \pi = 0$. Это означает, что $-\frac{\pi}{p}\hat{f}_0^p \equiv \pi\tilde{h} \bmod \pi A(G)$. Тогда $-\frac{1}{p}\hat{f}_0^p = \tilde{h} + \hat{f}_1$, где $\hat{f}_1 \in A(G)$. Из леммы 1.3 теперь вытекает, что ковектор $m' = (\ldots, f_{-n}, \ldots, f_0, \hat{f}_1 \bmod \pi) \in \mathfrak{m}(G_k)$, следовательно, $g = i(Vm') \in i(V\mathfrak{m}(G_k)) = M^1$, ч. т. д.

2.8. $M^1 = \{m \in M^0 \mid \varphi(m) \in \pi\varphi(M^0)O\}$.

Рассмотрим σ-линейный эпиморфизм k-модулей $\bar{\varphi}$, равный следующей композиции $M^0 \xrightarrow{\varphi} \varphi(M^0)O \to \varphi(M^0)O/\pi\varphi(M^0)O = L_1$. Согласно п. 2.7, $\dim \operatorname{Ker}\bar{\varphi} \leqslant \dim M^1 = \dim\left(\operatorname{Im} V \mid_{\mathfrak{m}(G_k)}\right)$. С другой стороны, $\dim \operatorname{Im}\bar{\varphi} = \dim L_1 = \dim \operatorname{Ker} \pi\mid_{\varphi(M^0)O} \leqslant \dim \operatorname{Ker} V \mid_{\mathfrak{m}(G_k)}$ (см. следствие п. 2.5). Так как $\dim M^0 = \dim \mathfrak{m}(G_k)$, эти неравенства являются равенствами, ч. т. д.

2.9. Из п. 2.8 вытекает, что $\pi M = \pi(\varphi(M^0)O + \psi(M^1)) = \pi\varphi(M^0)O$, следовательно, L_1 отождествляется с k-подпространством в $M/\pi M$. С другой стороны, из п. 2.6 вытекает, что $L_2 = \psi(M^1)$ отождествляется с k-подпространством в $M/\pi M$ и $L_2 \cap L_1 = 0$. Следовательно,

$$\dim_k M/\pi M \geqslant \dim_k L_1 + \dim_k L_2 =$$
$$= \dim_k\left(\operatorname{Ker} V \mid_{\mathfrak{m}(G_k)}\right) + \dim\left(\operatorname{Im} V \mid_{\mathfrak{m}(G_k)}\right) = \dim_k M^0.$$

Так как $\dim_k \operatorname{Ker}\pi|_M = \dim_k M/\pi M$, из п. 2.5 получаем, что $\operatorname{Ker}\pi|_M = M^0$. Утверждение доказано.

3. Функтор $\mathrm{SH} : \mathfrak{G}_O \to \mathrm{SH}_O$.

Сопоставление всякому объекту G категории $\mathfrak{G}_O$ объекта $\mathcal{M} = (M, M^0, M^1, \varphi, \psi)$ категории SH_O из утв. 2, очевидно, определяет функтор $\mathrm{SH} : \mathfrak{G}_O \to \mathrm{SH}_O$.

Утверждение. *Имеется коммутативная диаграмма категорий и функторов*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}_O & \xrightarrow{\mathrm{SH}} & \mathrm{SH}_O \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{red}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{S}\mathfrak{m}} \\ \mathfrak{G}_k & \xrightarrow{\mathfrak{m}} & \mathfrak{m}_k \end{array},$$

где $\mathrm{red} : G \mapsto G \otimes k$, $\mathfrak{m}$ — *антиэквивалентность Дьедонне* (см. п. 2.1, § 1), $\mathcal{S}\mathfrak{m}$ — *функтор из п. 5.5 § 1.*

Доказательство. Мы должны проверить, что для любого $G \in \mathfrak{G}_O$ изоморфизм k-модулей $i : \mathfrak{m}(G_k) \to M^0$ из п. 1 является изоморфизмом D_k-модулей (структура D_k-модуля на M^0 определена в п. 5.5, § 1). Если $m = (f_{-n})_{n \geqslant 0} \in \mathfrak{m}(G_k)$, то $i(Fm) = \hat{f}_0^p \bmod J(G)$, с другой стороны, $F(i(m)) = -\frac{p}{\pi}\varphi(\hat{f}_0 \bmod J(G)) = \hat{f}_0^p \bmod J(G)$. Далее, $i(Vm) = \hat{f}_{-1} \bmod J(G)$. Пусть $V(i(m)) = i(m')$. Элемент $i(m') \in M^1$ однозначно определен условием $\psi(i(m')) \equiv i(m) \bmod \varphi(M^0)O$. Если $m' = (g_{-n})_{n \geqslant 0}$, то это означает, что $-\frac{1}{p}\hat{g}_0^p \equiv \hat{f}_0 + \tilde{h} \bmod J(G)$, где $\tilde{h} \in \frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)$, $\delta^+\tilde{h} \in \pi A(G \otimes G)$ (см. п. 2.3). В этой ситуации можно применить лемму 1.3 и получить, что ковектор $(\ldots, g_{-1}, g_0, \hat{f}_0 \bmod \pi) \in \mathfrak{m}(G_k)$. Из инъективности морфизма i следует, что этот ковектор равен исходному ковектору m, откуда $V(i(m)) = i(m') = \hat{g}_0 \bmod J(G) = \hat{f}_{-1} \bmod J(G)$, ч. т. д.

3.1. Следствие. $\mathrm{SH}(\mathfrak{G}_O^u) \subset \mathrm{SH}_O^u$, $\mathrm{SH}(\mathfrak{G}_O^c) \subset \mathrm{SH}_O^c$, $\mathrm{SH}(\mathfrak{G}_O^m) \subset \mathrm{SH}_O^m$, $\mathrm{SH}(\mathfrak{G}_O^{et}) \subset \mathrm{SH}_O^{et}$.

3.2. Следствие. SH — *точный аддитивный функтор.*

3.3 Следствие. *Функтор* SH *пропускается через проекцию* $\mathfrak{G}_O \to \mathfrak{G}_O^*$ *и определяет функтор* $\mathrm{SH}^*: \mathfrak{G}_O^* \to \mathrm{SH}_O$.

Доказательство. Мы должны показать, что для любых $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_O^*$ и любого $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_O}(G_1^{et}, G_2^m)$ $\mathrm{SH}(f) = 0$. Но $S\mathfrak{m}(\mathrm{SH}(f)) = \mathfrak{m}(f \otimes k) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_k} \times \times (\mathfrak{m}(G_2^m \otimes k), \mathfrak{m}(G_1^{et} \otimes k)) = 0$ и, так как функтор $S\mathfrak{m}$ строгий, $\mathrm{SH}(f) = 0$.

4. Пусть $G \in \mathfrak{G}_O$. Из конструкции обобщенной системы Хонды $\mathrm{SH}(G) = \mathcal{M} = (M, M^0, M^1, \varphi, \psi)$ вытекает существование мономорфизма O-модулей $j_G: M \to \left[\frac{\pi}{p} O \otimes {}_O A(G)\right] \bmod J(G)$, удовлетворяющего следующим свойствам: 1) $j_G^0(M^0) \subset A(G) \bmod J(G)$, где $j_G^0 = j_G|_{M^0}$; 2) для любого $m \in M^0$ $\varphi_{A(G)}(j_G^0(m)) = j_G(\varphi(m))$; 3) для любого $m \in M^1$ $\psi_{A(G)}(j_G^0(m)) = j_G(\psi(m))$; 4) для любого $m \in M^0 \Delta_G(j_G^0(m)) = j_G^0(m) \otimes 1 + 1 \otimes j_G^0(m)$ (см. пояснение к началу доказательства из п. 1.2).

Мы покажем, что эти свойства полностью характеризуют обобщенную систему Хонды $\mathrm{SH}(G)$.

Утверждение. *Пусть* $\mathcal{N} = (N, N^0, N^1, \varphi, \psi) \in \mathrm{SH}_O$, $G \in \mathfrak{G}_O$ *и существует морфизм* O*-модулей* $\lambda: N \to \left[\frac{\pi}{p} O \otimes_O A(G)\right] \bmod J(G)$ *такой, что*

а) $\lambda^0(N^0) \subset A(G) \bmod J(G)$, *где* $\lambda^0 = \lambda|_{N^0}$;

б) *для любого* $n \in N^0$ $\varphi_{A(G)}(\lambda^0(n)) = \lambda(\varphi(n))$;

в) *для любого* $n \in N^1$ $\psi_{A(G)}(\lambda^0(n)) = \lambda(\psi(n))$;

г) *для любого* $n \in N^0$ $\Delta_G(\lambda^0(n)) = \lambda^0(n) \otimes 1 + 1 \otimes \lambda^0(n)$.

Тогда существует единственный $\tilde{\lambda} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_O}(\mathcal{N}, \mathrm{SH}(G))$ *такой, что* $\lambda = \tilde{\lambda} \cdot j_G$.

Доказательство.

4.1. Пусть I идеал в O-алгебре $A(G)$, порожденный элементами a, для которых $a^p \in \pi A(G)$. Определим последовательность J_n, $n \geqslant 0$, идеалов в O-алгебре $A(G)$ следующим образом:

$$J_0 = J(G), \quad J_{k+1} = \frac{1}{p} J_k^{(p)} + I J_k + \pi A(G)$$

при $k \geqslant 0$ $\left(\text{символом } \frac{1}{p} J_k^{(p)} \text{ обозначен идеал, порожденный элементами } \frac{1}{p} j^p \text{ для всех } j \in J_k\right)$.

4.2. Лемма. $\bigcap_{k \geqslant 0} J_k = \pi A(G)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству утв. п. 4.3 § 2 [1].

4.3. Лемма. а) *Если* $a, b \in A(G)$, $a \equiv b \bmod J_k$, *то* $\frac{\pi}{p} a^p \equiv \frac{\pi}{p} b^p \bmod \pi A(G)$;

б) Если $a, b \in I$, $a \equiv b \bmod J_k$, *то* $\frac{1}{p} a^p \equiv \frac{1}{p} b^p \bmod J_{k+1}$.

Доказательство очевидно.

4.4. Определим по индукции семейство функций

$$\lambda_k(n)_{-t}: N^0 \to A(G) \otimes K$$

для всех целых $k \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ следующим образом:

а) $\lambda_0(n)_0 = \widehat{\lambda_0(n)} \in A(G)$, где $\widehat{\lambda^0(n)} \bmod J(G) = \lambda^0(n)$; для целого $t > 0$ положим $\lambda_0(n)_{-t} = 0$;

б) выберем для каждого $n \in N^0$ его представление в виде

$$n = \sum_i o_i \varphi(n_i) + \psi(n'), \text{ где } o_i \in O,\ n_i \in N^0,\ n' \in N^1$$

и положим

$$\lambda_{k+1}(n)_0 = -\frac{\pi}{p} \sum_i o_i \lambda_k (n_i)_0^p - \frac{1}{p} \lambda_k (n')_0^p;$$

для целого $t > 0$ положим $\lambda_{k+1}(n)_{-t} = \lambda_k (n')_{-t+1}$.

4.5. Пусть J_k, $k \geqslant 0$, последовательность идеалов в O-алгебре $A(G)$ из п. 4.1. Для удобства положим $J_k = A(G)$, если $k < 0$.

Лемма. *Для любых* $n \in N^0$, $k \geqslant 0$, $t \geqslant 0$

$$\lambda_{k+1}(n)_{-t} \equiv \lambda_k (n)_{-t} \bmod J_{k-t}.$$

Доказательство. При $k=0$ по свойствам б), в) утверждения имеем

$$\lambda_1 (n)_0 = -\frac{\pi}{p} \sum_i o_i \lambda_0 (n_i)_0^p - \frac{1}{p} \lambda_0 (n')_0^p \equiv \lambda_0 (n_0) \bmod J_0.$$

Для $t > 0$ имеем $\lambda_1 (n)_{-t} = \lambda_0 (n')_{-t+1} \equiv 0 = \lambda_0 (n)_{-t} \bmod J_{-t}$, так как $J_{-t} = A(G)$. Предположим, что для всех $t \geqslant 0$ и некоторого $k \geqslant 1$ справедливо сравнение

$$\lambda_k (n)_{-t} \equiv \lambda_{k-1} (n)_{-t} \bmod J_{k-t-1},$$

тогда

$$\lambda_{k+1} (n)_0 = -\frac{\pi}{p} \sum_i o_i \lambda_k (n_i)_0^p - \frac{1}{p} \lambda_k (n')_0^p \equiv$$

$$\equiv -\frac{\pi}{p} \sum_i o_i \lambda_{k+1} (n_i)_0^p - \frac{1}{p} \lambda_k (n')_0^p = \lambda_k (n)_0 \pmod{J_k}$$

(использовали лемму 4.3). Для любого $t > 0$

$$\lambda_{k+1} (n)_{-t} = \lambda_k (n')_{-t+1} \equiv \lambda_{k-1} (n')_{-t+1} = \lambda_k (n)_{-t} \pmod{J_{k-t}},$$

ч. т. д.

Следствие. *Для всех* $k \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $n \in N^0$

$$\lambda_k (n)_{-t} \in A(G).$$

4.6. С помощью построенных выше функций $\lambda_k (n)_{-t}$ определим для $k \geqslant 0$ последовательность отображений $\lambda_k : N^0 \to CW(A(G))$, положив $\lambda_k (n) = (\lambda_k (n)_{-t})_{t \geqslant 0}$ для всех $n \in N^0$. Рассмотрим набор идеалов J_k, $k \in \mathbb{Z}$, построенных в п. 4.1 для O-алгебры $A(G \times G)$ при $k \geqslant 0$ и равных $A(G \times G)$ для $k < 0$.

Лемма. *Для* $k \geqslant 0$, $n \in N^0$, *положим*

$$\lambda_k (n) \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_k (n) = (s_k (n)_{-t})_{t \geqslant 0} \in CW(A(G \times G)).$$

Тогда

$$\Delta \lambda_k (n)_{-t} \equiv s_k (n)_{-t} \pmod{J_{k-t}}$$

при всех $t \geqslant 0$.

Доказательство. При $k=0$ имеем $\lambda_0 (n) = (\ldots, 0, \lambda_0 (n)_0)$, следовательно, $(s_0 (n)_{-t})_{t \geqslant 0} = (\ldots, 0, \lambda_0 (n)_0 \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_0 (n)_0)$. Теперь $s_0 (n)_{-t} \equiv \Delta\lambda_0 (n)_{-t} \bmod J_{-t}$ справедливо при $t > 0$ по тривиальной причине, а при $t = 0$ по свойству г) условия утверждения.

Пусть

$$\Delta \lambda_k (n)_{-t} \equiv s_k (n)_{-t} \bmod J_{k-t}$$

справедливо при некотором $k \geqslant 0$ и всех $t \geqslant 0$. Используем оператор $V: CW \to \to CW$. Тогда $V\left[(s_{k+1}(n)_{-t})_{t\geqslant 0}\right] = V(\lambda_{k+1}(n)) \otimes 1 + 1 \otimes V(\lambda_{k+1}(n)) = \lambda_k(n') \otimes 1 + + 1 \otimes \lambda_k(n') = (s_k(n')_{-t})_{t\geqslant 0}$.

Следовательно, при $t > 0$ имеем

$$s_{k+1}(n)_{-t} = s_k(n')_{-t+1} \equiv \Delta(\lambda_k(n')_{-t+1}) = \Delta(\lambda_{k+1}(n)_{-t}) \bmod J_{k-t+1}.$$

Осталось рассмотреть случай $t = 0$. Здесь по определению операции сложения в $CW(A(G \times G))$ мы имеем равенство

$$s_{k+1}(n)_0 + \frac{1}{p} s_{k+1}(n)_{-1}^p + \frac{1}{p^2} s_{k+1}(n)_{-2}^{p^2} + \ldots =$$

$$= \left(\lambda_{k+1}(n)_0 + \frac{1}{p} \lambda_{k+1}(n)_{-1}^p + \ldots\right) \otimes 1 + 1 \otimes \left(\lambda_{k+1}(n)_0 + \frac{1}{p} \lambda_{k+1}(n)_{-1}^p + \ldots\right). \quad (2.5)$$

Теперь (ср. с доказательством леммы 1.3):

а) при $t > 0$

$$\lambda_{k+1}(n)_{-t} = \lambda_k(n')_{-t+1} \equiv \lambda_0(n')_{-t+1} \equiv 0 \pmod I$$

(см. п. 4.1), следовательно,

$$p^{-t}\lambda_{k+1}(n)_{-t}^{p^t} \equiv (\bmod\, \pi A(G))$$

при $t > 2$. Аналогично $s_{k+1}(n)_{-t} = s_k(n')_{-t+1} \equiv \Delta(\lambda_k(n')_{-t+1}) \equiv 0 \bmod I$, следовательно,

$$p^{-t} s_{k+1}(n)_{-t}^{p^t} \in \pi A(G \times G)$$

при $t > 2$.

б) Используя индуктивное предположение, получаем

$$s_{k+1}(n)_{-2} \equiv \lambda_{k+1}(n)_{-2} \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_{k+1}(n)_{-2} \bmod J(G \times G).$$

Откуда, как в п. 1.3,

$$\frac{1}{p^2} s_{k+1}(n)_{-2}^{p^2} \equiv \frac{1}{p^2} \lambda_{k+1}(n)_{-2}^{p^2} \otimes 1 + 1 \otimes \frac{1}{p^2} \lambda_{k+1}(n)_{-2}^{p^2} \bmod \pi A(G \times G).$$

в) По Лемме 4.3 имеем

$$\frac{1}{p} s_{k+1}(n)_{-1}^p = \frac{1}{p} s_k(n')_0^p \equiv \frac{\Delta\lambda_k(n')_0^p}{p} \bmod J_{k+1},$$

$$\frac{\lambda_{k+1}(n)_{-1}^p}{p} \equiv \frac{\lambda_k(n')_0^p}{p} \bmod J_{k+1}.$$

Используя результаты п. а)—в) и подставляя значение для $\lambda_{k+1}(n)_0$ в равенство (2.5), получаем

$$s_{k+1}(n)_0 \equiv -\frac{\Delta\lambda_k(n')_0^p}{p} - \frac{\pi}{p} \sum_i o_i(\lambda_k(n')_0^p \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_k(n')_0^p) \bmod J_{k+1}.$$

Но

$$\lambda_k(n_i)_0 \equiv \lambda_0(n_i)_0 \bmod J(G),$$

поэтому (ср. с п. 2.2)

$$\lambda_k(n_i)_0^p \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_k(n_i)_0^p \equiv \Delta\lambda_k(n_i)_0^p \bmod pA(G \times G),$$

откуда

$$s_{k+1}(n)_0 \equiv \Delta\lambda_{k+1}(n)_0 \bmod J_{k+1},$$

ч. т. д.

4.7. Из лемм 4.5 и 4.2 вытекает, что можно рассмотреть отображение

$$\lambda_\infty^0 : N^0 \to CW_k(A(G_k)),$$

определенное соотношением

$$\lambda_\infty^0(n) = \left(\lim_{k\to\infty} [\lambda_k(n)_{-t} \bmod \pi A(G)]\right)_{t\geqslant 0},$$

из леммы 4.6 вытекает, что $\lambda_\infty^0(N^0) \subset \mathfrak{m}(G_k)$. По построению отображения λ_∞^0, (см. п. 1) и λ^0 из условия утв. включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{m}(G_\kappa) \arrow[dr, "i"] & \\ N^0 \arrow[ur, "\tau_\infty^0"] \arrow[rr, "\lambda^0"] & & A(G) \bmod J(G) \end{tikzcd}$$

Следовательно, $\lambda^0(N^0) \subset i(\mathfrak{m}(G_k)) = M^0$. Теперь, очевидно, что λ_∞^0 определяет требуемый морфизм $\mathcal{N} \to \mathrm{SH}(G)$ в категории SH_O и этот морфизм определен однозначно.

§ 3. Антиэквивалентность $\mathrm{SH}^* : \mathfrak{G}_O^* \to \mathrm{SH}_O$

В этом параграфе мы докажем, что функтор SH^* из § 2 является антиэквивалентностью категорий. Для этого будет построен квазиобратный к SH^* функтор $\mathfrak{G}^* : \mathrm{SH}_O \to \mathfrak{G}_O^*$. Построение будет проведено в два этапа, сначала всякому объекту $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_O$ будет сопоставлена O-алгебра $A(\mathcal{M})$, а потом доказано существование на $\operatorname{Spec} A(\mathcal{M})$ структуры объекта категории $\mathfrak{G}_O^*$. Отметим, что ограничение случаем $e < p-1$ или $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_O^u$ или $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_O^e$ позволило бы существенно упростить построение функтора $\mathfrak{G}^*$.

1. Категория Aug_O. Объектами категории Aug_O являются пары $\mathcal{A} = (A, j_A)$, где A — коммутативная O-алгебра без кручения конечного ранга над O, не имеющая нильпотентных элементов (последнее условие эквивалентно тому, что $A \otimes_O K$ — этальная K-алгебра или $\Omega^1_{A\otimes K/K} = 0$), j_A — пополняющий морфизм O-алгебр. Морфизмами в категории Aug_O являются морфизмы O-алгебр, перестановочные с соответствующими пополняющими отображениями. Мы будем использовать обозначения $A^0 = \operatorname{Ker} j_A$ и $\operatorname{rk}\mathcal{A} = \operatorname{rk}_O A$.

В категории Aug_O существует нулевой объект $\mathcal{O} = (O, \mathrm{id})$, причем для любого $\mathcal{A} \in \mathrm{Aug}_O$ имеются выделенный морфизм $\mathcal{O} \xrightarrow{1} \mathcal{A}$ и единственный морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{O}$. Нулевым морфизмом в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ назовем морфизм, разлагающийся в композицию $\mathcal{A} \xrightarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{1} \mathcal{B}$. В категории Aug_O имеются тензорные произведения $(A, j_A) \otimes (B, j_B) = (A \otimes_O B, j_A \otimes j_B)$.

Для всякой O-алгебры A будем обозначать через A^{et} ее наибольшую этальную O-подалгебру. Всякий объект $\mathcal{A} = (A, j_A)$ в Aug_O имеет наибольший этальный подобъект $\mathcal{A}^{\mathrm{et}} = \left(A^{\mathrm{et}}, j_{A\,|\,A^{\mathrm{et}}}\right)$. Полную подкатегорию в Aug_O, образованную этальными объектами, обозначим $\mathrm{Aug}_O^{\mathrm{et}}$.

Замечание. Для $G \in \mathfrak{G}_O$ соответствие $G \mapsto \left(A(G), e_G\right)$, где $A(G)$ — алгебра групповой схемы G, e_G — коединица, определяет строгий функтор $\mathrm{Aug} : \mathfrak{G}_O \to \mathrm{Aug}_O$.

2. Идеалы $J(\mathcal{A})$, $J'(\mathcal{A})$.

Для всякого $\mathcal{A} = (A, j_A) \in \mathrm{Aug}_O$ положим $J(\mathcal{A}) = J(A) \cap A^0$, $J'(\mathcal{A}) = J'(A) \cap A^0$. Для этих идеалов имеем свойства, аналогичные свойствам из п. 6.2 § 1. Отметим, что в случае $e \neq p-1$ или $\mathscr{A}^{et} = \mathcal{O} - J(\mathscr{A}) = J'(\mathscr{A})$, а при $e = p-1$ $J(\mathscr{A})/J'(\mathscr{A}) = \pi A^{et, 0}/\pi^2 A^{et, 0}$.

3. Категория $\mathscr{S}\mathrm{H}_O$ и функтор $\mathscr{S}\mathrm{H}$ (ср. с п. 5, 6. § 1). Объектами категории $\mathscr{S}\mathrm{H}_O$ являются наборы $\mathscr{M} = (M, M^0, M^1, \varphi, \psi)$, где

а) M — аннулируемый умножением на p O-модуль;

б) $M^0 \subset M$ — подмодуль, аннулируемый умножением на π;

в) $\varphi: M^0 \to M$ — σ-линейный морфизм k-модулей;

г) $M^1 = \{m \in M^0 \mid \varphi(m) \in \pi\varphi(M^0) O\}$;

д) $\psi: M^1 \to M$ — σ-линейный морфизм k-модулей такой, что для любого $m \in M^1$ $\pi\psi(m) = \varphi(m)$.

Если $\mathscr{N} = (N, N^0, N^1, \varphi, \psi)$ другой объект из $\mathscr{S}\mathrm{H}_O$, то морфизмы из $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ задаются O-линейными морфизмами $f: M \to N$ такими, что $f(M^0) \subset N^0$ и $\varphi \cdot f = (f|_{M^0}) \cdot \varphi$, $\psi \cdot f = (f|_{M^1}) \cdot \psi$.

Замечание. Категория SH_O отождествляется с полной подкатегорией в $\mathscr{S}\mathrm{H}_O$.

Пусть $\mathscr{A} = (A, j_A) \in \mathrm{Aug}_O$. Положим

$$M_A = \left(\frac{\pi}{p} O \otimes_O A^0\right) \mathrm{mod}\, J(\mathscr{A}), \quad M_A^0 = A^0 \,\mathrm{mod}\, J(\mathscr{A}).$$

Тогда для $m = a \,\mathrm{mod}\, J(\mathscr{A}) \in M_A^0$ соответствие

$$m \mapsto \varphi(m) := -\frac{\pi}{p} a^p \,\mathrm{mod}\, J(\mathscr{A})$$

определяет σ-линейный морфизм $\varphi: M_A^0 \to M_A$. Положим $M_A^1 = \{m \in M_A^0 \mid \varphi(m) \in \pi\varphi(M^0) O\}$. Так как для любого $m = a \,\mathrm{mod}\, J(\mathscr{A}) \in M_A^1$ имеем $a^p \in \pi A^0$, соответствие $m \mapsto -\frac{1}{p} a^p \,\mathrm{mod}\, J(\mathscr{A})$ корректно определяет σ-линейный морфизм $\psi: M_A^1 \to M_A$. В этих обозначениях положим $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}) = (M_A, M_A^0, M_A^1, \varphi, \psi)$. Соответствие $\mathscr{A} \mapsto \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A})$ определяет функтор $\mathscr{S}\mathrm{H}: \mathrm{Aug}_O \to \mathscr{S}\mathrm{H}_O$.

Замечание. Для любого $G \in \mathfrak{G}_O$ $\mathrm{SH}(G)$ является подобъектом в $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}(G))$.

4. Объекты $\mathscr{A}(\mathscr{M}) \in \mathrm{Aug}_O$.

4.1. Специальный базис в $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_O$. Пусть $\mathscr{M} = (M, M^0, M^1, \varphi, \psi) \in \mathrm{SH}_O$. Положим $F = -\frac{p}{\pi}\varphi: M^0 \to M^0$. Это σ-линейный морфизм k-модулей (см. п. 5.5, § 1) и относительно него имеем каноническое разложение $M^0 = M^{0, c} \oplus M^{0, et}$, где $F|_{M^{0,c}}$ нильпотентен, $F|_{M^{0, et}}$ обратим. Заметим, что $M^1 \subset \mathrm{Ker}\, F \subset M^c$. Выберем

вектор $\bar{m}_2 = (m_1'', \ldots, m_{i_2}'')$, состоящий из элементов некоторого k-базиса в M^1;

вектор $\bar{m}_1 = (m_1', \ldots, m_{i_1}')$, состоящий из дополнения предыдущего базиса в M^1 до k-базиса в $M^{0, c}$;

вектор $\bar{m}_{et} = (m_1, \ldots, m_{i_0})$, состоящий из элементов k-базиса в $M^{0, et}$.

Элементы вектора $(\bar{m}_2, \bar{m}_1, \bar{m}_{et})$ образуют базис k-модуля M^0, и из свойств 5.7.1, 5.7.2 § 1 вытекает существование O-матрицы C, являющейся делителем $\frac{p}{\pi} E$ в кольце O-матриц порядка $\mathrm{rk}\,\mathscr{M}$ и такой, что $(\psi(\bar{m}_2), \varphi(\bar{m}_1), \varphi(\bar{m}_{et}))\, C = (\bar{m}_2, \bar{m}_1, \bar{m}_{et})$. Легко видеть, что матрицу C можно выбрать в виде следующей блочной матрицы

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & 0 \\ A_1 & B_1 & 0 \\ A_{et} & B_{et} & -\frac{p}{\pi} C_{et} \end{pmatrix},$$

где порядки блоков определяются корректностью равенств

$$\psi(\bar m_2)A_2+\varphi(\bar m_1)A_1+\varphi(\bar m_{\text{et}})A_{\text{et}}=\bar m_2,$$
$$\psi(\bar m_2)B_2+\varphi(\bar m_1)B_1+\varphi(\bar m_{\text{et}})B_{\text{et}}=\bar m_1,$$
$$-\frac{p}{\pi}\varphi(\bar m_{\text{et}})C_{\text{et}}=\bar m_{\text{et}},$$

задающих структуру исходного объекта $\mathcal{M}$ категории SH_O, причем матрица C_{et} является обратимой O-матрицей. Для дальнейших целей введем следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix}A_2 & B_2\\ A_1 & B_1\end{pmatrix}=C^c,\quad -\frac{p}{\pi}E\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}A^2 & B^2 & 0\\ A^1 & B^1 & 0\\ A^{\text{et}} & B^{\text{et}} & C^{\text{et}}\end{pmatrix}\in M_{\operatorname{rk}\mathcal{M}}(O)$$

(здесь C^{et} — обратимая O-матрица).

4.2. Конструкция объекта $\mathcal{A}(\mathcal{M})$.

Пусть $\bar X_2$, $\bar X_1$, $\bar X_{\text{et}}$ векторы-наборы неизвестных, взаимно однозначно соответствующие элементам векторов $\bar m_2$, $\bar m_1$, $\bar m_{\text{et}}$. Положим $A(\mathcal{M})=O[\bar X_2,\bar X_1\bar X_{\text{et}}]/I(\mathcal{M})$, где $I(\mathcal{M})$ идеал, образованный в $O[\bar X_2,\ \bar X_1,\ \bar X_{\text{et}}]$ соотношениями, возникающими из векторного равенства

$$\left(-\frac{1}{p}\bar X_2^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar X_1^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar X_{\text{et}}^p\right)C=(\bar X_2,\ \bar X_1,\ \bar X_{\text{et}}). \tag{3.1}$$

$A(\mathcal{M})$ является O-алгеброй без кручения ранга $p^{\operatorname{rk}(\mathcal{M})}$. Это вытекает из того, что уравнения $A(\mathcal{M})$ могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{1}{\pi}\bar X_2^p,\ \bar X_1^p,\ \bar X_{\text{et}}^p\right)=(\bar X_2,\ \bar X_1,\ \bar X_{\text{et}})\left(-\frac{p}{\pi}C^{-1}\right),$$

т. е.

$$\bar X_2^p=\pi\bar X_2A^2+\pi\bar X_1A^1+\pi\bar X_{\text{et}}A^{\text{et}},$$
$$\bar X_1^p=\bar X_2B^2+\bar X_1B^1+\bar X_{\text{et}}B^{\text{et}},$$
$$\bar X_{\text{et}}^p=\bar X_{\text{et}}C^{\text{et}},$$

где A^2, A^1, A^{et}, B^2, B^1, B^{et}, C^{et} являются O-матрицами. Определим пополняющий морфизм $j_{\mathcal{M}}:A(\mathcal{M})\to O$ соотношениями $j_{\mathcal{M}}(\bar X_2)=j_{\mathcal{M}}(\bar X_1)=j_{\mathcal{M}}(\bar X_{\text{et}})=0$. Заметим, что элементы $\bar X_{\text{et}}$ порождают наибольшую этальную подалгебру $A(\mathcal{M})^{\text{et}}$ в $A(\mathcal{M})$.

4.3. Предложение. $\Omega^1_{A(\mathcal{M})\otimes K/K}=0$.

Доказательство. Пусть $\xi=(\bar x_2,\ \bar x_1,\ \bar x_{\text{et}})$ геометрическая точка $A(\mathcal{M})$. Тогда из равенств (3.1) получаем

$$(d_\xi\bar X_2,\ d_\xi\bar X_1,\ d_\xi\bar X_{\text{et}})=(-\bar x_2^{p-1}d_\xi\bar X_2,\ -\pi\bar x_1^{p-1}d_\xi\bar X_1,\ -\pi\bar x_{\text{et}}^{p-1}d_\xi\bar X_{\text{et}})C.$$

Все коэффициенты при дифференциалах в правой части равенства лежат в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ кольца целых чисел поля $\bar K$, откуда, по лемме Накаяма, $d_\xi\bar X_2=d_\xi\bar X_1=d_\xi\bar X_{\text{et}}=0$ в $\Omega^1_{A(\mathcal{M})\otimes K/K}$, ч. т. д.

4.4. Итак, для любого $\mathcal{M}$, построенный в п. 4.2 объект $\mathcal{A}(\mathcal{M})=(A(\mathcal{M}),\ j_{\mathcal{M}})$, лежит в Aug_O. Независимость $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ от способа его построения будет получена позже.

Утверждение. Пусть $\mathcal{M}\in\mathrm{SH}_O$ *задан в обозначениях* п. 4.1 *и* $\mathcal{B}=(B,\ j)\in\mathrm{Aug}_O$. *Тогда множество* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),\ \mathcal{B})$ *отождествляется с наборами* $(\bar b_2',\ \bar b_1',\ \bar b_{\text{et}}')\bmod J'(\mathcal{B})$ *векторов* $\bar b_2'$, $\bar b_1'$, $\bar b_{\text{et}}'$ *с коэффициентами в* B^0 *такими, что*

$$\left(-\frac{1}{p}\bar{b}_2'^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar{b}_1'^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar{b}_{et}'^p\right)C \equiv (\bar{b}_2',\ \bar{b}_1',\ \bar{b}_{et}') \bmod J'(\mathscr{B}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Если $F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathscr{B})$, то очевидно, набор $(F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{et}))$ удовлетворяет требуемому свойству.

Обратно, пусть I идеал в B, образованный элементами b такими, что $b^p \in \pi B$. Определим последовательность идеалов I_n, $n \geqslant 0$, в O-алгебре B условиями:

$$I_0 = J'(\mathscr{B}),\quad I_{n+1} = \frac{1}{p} I_n^{(p)} + I \cdot I_n,$$

где $\frac{1}{p} I_n^{(p)}$ — идеал, порожденный элементами вида $\frac{1}{p} i^p$, $i \in I_n$. Тогда $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} I_n = 0$ (д-во см. в [1], § 2, утв. 4.3, где используется этальность $B \otimes K$). Определим последовательность $(\bar{b}_2^{(n)},\ \bar{b}_1^{(n)},\ \bar{b}_{et}^{(n)})$ векторов с коэффициентами в B^0:

$$(\bar{b}_2^{(0)},\ \bar{b}_1^{(0)},\ \bar{b}_{et}^{(0)}) = (\bar{b}_2',\ \bar{b}_1',\ \bar{b}_{et}') \text{ и } (\bar{b}_2^{(n+1)},\ \bar{b}_1^{(n+1)},\ \bar{b}_{et}^{(n+1)}) =$$
$$= \left(-\frac{1}{p}\bar{b}_2^{(n)p},\ -\frac{\pi}{p}\bar{b}_1^{(n)p},\ -\frac{\pi}{p}\bar{b}_{et}^{(n)p}\right)C$$

для всех $n \geqslant 0$. Тогда (см. [1], § 3, п. 2) для всех $n \geqslant 0$

$$(\bar{b}_2^{(n+1)},\ \bar{b}_1^{(n+1)},\ \bar{b}_{et}^{(n+1)}) \equiv (\bar{b}_2^{(n)},\ \bar{b}_1^{(n)},\ \bar{b}_{et}^{(n)}) \bmod I_n.$$

Следовательно, существует

$$(F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{et})) = \lim_{n\to\infty} (\bar{b}_2^{(n)},\ \bar{b}_1^{(n)},\ \bar{b}_{et}^{(n)})$$

и, так как

$$\left(-\frac{1}{p}F(\bar{X}_2)^p,\ -\frac{\pi}{p}F(\bar{X}_1)^p,\ -\frac{\pi}{p}F(\bar{X}_{et})^p\right)C = (F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{et})),$$

соответствие $(\bar{X}_2,\ \bar{X}_1,\ \bar{X}_{et}) \mapsto (F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{et}))$ определяет элемент $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathscr{B})$, соответствующий заданному набору $(\bar{b}_2',\ \bar{b}_1',\ \bar{b}_{et}') \bmod J'(\mathscr{B})$. Единственность такого F проверяется так же, как в [1], § 3, п. 2.

4.5. Морфизм $i_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$.

Этот морфизм категории $\mathscr{S}\mathrm{H}_0$ однозначно определяется морфизмом O-модулей $i : M \to \left[\frac{\pi}{p} O \otimes_O A(\mathscr{M})^0\right] \bmod J(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$ с помощью соотношений

$$i(\psi(\bar{m}_2),\ \varphi(\bar{m}_1),\ \varphi(\bar{m}_{et})) = \left(-\frac{1}{p}\bar{X}_2^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar{X}_1^p,\ -\frac{\pi}{p}\bar{X}_{et}^p\right) \bmod J(\mathscr{A}(\mathscr{M})).$$

Заметим, что при этом

$$i : (\bar{m}_2,\ \bar{m}_1,\ \bar{m}_{et}) \mapsto (\bar{X}_2,\ \bar{X}_1,\ \bar{X}_{et}) \bmod J(\mathscr{A}(\mathscr{M})).$$

5. Функтор $\mathscr{A}^* : \mathrm{SH}_0 \to IM\mathscr{A} / R_1$.

5.1. Для любого объекта $\mathscr{M}$ категории SH_0 обозначим через $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ один из возможных (зависящих от выбора специального базиса и матрицы коэффициентов C) объектов категории Aug_0, построенных в п. 4.2. Тогда для любого $\mathscr{B} \in \mathrm{Aug}_0$ соответствие $F \mapsto i_{\mathscr{M}} \cdot \mathscr{S}\mathrm{H}(F)$ определяет отображение

$$\xi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathscr{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M},\ \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{B})).$$

Утверждение. ξ *сюръективно.*

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{M}$ и $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ заданы в обозначениях п. 4.1, 4.2. Из п. 4.4 вытекает, что множество $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathscr{B})$ отождествляется с наборами векторов $(\bar{b}_2',\ \bar{b}_1',\ \bar{b}_{et}') \bmod J'(\mathscr{B})$, удовлетворяющих соотношениям (3.2). С другой стороны, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}\mathrm{H}_0}(\mathcal{M}, \mathcal{P}\mathrm{H}(\mathcal{B}))$ отождествляется с наборами $(\bar b_2, \bar b_1, \bar b_{et}) \bmod J(\mathcal{B})$ такими, что

$$\left(-\frac{1}{p}\bar b_2^p, -\frac{\pi}{p}\bar b_1^p, -\frac{\pi}{p}\bar b_{et}^p\right)C \equiv (\bar b_2, \bar b_1, \bar b_{et}) \bmod J(\mathcal{B}),$$

и отображение ξ соответствует редукции

$$\xi: (\bar b'_2, \bar b'_1, \bar b'_{et}) \bmod J'(\mathcal{B}) \mapsto (\bar b'_2, \bar b'_1, \bar b'_{et}) \bmod J(\mathcal{B}).$$

В случае $e \neq p-1$ доказывать нечего, поэтому считаем, что $e = p-1$. Тогда $J(\mathcal{B})/J'(\mathcal{B}) = \pi B^{et,0}/\pi^2 B^{et,0}$, и мы должны найти векторы $\bar a_2$, $\bar a_1$, $\bar a_{et}$ с коэффициентами в $B^{et,0}$ такие, что $\bar b'_2 = \bar b_2 + \pi\bar a_2$, $\bar b'_1 = \bar b_1 + \pi\bar a_1$, $\bar b'_{et} = \bar b_{et} + \pi\bar a_{et}$ удовлетворяют соотношению (3.2). Используя эквивалентность категорий этальных k- и O-алгебр, видим, что такой вектор $\bar a_{et}$ однозначно определен. Из сравнений

$$-\frac{1}{p}\bar b_2'^p \equiv -\frac{1}{p}\bar b_2^p + \pi\bar a_2^p \bmod J'(\mathcal{B}), \quad -\frac{\pi}{p}\bar b_1'^p \equiv -\frac{\pi}{p}\bar b_1^p \bmod J'(\mathcal{B})$$

(мы используем топологическую нильпотентность $\bar b'_2$ и $\bar b'_1$ и свойство $\pi B^c \subset J'(B)$) видим, что нахождение $\bar a_2$ и $\bar a_1$ эквивалентно нахождению решений системы

$$(\bar a_2^p, \bar 0)C^c = (\bar a_2, \bar a_1) + (\tilde a_2, \tilde a_1) \bmod \pi B^{et,0},$$

где $\tilde a_2$, $\tilde a_1$ — некоторые заданные векторы с коэффициентами в $B^{et,0}$. Следовательно, доказательство сюръективности ξ сводится к доказательству разрешимости этой системы, которое получается аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1], § 3, п. 3.2.1.

5.2 Из предыдущего пункта следует, что при $e \neq p-1$ отображение ξ является взаимно однозначным, а при $e = p-1$ на его слоях транзитивно без неподвижных точек действует группа решений в $B^{et,0} \bmod \pi$ однородной системы

$$(\bar a_2^p, \bar 0)C^c = (\bar a_2, \bar a_1) \bmod \pi. \tag{3.3}$$

Свяжем с $\mathcal{B}$ следующий объект $\mathfrak{m}(\mathcal{B})$ категории $\mathrm{SH}_0 : \mathfrak{m}(\mathcal{B}) = (M, M^0, M^1, \varphi, \psi)$, где $M = M^0 = M^1 = J(\mathcal{B}) / J'(\mathcal{B})$, $\varphi = 0$, $\psi: M^1 \to M$ индуцирован возведением элементов B^{et} в степень p. Отметим, что $\mathfrak{m}(\mathcal{B}) \neq 0$ лишь при $e = p-1$ и $\mathfrak{m}(\mathcal{B}) \in \mathrm{SH}_0^m$, $\mathfrak{m}(\mathcal{B}) = \mathfrak{m}(\mathcal{B}^{et})$.

Лемма. *При $e = p-1$ множество решений системы* (3.3) *естественно отождествляется с* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathcal{M}, \mathfrak{m}(\mathcal{B}))$.

Доказательство. Это отождествление ставит в соответствие произвольному решению $(\bar a_2, \bar a_1)$ системы (3.3) морфизм $\mathcal{M} \to \mathfrak{m}(\mathcal{B})$, определенный в терминах специального базиса п. 4.1 соответствием $(\bar m, \bar m_1, \bar m_{et}) \mapsto (\bar a_2, \bar a_1, \bar 0)$.

Замечание. С помощью канонической проекции $\mathcal{M}$ на наибольший мультипликативный фактор $\mathcal{M}^m$ $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathcal{M}, \mathfrak{m}(\mathcal{B}))$ отождествляется с $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathcal{M}^m, \mathfrak{m}(\mathcal{B}))$, так как $\mathfrak{m}(\mathcal{B}) \in \mathrm{SH}_0^m$.

5.3. Из доказательства утв. 5.1 теперь получаем, что для любых $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_0$, $\mathcal{B} \in \mathrm{Aug}_0$ на множествах $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ определено функториальное по $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ действие группы $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathcal{M}, \mathfrak{m}(\mathcal{B}))$. Обозначив через R_1 отношение эквивалентности, определенное этим действием, получаем из 5.1.

Утверждение. *Для любых $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_0$, $\mathcal{B} \in \mathrm{Aug}_0$ соответствие $F \mapsto i_{\mathcal{M}} \cdot \mathcal{P}\mathrm{H}(F)$ определяет биекцию*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}), \mathcal{B}) / R_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}\mathrm{H}_0}(\mathcal{M}, \mathcal{P}\mathrm{H}(\mathcal{B})).$$

5.4. Пусть $IM\mathcal{A}$ полная подкатегория в Aug_0, состоящая из объектов $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_0$. Из п. 5.1 видно, что отношение эквивалентности R_1 сохраняется при композиции морфизмов в $IM\mathscr{A}$, следовательно, можно рассмотреть факторкатегорию $IM\mathscr{A}/R_1$, состоящую из тех же объектов, что и категория $IM\mathscr{A}$, положив $\mathrm{Hom}_{IM\mathscr{A}/R_1}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)/R_1$, для любых $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in IM\mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathrm{SH}_0$. Обозначим через $\mathscr{A}(u) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_1), \mathscr{A}(\mathscr{M}_2))$ любой элемент, лежащий в классе эквивалентности (относительно R_1) образа $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$ при отображении $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \xrightarrow{i_{\mathscr{M}_2 *}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_2))) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{IM\mathscr{A}/R_1}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_1), \mathscr{A}(\mathscr{M}_2))$.

Утверждение. *Соответствие* $\mathscr{M} \mapsto \mathscr{A}(\mathscr{M})$, $u \mapsto \mathscr{A}(u) \bmod R_1$ *определяет строгий функтор* $\mathscr{A}^*: \mathrm{SH}_0 \to IM\mathscr{A}/R_1$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_2, \mathscr{M}_3)$. Проверим, что $\mathscr{A}(uv) \underset{R_1}{\sim} \mathscr{A}(u) \cdot \mathscr{A}(v)$. По определению $i_{\mathscr{M}_1} \cdot \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(u)) = u \cdot i_{\mathscr{M}_2}$, $i_{\mathscr{M}_2} \cdot \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(v)) = v \cdot i_{\mathscr{M}_3}$, $i_{\mathscr{M}_1} \cdot \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(uv)) = uv \cdot i_{\mathscr{M}_3}$. Из первых двух равенств получаем $i_{\mathscr{M}_1} \cdot \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(u) \cdot \mathscr{A}(v)) = uv \cdot i_{\mathscr{M}_3}$, откуда в виду биекции утв. п. 5.3 следует требуемая эквивалентность. Таким образом, $\mathscr{A}^*$-функтор.

Очевидно, строгость функтора $\mathscr{A}^*$ эквивалентна инъективности морфизма $i_{\mathscr{M}}: \mathscr{M} \to \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$ для любого $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_0$. Пусть $i_{\mathscr{M}}$ неинъективен. Легко показать, что тогда $i_{\mathscr{M}}$ пропускается через собственный факторобъект $u: \mathscr{M} \to \mathscr{M}_1$ в категории SH_0. Теперь из п. 5.3 получаем, что тождественный морфизм $\mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathscr{M})}$ R_1-эквивалентен некоторой композиции $\mathscr{A}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathscr{A}(u)} \mathscr{A}(\mathscr{M}_1) \to \mathscr{A}(\mathscr{M})$. Это дает противоречие, так как класс $\mathrm{id}_{\mathscr{A}(\mathscr{M})} \bmod R_1$ состоит из изоморфизмов и $\mathrm{rk}\,\mathscr{A}(\mathscr{M}_1) < \mathrm{rk}\,\mathscr{A}(\mathscr{M})$.

Замечание. Конструкция функтора $\mathscr{A}^*$ зависела от выбора способа построения объектов $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ из п. 4.2. Из утв. п. 5.3 теперь следует, что сам функтор $\mathscr{A}^*$ определен однозначно с точностью до эквивалентности.

Замечание. Если $\mathscr{M}_1^m = 0$ или $\mathscr{M}_2^{\mathrm{et}} = 0$, то $\mathrm{Hom}_{IM\mathscr{A}/R_1}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_1), \mathscr{A}(\mathscr{M}_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_1); \mathscr{A}(\mathscr{M}_2))$.

5.5. Нулевые морфизмы категории $IM\mathscr{A}/R_1$. Из замечания п. 5.4 следует, что каноническим морфизмам $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^m$ и $\mathscr{N}^{\mathrm{et}} \to \mathscr{N}$ из п. 5.6 § 1 функтор $\mathscr{A}^*$ ставит в соответствие однозначно определенные в категории Aug_0 морфизмы $\mathscr{A}(\mathscr{M}) \to \mathscr{A}(\mathscr{M}^m)$ и $\mathscr{A}(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) \to \mathscr{A}(\mathscr{N})$.

Утверждение. *Пусть* $F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}), \mathscr{A}(\mathscr{N}))$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $F \underset{R_1}{\sim} 0$;

2) F *разлагается в композицию* $\mathscr{A}(\mathscr{M}) \to \mathscr{A}(\mathscr{M}^m) \to \mathscr{A}(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) \to \mathscr{A}(\mathscr{N})$, *где крайние морфизмы отвечают каноническим морфизмам* $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^m$, $\mathscr{N}^{\mathrm{et}} \to \mathscr{N}$ *(см. выше), а средний является произвольным морфизмом в категории* Aug_0.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из того, что любой морфизм из $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}^m), \mathscr{A}(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}))$ R_1-эквивалентен нулевому.

1) $\Rightarrow$ 2): В случае $e \neq p - 1$ доказывать нечего. Пусть $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ задан в обозначениях п. 4.2. Тогда $(F(\bar{X}_2), F(\bar{X}_1), F(\bar{X}_{\mathrm{et}})) \equiv (\pi\bar{a}_2, \pi\bar{a}_1, \bar{0}) \bmod J'(\mathscr{N})$, где $\bar{a}_2$, $\bar{a}_1$ — векторы с коэффициентами в $A(\mathscr{N})^{\mathrm{et},0}$, являющиеся решениями сравнения $(\bar{a}_2^p, \bar{0})C^c = (\bar{a}_2, \bar{a}_1) \bmod \pi A(\mathscr{N})^{\mathrm{et},0}$. Заметим, что построенный в п. 5.3 объект $\mathfrak{m}(\mathscr{A}(\mathscr{N}))$ может быть отождествлен с $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}))$, где $\mathscr{A}_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) = (A_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}), j_m) \subset \mathscr{A}(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) = \mathscr{A}(\mathscr{N})^{\mathrm{et}}$ и $A_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) = O + \pi A(\mathscr{N})^{\mathrm{et}}$.

Следовательно, F определяет морфизм в категории $\mathscr{S}\mathrm{H}_0\, \mathscr{M} \to \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}))$, который пропускается через проекцию $\mathscr{M} \to \mathscr{M}^m$ и, следовательно, определяет в категории Aug_0 последовательность морфизмов $F': \mathscr{A}(\mathscr{M}) \to \mathscr{A}(\mathscr{M}^m) \to \mathscr{A}_m(\mathscr{N}^{\mathrm{et}}) \hookrightarrow \mathscr{A}(\mathscr{N})^{\mathrm{et}} \hookrightarrow \mathscr{A}(\mathscr{N})$. По построению $(F'(\bar{X}_2), F'(\bar{X}_1), F'(\bar{X}_{\mathrm{et}})) \equiv (\pi\bar{a}_2, \pi\bar{a}_1, \bar{0}) \bmod J'(\mathscr{A}(\mathscr{N}))$, поэтому $F = F'$, ч. т. д.

6. Конструкция объекта категории $\mathfrak{G}_0$ на $\operatorname{Spec} A(\mathcal{M})$. Пусть $\mathcal{M}=(M, M^0, M^1, \varphi, \psi)\in \mathrm{SH}_0$, $\nabla: \mathcal{M}\to\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}$ морфизм категории SH_0, индуцированный диагональным вложением $M\to M\oplus M$. Рассмотрим класс эквивалентности $\mathcal{A}(\nabla)\bmod R_1$ морфизмов $\mathcal{A}(\mathcal{M})\to\mathcal{A}(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M})\simeq\mathcal{A}(\mathcal{M})\otimes\mathcal{A}(\mathcal{M})$ категории Aug_0. Мы хотим доказать существование морфизма $\Delta\in\mathcal{A}(\nabla)\bmod R_1$, для которого удовлетворяются аксиомы коассоциативности $\Delta\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id})=$ $=\Delta\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta)$, кокоммутативности ($\Delta$ не меняется при перестановке сомножителей в $\mathcal{A}(\mathcal{M})\otimes\mathcal{A}(\mathcal{M})$), и чтобы при условии использования пополняющего отображения $j_{\mathcal{M}}: A(\mathcal{M})\to O$ в качестве коединицы соответствующая структура коалгебры на $A(\mathcal{M})$ аннулировалась умножением на p.

6.1. Пусть $e\neq p-1$. Здесь класс $\mathcal{A}(\nabla)\bmod R_1$ состоит из одного элемента (см. п. 5), следовательно, требуемая структура объекта категории $\mathfrak{G}_0$ на $\operatorname{Spec} A(\mathcal{M})$ существует. Аналогично обстоит дело в случаях $\mathcal{M}\in\mathrm{SH}_0^u$ или $\mathcal{M}\in\mathrm{SH}_0^c$ (см. замечание п. 5.4). В дальнейшем мы считаем, что $e=p-1$.

6.2. Пусть объекты $\mathcal{M}\in\mathrm{SH}_0$, $\mathcal{A}(\mathcal{M})\in\mathrm{Aug}_0$ заданы в обозначениях п. 4.1, 4.2. Условимся использовать сокращенные обозначения $J(\mathcal{M})=J(\mathcal{A}(\mathcal{M}))$ и т. д.

Для любого морфизма $\Delta\in\mathcal{A}(\nabla)\bmod R_1$ имеем

$(\Delta(\bar X_2), \Delta(\bar X_1), \Delta(\bar X_{\mathrm{et}})\equiv(\bar X_2, \bar X_1, \bar X_{\mathrm{et}})\otimes 1+1\otimes(\bar X_2, \bar X_1, \bar X_{\mathrm{et}})\bmod J(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M})$.

Из эквивалентности категорий этальных k- и O-алгебр получаем, что $\Delta|_{A(\mathcal{M})^{\mathrm{et}}}$ однозначно определяет структуру объекта категории $\mathfrak{G}_0^{\mathrm{et}}$ на $\operatorname{Spec}(A(\mathcal{M})^{\mathrm{et}})$. Эту групповую схему мы обозначим через $\mathfrak{G}^{\mathrm{et}}(\mathcal{M})$. Далее, для некоторых векторов $\bar j_2, \bar j_1, \bar j_{\mathrm{et}}$ с коэффициентами в $A(\mathcal{M})^{0,\mathrm{et}}\otimes A(\mathcal{M})^{0,\mathrm{et}}$ имеем

$$(\bar Z_2, \bar Z_1, \bar Z_{\mathrm{et}})=(\Delta(\bar X_2), \Delta(\bar X_1), \Delta(\bar X_{\mathrm{et}}))\equiv(\bar X_2, \bar X_1, \bar X_{\mathrm{et}})\otimes 1+$$
$$+1\otimes(\bar X_2, \bar X_1, \bar X_{\mathrm{et}})+\pi(\bar j_2, \bar j_1, \bar j_{\mathrm{et}})\bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}).$$

Легко получить, что пополняющее отображение $j_{\mathcal{M}}$ является коединицей тогда и только тогда, когда $\bar j_2, \bar j_1, \bar j_{\mathrm{et}}$ имеют коэффициенты в $A(\mathcal{M})^{\mathrm{et},0}\otimes A(\mathcal{M})^{\mathrm{et},0}$.

6.3. Из соотношений, определяющих векторы $\bar Z_2, \bar Z_1, \bar Z_{\mathrm{et}}$ в п. 6.2, получаем

$$-\frac{1}{p}\bar Z_2^p\equiv-\frac{1}{p}(\bar X_2^p\otimes 1+1\otimes\bar X_2^p)+\psi_1(\bar X_2\otimes 1+1\otimes\bar X_2)+$$
$$+\pi\bar j_2^p(\bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M})),$$
$$-\frac{\pi}{p}\bar Z_1^p\equiv-\frac{\pi}{p}(\bar X_1^p\otimes 1)-\frac{\pi}{p}(1\otimes\bar X_1^p)\bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}),$$
$$-\frac{\pi}{p}\bar Z_{\mathrm{et}}^p\equiv-\frac{\pi}{p}(\bar X_{\mathrm{et}}^p\otimes 1)-\frac{\pi}{p}(1\otimes\bar X_{\mathrm{et}}^p)+\pi\psi_1(\bar X_{\mathrm{et}}\otimes 1, 1\otimes\bar X_{\mathrm{et}})\times$$
$$\times\bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}).$$

Здесь

$$\psi_1(U, V)=\frac{1}{p}(U^p+V^p-(U+V)^p)\in\mathbb{Z}[U, V].$$

Далее, $\bar X_2^p\in\pi A(\mathcal{M})\subset J(\mathcal{M})$, откуда по свойству п. 6.2 § 1

$$\psi_1(\bar X_2\otimes 1, 1\otimes\bar X_2)\equiv\pi\bar\varepsilon\bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M})$$

для некоторого вектора $\bar\varepsilon$ с координатами в $A(\mathcal{M})^{\mathrm{et},0}\otimes A(\mathcal{M})^{\mathrm{et},0}$. Используя уравнения O-алгебры $A(\mathcal{M})$ из п. 4.2 и то, что Δ является морфизмом O-алгебр, т. е.

$$\left(-\frac{1}{p}\bar Z_2^p, -\frac{\pi}{p}\bar Z_1^p, -\frac{\pi}{p}\bar Z_{\mathrm{et}}^p\right)C=(\bar Z_2, \bar Z_1, \bar Z_{\mathrm{et}}),$$

получаем

$$(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1,\ \bar{j}_{et}) \equiv (\bar{j}_2^p,\ \bar{0},\ \bar{0})\, C + (\bar{\varepsilon},\ \bar{0},\ \psi_1(\bar{X}_{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et}))\times$$
$$\times C \bmod \pi A(\mathcal{M})^{et,0}\otimes A(\mathcal{M})^{et,0}.$$

Пусть $\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}) = \mathfrak{G}^{et}(\mathcal{M})\otimes k$, где $\mathfrak{G}^{et}(\mathcal{M})$ — этальный объект категории $\mathfrak{G}_0$ из п. 6. 2. Тогда

$$\psi_1(\bar{X}_{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et}) \bmod \pi \in Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$$

и его инвариант inv из § 1 п. 4 равен

$$-\bar{X}_{et}^p \bmod \pi = -\bar{X}_{et} C_{et} \bmod \pi.$$

Покажем, что $\bar{\varepsilon}\in Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$. Для этого достаточно убедиться в том, что $\bar{\varepsilon}^p\in Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$. Действительно,

$$\pi\bar{\varepsilon}^p \equiv \pi\cdot\frac{1}{\pi^p}\psi_1(\bar{X}_2^p\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_2^p) \equiv \pi\psi_1\left(\frac{\bar{X}_2^p}{\pi}\otimes 1,\ 1\otimes\frac{\bar{X}_2^p}{\pi}\right)\equiv$$
$$\equiv \pi\psi_1(\bar{X}_{et}A^{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et}A^{et}) \bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M})$$

(использовали уравнения $A(\mathcal{M})$ из п. 4. 2), следовательно, $\bar{\varepsilon}^p \bmod \pi = \psi_1(\bar{X}_{et}A_{et}\otimes 1,$ $1\otimes \bar{X}_{et}A_{et}) \bmod \pi\in Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{inv}(\bar{\varepsilon}^p \bmod \pi) = -(\bar{X}_{et}A^{et})^p\times$ $\times \bmod \pi$, поэтому $\mathrm{inv}(\bar{\varepsilon} \bmod \pi) = -\bar{X}_{et}A^{et} \bmod \pi$.

Итак, вектор $(\bar{\varepsilon},\ \bar{0},\ \psi_1(\bar{X}_{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et})) \bmod \pi$ имеет своими коэффициентами 2-коциклы из $Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$ и, пользуясь линейностью инварианта, получаем

$$\mathrm{inv}[\bar{\varepsilon},\ \bar{0},\ \psi_1(\bar{X}_{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et}))\, C] \bmod \pi =$$
$$= -[\bar{X}_{et}(A^{et},\ 0,\ C^{et})\, C] \bmod \pi = \bar{X}_{et}\left(0,\ 0,\ \frac{p}{\pi}E\right) \bmod \pi,$$

так как $(A^{et},\ 0,\ C^{et})$ нижняя строка матрицы $-\frac{p}{\pi}C^{-1}$ (см. п. 4. 1). Следовательно, первые две компоненты вектора $[(\bar{\varepsilon},\ \bar{0},\ \psi_1(\bar{X}_{et}\otimes 1,\ 1\otimes \bar{X}_{et}))\, C] \bmod \pi$ имеют коэффициенты в $B^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$. Эти вычисления могут быть обращены, и, в результате мы получаем следующее.

Утверждение. *Множество морфизмов $\Delta\in\mathcal{A}(\nabla) \bmod R_1 \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),$ $\mathcal{A}(\mathcal{M})\otimes\mathcal{A}(\mathcal{M}))$, удовлетворяющих аксиоме коединицы, может быть отождествлено с множеством решений $(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1)$ в $k^0(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))^{\otimes 2}$ системы $(\bar{j}_2^p,\ \bar{0})\, C^c =$ $= (\bar{j}_2,\ \bar{j}_1) + (\bar{b}_2,\ \bar{b}_1)$, где $\bar{b}_2,\ \bar{b}_1$ — векторы с коэффициентами в $B^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$, однозначно определенные представлением $\mathcal{M}$ с помощью соотношений п. 4. 1.*

6.4. Утверждение. *Пусть морфизм $\Delta\in\mathcal{A}(\nabla) \bmod R_1$ отвечает векторам $(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1)$ из утв. п. 6. 3. Тогда*

а) *Δ удовлетворяет аксиомам коассоциативности и кокоммутативности тогда и только тогда, когда $\bar{j}_2,\ \bar{j}_1$ имеют коэффициенты в $Z^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$;*

б) *Δ определяет структуру коалгебры, аннулируемой умножением на p тогда и только тогда, когда $\bar{j}_2,\ \bar{j}_1$ имеют коэффициенты в $B^2(\mathfrak{G}_k^{et}(\mathcal{M}))$.*

Доказательство.

а) Согласно п. 4. 4,

$$[\Delta\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta)](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1) = [\Delta\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id})](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1) \Leftrightarrow [\Delta\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta)](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1)\equiv$$
$$\equiv[\Delta\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id})](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1) \bmod J'(\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}),$$

и легко видеть, что это сравнение эквивалентно равенству

$$(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1)\otimes 1 + (\Delta\otimes\mathrm{id})(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1) + 1\otimes(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1).$$

Аналогично кокоммутативность Δ эквивалентна симметричности $\bar{j}_2$ и $\bar{j}_1$.

б) В обозначениях п. 4 § 1 имеем

$$(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1) \in B^2(\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}(\mathcal{M})) \Leftrightarrow \operatorname{inv}(\bar{j}_2,\ \bar{j}_1) =$$

$$= 0 \Leftrightarrow \sum_{0 \leqslant m < p} [(\Delta - \mathrm{id} \otimes 1 - 1 \otimes \mathrm{id}) \cdot ([m] \otimes \mathrm{id}) \cdot \mathrm{mult}](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1) \in J'(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{0 \leqslant m < p} ([m+1] - [m] - \mathrm{id})(\bar{X}_2,\ \bar{X}_1) \in J'(\mathcal{M}) \Leftrightarrow [p](\bar{X}_2) - p\bar{X}_2 \in J'(\mathcal{M}),$$

$$[p](\bar{X}_1) - p\bar{X}_1 \in J'(\mathcal{M}).$$

Но $p\bar{X}_2,\ p\bar{X}_1 \in J'(\mathcal{M})$, так как $\bar{X}_2,\ \bar{X}_1 \in A(\mathcal{M})^c$ (см. п. 6.2, § 1 и п. 4.2), поэтому по утв. п. 4.4 $[p](\bar{X}_2) = [p](\bar{X}_1) = 0$.

6.5. Утверждение. *В классе эквивалентности $\mathcal{A}(\nabla) \bmod R_1$ существует морфизм Δ, снабжающий* $\operatorname{Spec} A(\mathcal{M})$ *структурой объекта $\mathfrak{G}(\mathcal{M})$ категории $\mathfrak{G}_0$.*

Доказательство. Достаточно показать, что система из утв. п. 6.3 разрешима с соблюдением условий утв. 6.4. Воспользуемся k-линейным отображением

$$s : B^2(\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}(\mathcal{M})) \to k^0(\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}(\mathcal{M}))$$

из п. 4.3 § 1 и положим $s(\bar{b}_2) = \bar{a}_2$, $s(\bar{b}_1) = \bar{a}_1$, где $\bar{b}_2$, $\bar{b}_1$ — векторы из утв. п. 6.3. Как было отмечено в конце п. 5.1, существуют $(\bar{r}_2,\ \bar{r}_1)$ с коэффициентами в $k^0(\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}(\mathcal{M}))$, удовлетворяющие соотношениям

$$(\bar{r}_2^p,\ \bar{0})\, C^c = (\bar{r}_2,\ \bar{r}_1) + (\bar{a}_2,\ \bar{a}_1).$$

Тогда $\bar{j}_2 = \delta^+\bar{r}_2$, $\bar{j}_1 = \delta^+\bar{r}_1$, где $\delta^+ = \Delta - \mathrm{id} \otimes 1 - 1 \otimes \mathrm{id}$, дают требуемое решение системы из утв. 6.3, ч. т. д.

7. Функтор $\mathfrak{G}^* : \mathrm{SH}_0 \to \mathfrak{G}_0^*$.

7.1. Для $\mathcal{M} \in \mathrm{SH}_0$ выберем некоторую структуру коалгебры объекта категории $\mathfrak{G}_0$ на $A(\mathcal{M})$ из п. 6. Если $G \in \mathfrak{G}_0$, то обозначим через $\mathrm{Aug}(G)$ объект $(A(G),\ e_G) \in \mathrm{Aug}_0$ из замечания п. 1. В множестве $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Aug}\, G)$ рассмотрим подмножество $\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Aug}\, G)$, состоящее из морфизмов, согласованных со структурами коалгебр на $A(\mathcal{M})$ и $A(G)$, т. е. таких морфизмов F категории Aug_0, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{CD}
\mathcal{A}(\mathcal{M}) @>{F}>> \mathrm{Aug}(G) \\
@V{\Delta}VV @VV{\Delta_G}V \\
\mathcal{A}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{M}) @>{F \otimes F}>> \mathrm{Aug}(G) \otimes \mathrm{Aug}(G)
\end{CD}$$

Тем же символом R_1 обозначим отношение эквивалентности на $\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Aug}\, G)$, индуцированное отношением эквивалентности R_1 на $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathcal{A}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Aug}(G))$.

Для любого морфизма $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathrm{H}_0}(\mathcal{M},\ \mathcal{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\, G))$ и $i = 1,\ 2$ обозначим через λ_i следующую композицию:

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathcal{M} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\, G) \xrightarrow{\mathcal{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}(\mathrm{pr}_i))} \mathcal{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}(G \times G)),$$

где pr_i являются проекциями на i-е слагаемое $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ и $G \times G \to G$. Обозначим через $\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathcal{S}\mathrm{H}_0}(\mathcal{M},\ \mathcal{S}\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\, G))$ подмножество в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}\mathrm{H}_0}(\mathcal{M},\ \mathcal{S}\mathrm{H} \times (\mathrm{Aug}(G))$, состоящее из морфизмов λ таких, что в $\mathcal{S}\mathrm{H}_0$ коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\nabla"] & \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G) \arrow[d, "\mathscr{P}\,\mathrm{H}(\Delta_G)"] \\
\mathscr{M} \oplus \mathscr{M} \arrow[r, "\lambda_1+\lambda_2"] & \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,(G \times G))
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что $\lambda \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G))$ тогда и только тогда, когда для любого $m \in M^0$ выполнено: если $\lambda(m) = \hat{a} \bmod J(G)$, $\hat{a} \in A(G)$, то $\Delta_G(\hat{a}) \equiv \equiv \hat{a} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{a} \bmod J(G \times G)$.

7.2. Утверждение. *Биекция из утв. 5.3 индуцирует биекцию*

$$\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathrm{Aug}\,G)/R_1 \simeq \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G)).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\xi : \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathrm{Aug}(G)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G)),$$

полученное из отображения ξ п. 5.1. Мы должны показать, что

$$\mathrm{Im}\,\xi = \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\,\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G)).$$

Предположим, что $\mathscr{M}$ и $\mathscr{A}(\mathscr{M})$ заданы в обозначениях п. 4.1 и 4.2 и используем обозначения предыдущего пункта.

7.3 Пусть $F \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathrm{Aug}(G))$, тогда

$$\Delta_G(F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{\mathrm{et}})) = [\Delta \cdot (F \otimes F)](\bar{X}_2,\ \bar{X}_1,\ \bar{X}_{\mathrm{et}}) \equiv$$
$$\equiv (F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),\ F(\bar{X}_{\mathrm{et}})) \otimes 1 + 1 \otimes (F(\bar{X}_2),\ F(\bar{X}_1),$$

$F(\bar{X}_{\mathrm{et}}) \bmod J(G \times G)$. Отсюда видно, что

$$\xi(F) \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\,\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G)).$$

7.4. Пусть

$$\lambda \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\,\mathrm{H}_O}(\mathscr{M},\ \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}\,G))$$

и

$$F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathrm{Aug}(G))$$

таков, что $\xi(F) = \lambda$. Тогда в обозначениях п. 7.1 $\xi(F \otimes F) = \lambda_1 + \lambda_2$, и из соответствующей диаграммы вытекает, что

$$\Delta \cdot (F \otimes F) \underset{R_1}{\sim} F \cdot \Delta_G \text{ в } \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),\ \mathrm{Aug}(G \times G)).$$

В случае $e \neq p - 1$ следует, что $F \cdot \Delta_G = \Delta \cdot (F \otimes F)$, т. е. $F \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}),$ $\mathrm{Aug}(G))$, и утв. доказано.

7.5. Пусть $e = p - 1$. Тогда

$$[\Delta \cdot (F \otimes F)](\bar{X}_{\mathrm{et}}) = (F \cdot \Delta_G)(\bar{X}_{\mathrm{et}}),$$

и, следовательно, F определяет морфизм коалгебр $A(\mathscr{M})^{\mathrm{et}} \to A(G^{\mathrm{et}})$. Далее,

$$[\Delta \cdot (F \otimes F)](\bar{X}_1) = (F \cdot \Delta_G)(\bar{X}_1) + \pi \bar{q}_1 \bmod J'(G \times G),$$
$$[\Delta \cdot (F \otimes F)](\bar{X}_2) = (F \cdot \Delta_G)(\bar{X}_2) + \pi \bar{q}_2 \bmod J'(G \times G),$$

где $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ — векторы с коэффициентами в $A(G^{\mathrm{et}})^0 \otimes A(G^{\mathrm{et}})^0$, удовлетворяющие соотношению

$$(\bar{q}_2^p,\ 0)\, C^c = (\bar{q}_2,\ \bar{q}_1) \bmod \pi.$$

Лемма. $\bar{q}_1 \bmod \pi$, $\bar{q}_2 \bmod \pi$ *имеют коэффициенты в* $B^2(G_k^{\mathrm{et}})$.

Доказательство. В п. 6 было получено, что

$$\Delta \bar{X}_1 \equiv \bar{X}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{X}_1 + \pi \bar{j}_1 \bmod J'(\mathscr{M}),$$

где

$$\bar{j}_1 \bmod \pi \in B^2(\mathfrak{G}_k^{\mathrm{et}}(\mathscr{M})),$$

следовательно,

$$[\Delta \cdot (F \otimes F)](\bar{X}_1) - F\bar{X}_1 \otimes 1 - 1 \otimes F\bar{X}_1 \equiv \pi\bar{\varepsilon}_1 \bmod J'(G \times G),$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 \equiv (F \otimes F)\bar{j}_1 \bmod \pi \in B^2(G_k^{\mathrm{et}}),$$

так как $F|_{A(\mathscr{M})^{\mathrm{et}}}$ является морфизмом коалгебр. Далее,

$$\pi\bar{q}_1 \equiv -[\Delta_G(F\bar{X}_1) - F\bar{X}_1 \otimes 1 - 1 \otimes F\bar{X}_1] + \pi\bar{\varepsilon}_1 (\bmod J'(G \times G)),$$

откуда

$$\Delta_G(F\bar{X}_1) - F\bar{X}_1 \otimes 1 - 1 \otimes F\bar{X}_1 = (\Delta_G - \mathrm{id} \otimes 1 - 1 \otimes \mathrm{id})(F\bar{X}_1) \equiv$$
$$\equiv \pi\bar{\eta}_1 \bmod J'(G \times G),$$

где вектор $\bar{\eta}_1$ имеет коэффициенты в $A(G^{\mathrm{et}})^0 \otimes A(G^{\mathrm{et}})^0$. Из этого же соотношения теперь следует, что $\bar{\eta}_1 \bmod \pi$ имеет коэффициенты в $B^2(G_k^{\mathrm{et}})$, поэтому для $\bar{q}_1 \equiv (\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\eta}_1) \bmod \pi$ лемма доказана. Аналогично рассматривается вектор $\bar{q}_2 \bmod \pi$.

7.6. Воспользуемся морфизмом $s: B^2(G_k^{\mathrm{et}}) \to k^0(G_k^{\mathrm{et}})$ из п. 4.3 § 1. Рассмотрим векторы $\bar{r}_2$, $\bar{r}_1$ с коэффициентами в $A(G^{\mathrm{et}})^0$ такие, что

$$\bar{r}_2 \bmod \pi = s(\bar{q}_2 \bmod \pi), \quad \bar{r}_1 \bmod \pi = s(\bar{q}_1 \bmod \pi).$$

Тогда

$$\delta^+\bar{r}_1 \equiv \bar{q}_1 \bmod \pi, \quad \delta^+\bar{r} \equiv \bar{q}_2 \bmod \pi \quad \text{и} \quad (\bar{r}_2^p, 0)C^c \equiv (\bar{r}_2, \bar{r}_1) \bmod \pi.$$

Рассмотрим эквивалентный F морфизм

$$F_1: \mathscr{A}(\mathscr{M}) \to \mathrm{Aug}\, G,$$

определенный соотношениями

$$F_1(\bar{X}_1) \equiv F(\bar{X}_1) + \pi\bar{r}_1 \bmod J'(G), \quad F_1(\bar{X}_2) \equiv F(\bar{X}_2) + \pi\bar{r}_2 \bmod J'(G).$$

Тогда (в обозначениях п. 7.3)

$$[\Delta \cdot (F_1 \otimes F_1)](\bar{X}_1) \equiv (F_1 \otimes F_1)(\bar{X}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{X}_1 + \pi\bar{j}_1) \equiv$$
$$\equiv F_1\bar{X}_1 \otimes 1 + 1 \otimes F_1\bar{X}_1 + \pi\bar{\varepsilon}_1 \equiv F\bar{X}_1 \otimes 1 + 1 \otimes F\bar{X}_1 + \pi(\bar{r}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \bar{r}_1 + \bar{\varepsilon}_1) \equiv$$
$$\equiv F\bar{X}_1 \otimes 1 + 1 \otimes F\bar{X}_1 + \pi(\Delta\bar{r}_1 - \bar{q}_1 + \bar{\varepsilon}_1) \equiv \Delta_G(F\bar{X}_1) + \pi\Delta_G(\bar{r}_1) \equiv$$
$$\equiv (F_1 \cdot \Delta_G)(\bar{X}_1) \bmod J'(G \times G).$$

Аналогично $[\Delta \cdot (F_1 \otimes F_1)](\bar{X}_2) \equiv (F_1 \cdot \Delta_G)(\bar{X}_2) \bmod J'(G \times G)$. Из утв. п. 4.4 следует, что $\Delta \cdot (F_1 \otimes F_1) = F_1 \cdot \Delta_G$, т. е. $F_1 \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}), \mathrm{Aug}\, G)$. Утверждение 7.2 доказано.

7.7. Выберем для каждого $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_0$ структуру коалгебры на $A(\mathscr{M})$ из п. 6 и обозначим через $\mathfrak{G}(\mathscr{M})$ соответствующую групповую схему категории $\mathfrak{G}_0$. Через $IM\mathfrak{G}$ обозначим полную подкатегорию в $\mathfrak{G}_0$, образованную объектами $\mathfrak{G}(\mathscr{M})$ для всех $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_0$, а через $IM\mathfrak{G}/R_1$ обозначим факторкатегорию, полученную введением на ее морфизмах отношения эквивалентности, фигурирующего в п. 7.1.

Из определения косложения Δ на $A(\mathscr{M})$ вытекает, что морфизм $i_{\mathscr{M}}: \mathscr{M} \to \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$ из п. 4.5 лежит в $\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$ (см. п. 7.1).

Следовательно, для любых $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathrm{SH}_0$ соответствие $\lambda \mapsto \lambda \cdot i_{\mathscr{M}_2}$ определяет вложение

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_2)) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_1), \mathscr{A}(\mathscr{M}_2))/R_1.$$

Теперь рассуждение из доказательства утв. 5.4 показывает, что определен строгий функтор $\mathfrak{G}^* : \mathrm{SH}_0 \to IM\mathfrak{G}/R_1$. Далее, непосредственно из конструкции объекта $\mathfrak{G}(\mathscr{M})$ вытекает, что $\mathfrak{G}^*$ — аддитивный функтор, R_1 — аддитивное отношение эквивалентности. В нашей ситуации рассуждение из доказательства утв. п. 5.5 дает, что эквивалентными нулевому морфизмами $F : \mathfrak{G}(\mathscr{M}_2) \to \mathfrak{G}(\mathscr{M}_1)$ категории $\mathfrak{G}_0$ являются в точности такие, которые разлагаются в композицию $\mathfrak{G}(\mathscr{M}_2) \to \mathfrak{G}(\mathscr{M}_2^{\mathrm{et}}) \to \mathfrak{G}(\mathscr{M}_1^m) \to \mathfrak{G}(\mathscr{M}_1)$ с однозначно определенными крайними морфизмами и произвольным средним морфизмом.

7.8. Лемма. *Для $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2 \in \mathrm{SH}_0$ морфизм $i_{\mathscr{M}_2*} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \to \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}_2)))$ является изоморфизмом и $\mathscr{M}_2 \simeq \mathrm{SH}(\mathfrak{G}(\mathscr{M}_2))$.*

Доказательство. Это сразу вытекает из утв. п. 4 § 2.

7.9. Утверждение.

а) $IM\mathfrak{G}/R_1 = \mathfrak{G}_0^*$;

б) *функтор $\mathfrak{G}^*$ квизиобратен к функтору SH^* из п. 3.3 § 2.*

Доказательство.

а) Согласно п. 7.8, для любого $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_0$ $\mathrm{SH}(\mathfrak{G}(\mathscr{M})) = \mathscr{M}$, поэтому в обозначениях конца п. 7.7 имеем $\mathfrak{G}(\mathscr{M}_2^{\mathrm{et}}) = \mathfrak{G}(\mathscr{M}_2)^{\mathrm{et}}$, $\mathfrak{G}(\mathscr{M}_1^m) = \mathfrak{G}(\mathscr{M}_1)^m$. Это означает, что $IM\mathfrak{G}/R_1$ является полной подкатегорией в категории $\mathfrak{G}_0^*$. Далее, пусть $G \in IM\mathfrak{G}/R_1$, тогда из леммы 7.8 следует, что применение функтора SH индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathrm{SH}(G), \mathrm{SH}(G)) \simeq \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathrm{SH}(G), \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathrm{Aug}(G)) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0^*}(G, \mathfrak{G}(\mathrm{SH}(G))).$$

Отсюда вытекает, что G канонически отождествляется с $\mathfrak{G}(\mathrm{SH}(G))$ и, следовательно, $IM\mathfrak{G}/R_1 \simeq \mathfrak{G}_0^*$.

б) Фактически все уже доказано в п. а). Добавим, что из леммы 7.8 вытекает, что $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0^*}(\mathfrak{G}(N), \mathfrak{G}(\mathscr{M}))$.

7.10. Замечание. В работе [3] вместо категории SH_0 была использована близкая категория $\mathscr{H}_0$. Небольшая неточность была допущена в определении морфизмов категории $\mathscr{H}_0$; в дополнение к определению морфизмов категории $\mathscr{H}_0$ в работе [3] необходимо ввести на этих морфизмах отношение эквивалентности: два морфизма эквивалентны тогда и только тогда, когда они совпадают (в обозначениях [3]) на $\varphi(M)$ и $\psi(M^1)$.

§ 4. Функтор $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{G} \otimes \mathrm{K}$ (здесь $\mathrm{k}=\mathrm{k}$)

1. Категории кофильтрованных модулей Галуа $C\widetilde{M}\Gamma$ и $C\widetilde{M}\Gamma^*$.

Пусть $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ группа Галуа алгебраического замыкания поля K, $M\Gamma$ категория конечных $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модулей. Объектами категории $CM\Gamma$ являются тройки (H, H^0, i), где H и H^0 объекты категории $M\Gamma$, $i : H \to H^0$ эпиморфизм в категории $M\Gamma$, H^0 тривиальный Γ-модуль. Всякий морфизм $\bar{f} : (H, H^0, i) \to (H_1, H_1^0, i_1)$ в категории $C\widetilde{M}\Gamma$ задается морфизмами $f : H \to H_1$, $f^0 : H^0 \to H_1^0$ категории $M\Gamma$ такими, что $fi_1 = if^0$. Категория $C\widetilde{M}\Gamma^*$ состоит из тех же объектов, что и категория $C\widetilde{M}\Gamma$, а морфизмами в ней являются морфизмы категории $CM\Gamma$, профакторизованные по подгруппе морфизмов $\bar{f}$ таких, что (в использованных выше обозначениях) $f^0=0$, $f|_{\mathrm{Ker}\,i}=0$.

2. Функторы $\mathrm{Aug}: C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma \to \mathrm{Aug}_0$, $\mathscr{P}\mathrm{H}: C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma \to \mathscr{P}\mathrm{H}_0$.

Для $\mathscr{H}=(H, H^0, i)\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$ положим $\mathrm{Aug}(\mathscr{H})=(A(\mathscr{H}), e)\in \mathrm{Aug}_0$, где $A(\mathscr{H})=i^*\,\mathrm{Map}^\Gamma(H^0, \bar{O})+\mathrm{Map}^\Gamma(H, \bar{\mathfrak{m}})$, $\bar{O}$ — кольцо целых элементов в $\bar{K}$, $\bar{\mathfrak{m}}$ — максимальный идеал в $\bar{O}$, а пополняющий морфизм e соответствует взятию значения в $0\in H$. Очевидно, конструкция объектов $\mathrm{Aug}(\mathscr{H})$ функториальна по $\mathscr{H}$, и мы получаем функтор $\mathrm{Aug}: C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma \to \mathrm{Aug}_0$.

Для упрощения дальнейших обозначений композицию функторов $C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma \xrightarrow{\mathrm{Aug}} \mathrm{Aug}_0 \xrightarrow{\mathscr{P}\mathrm{H}} \mathscr{P}\mathrm{H}_0$ мы будем просто обозначать через $\mathscr{P}\mathrm{H}$.

3. Функторы $C\Gamma: \mathfrak{G}_0 \to C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$, $C\Gamma^*: \mathfrak{G}_0^* \to C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*$.

Для $G\in\mathfrak{G}_0$ положим $C\Gamma(G)=(G(\bar{K}), G^{\mathrm{et}}(\bar{K}), i)\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$, где эпиморфизм $i: G(\bar{K})\to G^{\mathrm{et}}(\bar{K})=G^{\mathrm{et}}(K)$ получается переходом к функтору $\bar{K}$-точек из стандартного эпиморфизма групповых схем $G\to G^{\mathrm{et}}$ (см. п. 3.2, § 1). Хорошо известно, что функтор $G\mapsto G(\bar{K})$ является строгим, поэтому $C\Gamma$ тоже является строгим функтором. Далее, используя канонические точные последовательности в категории $\mathfrak{G}_0$ (см. п. 3.2, § 1) и описание факторов композиционного ряда групповой схемы $G\in\mathfrak{G}_0$ из [12], легко получить, что $C\Gamma^*$ является тоже строгим функтором. Действительно, предположим, что $u\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1, G_2)$ и $C\Gamma(u)\sim 0$ в категории $C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*$, т. е. $C\Gamma(u)$ разлагается в композицию $G_1(\bar{K})\to G_1^{\mathrm{et}}(\bar{K})\to G_2^c(\bar{K})\to G_2(\bar{K})$. Но $G_1^{\mathrm{et}}(\bar{K})$ тривиальный Γ-модуль и $[G_2^c(\bar{K})]^\Gamma=G_2^m(\bar{K})$ (см. описание Γ-модулей простых объектов категории $\mathfrak{G}_0$ в [12], п. 3.4), следовательно, средний морфизм пропускается через каноническое вложение $G_2^m(\bar{K})\subset G_2^c(\bar{K})$ и, так как $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1^{\mathrm{et}}, G_2^m)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}\Gamma}(G_1^{\mathrm{et}}(\bar{K}), G_2^m(\bar{K}))$, морфизм u эквивалентен нулю в категории $\mathfrak{G}_0^*$.

4. Пусть $\mathscr{M}\in SH_0$, $\mathscr{H}\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*$. Как в п. 7.1 § 3, рассмотрим подмодуль $\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}))\subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}))$, состоящий из морфизмов λ, для которых коммутативна диаграмма (аналог диаграммы из п. 7.1 § 3)

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{M} & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}) \\
\downarrow{\scriptstyle\nabla} & & \downarrow{\scriptstyle\mathscr{P}\mathrm{H}(+)} \\
\mathscr{M}\oplus\mathscr{M} & \xrightarrow{\lambda_1+\lambda_2} & \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}\times\mathscr{H})
\end{array}$$

Здесь $\lambda_i: \mathscr{M}\oplus\mathscr{M}\xrightarrow{\mathrm{pr}_i}\mathscr{M}\xrightarrow{\lambda}\mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H})\xrightarrow{\mathscr{P}\mathrm{H}(\mathrm{pr}_i)}\mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}\times\mathscr{H})$ для $i=1, 2$, а $+: \mathscr{H}\times\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ — морфизм категории $C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$, индуцированный операцией сложения.

Утверждение. *Имеет место функториальный по* $\mathscr{M}\in \mathrm{SH}_0$ *и* $\mathscr{H}\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$ *изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}))\simeq \mathrm{Hom}_{C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*}(\mathscr{H}, C\Gamma(\mathfrak{S}(\mathscr{M}))).$$

Доказательство.

4.1 Пусть $\mathscr{H}=(H, H^0, i)$, $C\Gamma(\mathfrak{G}(\mathscr{M}))=(H_{\mathscr{M}}, H^0_{\mathscr{M}}, i_{\mathscr{M}})$, где $H_{\mathscr{M}}=\mathfrak{G}(\mathscr{M})(\bar{K})$, $H^0_{\mathscr{M}}=\mathfrak{G}^{\mathrm{et}}(\mathscr{M})(\bar{K})$. Всякий $\bar{f}=(f, f^0)\in\mathrm{Hom}_{C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma}(\mathscr{H}, C\Gamma(\mathfrak{G}(\mathscr{M})))$ задается коммутативной диаграммой Γ-модулей

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & H_{\mathscr{M}} \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\mathscr{M}}} \\ H^0 & \xrightarrow{f^0} & H^0_{\mathscr{M}} \end{array}$$

Этой диаграмме отвечает следующая диаграмма морфизмов O-алгебр, перестановочных с соответствующими кодиагональными морфизмами

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}^\Gamma(H_{\mathscr{M}}, \bar{O}) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}^\Gamma(H, \bar{O}) \\ \uparrow{\scriptstyle i^*_{\mathscr{M}}} & & \uparrow{\scriptstyle i^*} \\ \mathrm{Map}^\Gamma(H^0_{\mathscr{M}}, \bar{O}) & \xrightarrow{f^{0,*}} & \mathrm{Map}^\Gamma(H^0, \bar{O}) \end{array}$$

Легко видеть. что задание такой диаграммы эквивалентно заданию морфизма $F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathrm{Aug}(\mathfrak{S}(\mathscr{M})), \mathrm{Aug}(\mathscr{H}))$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aug}(\mathfrak{S}(\mathscr{M})) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Aug}(\mathscr{H}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Aug}(\Delta)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Aug}(+)} \\ \mathrm{Aug}(\mathfrak{S}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{M})) & \xrightarrow{\text{«}F\otimes F\text{»}} & \mathrm{Aug}(\mathscr{H} \times \mathscr{H}) \end{array}$$

Поясним, что K-линейное продолжение морфизма $F: A(\mathfrak{S}(\mathscr{M})) \to A(\mathscr{H})$ после ограничения на O-подалгебру целых над O элементов дает морфизм f^*, а f^{0*} равен $F^{\mathrm{et}}: A(\mathfrak{S}(\mathscr{M}))^{et} = \mathrm{Map}^\Gamma(H^0_{\mathscr{M}}, \bar{O}) \to A(\mathscr{H})^{\mathrm{et}} = \mathrm{Map}^\Gamma(H^0, \bar{O})$. Таким образом, доказана

Лемма. $\mathrm{Hom}_{C\widetilde{M}\Gamma}(\mathscr{H}, C\Gamma(\mathfrak{S}(\mathscr{M}))) = \mathrm{Hom}^\Delta_{\mathrm{Aug}_O}(\mathrm{Aug}(\mathfrak{S}(\mathscr{M})), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H})$.

4.2. Предложение. *Отображение* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aug}_O}(\mathrm{Aug}(\mathfrak{S}(\mathscr{M})), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}))$ *из п. 5.1 § 3 индуцирует изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}^\Delta_{\mathrm{Aug}_O}(\mathrm{Aug}(\mathfrak{S})(\mathscr{M})), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H})/\mathrm{R}_1 \cong \mathrm{Hom}^\Delta_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{H})).$$

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство утв. п. 7. 2 § 3.

4. 3. Проверка того, что отношение эквивалентности R_1 и отношение эквивалентности на морфизмах категории $C\widetilde{M}\Gamma$ (см. п. 1) совпадают при отождествлении из леммы п. 4.1, осуществляется так же, как в п. 3. Утверждение доказано.

5. Для любого $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_O$ рассмотрим объект $\mathscr{H}_{\mathscr{M}} = C\Gamma(\mathfrak{S}(\mathscr{M}))$ категории $C\widetilde{M}\Gamma$ и обозначим через $i^*_{\mathscr{M}}$ морфизм категории $\mathscr{P}\,\mathrm{H}_O$, полученный композицией морфизма $i_{\mathscr{M}}: \mathscr{M} \to \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M}))$ из п. 4.5 § 3 и морфизма $\mathscr{P}\mathrm{H}(\gamma_{\mathscr{M}}): \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{M})) \to \mathscr{P}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}})$, где $\gamma_{\mathscr{M}} \in \mathrm{Hom}^\Delta_{\mathrm{Aug}_O}(\mathscr{A}(\mathscr{M}), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H}_{\mathscr{M}})$ естественное вложение. Очевидно, $i^*_{\mathscr{M}} \in \mathrm{Hom}^\Delta_{\mathscr{P}\mathrm{H}_O}(\mathscr{M}, \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}}))$.

Предложение. *Для любых* $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2 \in \mathrm{SH}_O$ *морфизм* $i^*_{\mathscr{M}_2}$ *индуцирует изоморфизм*

$$\eta: \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_O}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2) \cong \mathrm{Hom}^\Delta_{\mathrm{SH}_O}(\mathscr{M}_1, \mathscr{P}\,\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})).$$

Доказательство.

а) η инъективен. Этот факт эквивалентен инъективности $i^*_{\mathscr{M}}$, которая вытекает из утв. 4 так же, как инъективность морфизма $i_{\mathscr{M}}$ из п. 4. 5 § 3 вытекала в утв. п. 5. 4 § 3 из утв. 5. 3.

б) η сюръективен. Пусть существует $\lambda \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2}))$, который не пропускается через вложение $i^*_{\mathscr{M}_2}$. Легко видеть, что $\mathscr{N}=\lambda(\mathscr{M}_1)+ i^*_{\mathscr{M}_2}(\mathscr{M}_2)$ является подобъектом в $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$, являющимся объектом подкатегории SH_0, причем $\mathrm{rk}\,\mathscr{A}(\mathscr{N})>\mathrm{rk}(\mathrm{Aug}\,\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$. Далее, естественное вложение $\mathscr{N}$ в $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$ отвечает, согласно утв. п. 4, некоторому морфизму $F\in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}\times (\mathscr{A}(\mathscr{N}), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$. Пусть $\mathscr{B}=F(\mathscr{A}(\mathscr{N}))$, тогда F разлагается в композицию $\mathscr{A}(\mathscr{N})\xrightarrow{F'}\mathscr{B}\xhookrightarrow{j'}\mathrm{Aug}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$, и композиция $\mathscr{N}\xrightarrow{i_{\mathscr{N}}}\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{A}(\mathscr{N}))\xrightarrow{\mathscr{S}\mathrm{H}(F')}\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{B})\xrightarrow{\mathscr{S}\mathrm{H}(j')}\to\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$ дает исходное вложение $\mathscr{N}$ в $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$, поэтому $i_{\mathscr{N}}\cdot\mathscr{S}\mathrm{H}(F')$ инъективный морфизм. Так как $F\in\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathrm{Aug}_0}(\mathscr{A}(\mathscr{N}), \mathrm{Aug}\,\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$, $\mathscr{B}$ снабжается структурой O-алгебры групповой подсхемы в $\mathfrak{G}(\mathscr{N})$, причем F' определяет вложение этой подсхемы в $\mathfrak{G}(\mathscr{N})$. Следовательно, существуют $\mathscr{N}'\in\mathrm{SH}_0$, $\lambda'\in \mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{N}, \mathscr{N}')$ такие, что $\mathscr{B}=\mathscr{A}(\mathscr{N}')$ и $i_{\mathscr{N}}\cdot\mathscr{S}\mathrm{H}(F')=\lambda'\cdot i_{\mathscr{N}'}$. Так как $i_{\mathscr{N}}\circ\mathscr{S}\mathrm{H}(F')$ инъективен (см. выше), λ' тоже инъективен, откуда

$$\mathrm{rk}\,\mathscr{B}=\mathrm{rk}\,\mathscr{A}(\mathscr{N}')\geqslant \mathrm{rk}\,\mathscr{A}(\mathscr{N})>\mathrm{rk}(\mathrm{Aug}\,\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2}).$$

Но это противоречит тому, что $\mathscr{B}\subset\mathrm{Aug}(\mathscr{H}_{\mathscr{M}_2})$. Предложение доказано.

6. Теорема. *$C\Gamma$ и $C\Gamma^*$ являются вполне строгими функторами.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}_i\in\mathrm{SH}_0$, $G_i=\mathfrak{G}(\mathscr{M}_i)\in\mathfrak{G}_0$, $\mathscr{H}_i=C\Gamma(G_i)\in C M\Gamma$ для $i=1, 2$. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0^*}(G_2, G_1)=$$
$$=\mathrm{Hom}_{\mathrm{SH}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2)\overset{\text{п. }5}{\simeq}\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}_1, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}_2))\overset{\text{п. }4}{\simeq}\mathrm{Hom}_{C\tilde{M}\Gamma^*}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1).$$

Следовательно, $C\Gamma^*$ вполне строгий функтор. Если $R(G_2, G_1)$ и $R_1(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$ подгруппы соответственно в $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_2, G_1)$ и $\mathrm{Hom}_{C\tilde{M}\Gamma}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1)$, состоящие из эквивалентных нулевому морфизмов, то мы имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R(G_2, G_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_2, G_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0^*}(G_2, G_1) & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle C\Gamma} & & \downarrow{\scriptstyle C\Gamma} & & \wr\downarrow{\scriptstyle C\Gamma^*} & & \\
0 & \to & R_1(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1) & \to & \mathrm{Hom}_{C\tilde{M}\Gamma}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1) & \to & \mathrm{Hom}_{C\tilde{M}\Gamma^*}(\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_1) & \to & 0
\end{array}$$

Согласно п. 3, левый вертикальный морфизм является изоморфизмом, следовательно, средний морфизм тоже является изоморфизмом, и теорема доказана.

Замечание. Эта теорема представляет интерес лишь в случае $e=p-1$. Если $e<p-1$, то она эквивалентна результату из [12] о вполне строгости функтора $G\mapsto G(\bar{K})$ из категории $\mathfrak{G}_0$ в категорию $M\Gamma$. Действительно, в этом случае $C\Gamma(G)=(G(\bar{K}), G^{et}(\bar{K}), i)$ однозначно восстанавливается по Γ-модулю $G(\bar{K})$, так как здесь $G^{et}(\bar{K})$ наибольший Γ-тривиальный фактормодуль для Γ-модуля $G(\bar{K})$.

7. Из п. 4, 5 получаем следующий критерий.

Утверждение. *Пусть $\mathscr{H}=(H, H^0, i)\in C\tilde{M}\Gamma$, $\mathscr{M}\in\mathrm{SH}_0$, тогда следующие условия эквивалентны*

1) $\mathscr{H}\simeq C\Gamma(\mathfrak{G}(\mathscr{M}))$;

2) *существует инъективный морфизм* $\lambda\in\mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}))$, *причем* $\mathrm{rk}\,\mathscr{M}=\dim_{\mathbb{F}_p}H$.

8. В этом пункте мы считаем, что $e=p-1$.

8.1. Пусть $G\in\mathfrak{G}_0$, тогда в множестве $S(G)$ объектов G' категории $\mathfrak{G}_0$ таких, что Γ-модули $G'(\bar{K})$ изоморфны Γ-модулю $G(\bar{K})$, существуют наибольший

G^+ и наименьший G^- элементы (см. [12], п. 2.2). Элементы G^+ и G^- характеризуются следующим свойством: для любого $G' \in S(G)$ существуют (единственные) морфизмы $\alpha_{G'}: G^+ \to G'$ и $\beta_{G'}: G' \to G^-$ категории $\mathfrak{G}_0$ такие, что $\alpha_{G'} \otimes K = \beta_{G'} \otimes K = \mathrm{id}$.

Для произвольного $G \in \mathfrak{G}_0$ обозначим через $G(m)$ наибольший мультипликативный подобъект, выделяющийся в G прямым множителем, т. е. наибольший подобъект $G(m) \in \mathfrak{G}_0^m$ в G, такой, что $G = G(m) \times G_1$ для некоторой $G_1 \in \mathfrak{S}_0$. Тогда $G(m)^- = G(m)$ и $G(m)^+ \in \mathfrak{G}_0^{et}$.

8.2. Утверждение. *В обозначениях п. 8.1* $G^+ = G(m)^+ \times G_1$.

Доказательство. Положим $G' = G(m)^+ \times G_1$. Мы должны показать, что $G'^+ = G'$. Пусть $C\Gamma(G') = \mathscr{H} = (H, H^0, i)$, $C\Gamma(G'^+) = \mathscr{H}^+ = (H, H^+, i^+)$. Далее, для Γ-модуля H обозначим через ${}^\Gamma i: H \to {}^\Gamma H$ его проекцию на наибольший Γ-тривиальный фактормодуль и положим $\bar{\mathscr{H}} = (H, {}^\Gamma H, {}^\Gamma i)$. Очевидно, в категории $C\tilde{M}\Gamma$ имеются естественные морфизмы $\bar{\mathscr{H}} \to \mathscr{H}^+ \to \mathscr{H}$, которые после применения функтора $\mathscr{S}\mathrm{H}$ дают морфизмы категории $\mathscr{S}\mathrm{H}_0: \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}) \to \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}^+) \to \mathscr{S}\mathrm{H}(\bar{\mathscr{H}})$, комопозицию которых мы обозначим через η. Непосредственно проверяется, что

а) $\mathrm{Ker}\,\eta$ является подобъектом в $\mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H})$, изоморфным объекту мультипликативного типа из категории $\mathrm{SH}_0 \subset \mathscr{S}\mathrm{H}_0$;

б) для любого $\mathscr{M} \in \mathrm{SH}_0$ η индуцирует морфизм $\eta_*: \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H})) \to \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{S}\mathrm{H}(\bar{\mathscr{H}}))$. Так как $\mathscr{H} = C\Gamma(G')$, то (см. п. 7) существует $\mathscr{M}' \in \mathrm{SH}_0$ и инъективный $\lambda \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{S}\mathrm{H}(\mathscr{H}))$, причем $\mathrm{rk}\,\mathscr{M}' = \dim H$. Рассмотрим $\eta_*(\lambda) \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_0}(\mathscr{M}, \mathscr{S}\mathrm{H}(\bar{\mathscr{H}}))$ (см. б). Тогда $\mathrm{Ker}(\eta_*(\lambda))$ является мультипликативным подобъектом в $\mathscr{M}$ и из существования наибольшего мультипликативного фактора у $\mathscr{M}$ (см. п. 5.6, § 1) вытекает, что $\mathrm{Ker}(\eta_*(\lambda))$ выделяется прямым слагаемым в $\mathscr{M}$ в категории SH_0. Применяя антиэквивалентность SH^* из § 3, видим, что в групповой схеме G' выделяется мультипликативный прямой множитель. Согласно выбору G', этот множитель равен 0. Это означает, что $\mathrm{Ker}(\eta_*\lambda) = 0$, т. е. $\eta_*(\lambda)$ инъективен, откуда (см. п. 7) $\bar{\mathscr{H}} = C\Gamma(G')$ и $\mathscr{H} = \mathscr{H}^+ = \bar{\mathscr{H}}$, ч. т. д.

8.3. Следствие. *Пусть $G \in \mathfrak{G}_0$, $G(\bar{K}) = H$ — соответствующий Γ-модуль. Тогда $C\Gamma(G^+) = (H, {}^\Gamma H, {}^\Gamma i) \in C\tilde{M}\Gamma$ (в обозначениях п. 8.2).*

8.4. Следствие. *Пусть $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_0$, тогда*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1^+, G_2^+) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_K}(G_1 \otimes K, G_2 \otimes K),$$

где $\mathfrak{G}_K$ — категория групповых схем над полем K.

Доказательство. Пусть $C\Gamma(G_j^+) = \mathscr{H}_j^+$ для $j = 1, 2$. Тогда $\mathscr{H}_j^+ = (H_j, {}^\Gamma H_j, {}^\Gamma i_j)$ (см. п. 8.3) и, следовательно,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1^+, G_2^+) = \mathrm{Hom}_{C\tilde{M}\Gamma}(\mathscr{H}_1^+, \mathscr{H}_2^+) =$$
$$= \mathrm{Hom}_{M\Gamma}(H_1, H_2) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_K}(G_1 \otimes K, G_2 \otimes K).$$

8.5. С помощью двойственности Картье из п. 8.4 получаем следующее. Следствие. *Для любых $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_0$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_0}(G_1^-, G_2^-) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{G}_K}(G_1 \otimes K, G_2 \otimes K).$$

8.6. Из доказательства утв. п. 8.2 вытекает следующее.

Следствие. *Пусть $G', G'' \in \mathfrak{G}_0$ таковы, что $G' \otimes K \simeq G'' \otimes K$. Тогда существуют $G_1', G_2'' \in \mathfrak{G}_0^m$, G_2', $G_1'' \in \mathfrak{G}_0^{et}$, $H \in \mathfrak{G}_0$ такие, что $G' = G_1' \times G_2' \times H$, $G'' = G_1'' \times G_2'' \times H$ и $G_1' \otimes K \simeq G_1'' \otimes K$, $G_2' \otimes K \simeq G_2'' \otimes K$.*

§ 5. Связь с модулярными кристаллическими представлениями ($\mathrm{k}=\bar{\mathrm{k}}$)

В п. 1—2 этого параграфа будут сформулированы результаты, относящиеся к существованию и описанию образа вполне строгого функтора $\mathcal{V}$ из категории конечных фильтрованных модулей Дьедонне (см. п. 1. 2) в категорию $C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*$. В случае $e=1$ этот функтор был использован автором в [4] для описания модулярных кристаллических представлений группы Галуа Γ, т. е. $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модулей, являющихся подфакторами инвариантных решеток в кристаллических $\mathbb{Q}_p[\Gamma]$-модулях, построенных в работе [10] Фонтэна и Лаффэ.

1. Функтор $\mathcal{V}$.

1. 1. Категория $\mathcal{M}F_1$. Ее объектами являются аннулируемые умножением на π O-модули M, снабженные убывающей фильтрацией $M=M^0\supset M^1\supset\ldots\supset\supset M^{p-1}\supset M^p=0$ с помощью O-подмодулей M^i и σ-линейными морфизмами $\varphi_i: M^i\to M$ для $0\leqslant i<p$ такими, что $\varphi_i(M^{i+1})=0$. Морфизмами в $\mathcal{M}F_1$ являются морфизмы O-модулей, сохраняющие фильтрацию и перестановочные со структурными морфизмами φ_i, $0\leqslant i<p$.

1. 2. Категория конечных фильтрованных модулей Дьедонне MF_1. Эта категория является полной подкатегорией в $\mathcal{M}F_1$, состоящей из O-модулей M конечной длины над O таких, что $\sum\limits_{0\leqslant i<p}\varphi_i(M^i)=M$. MF_1 является абелевой категорией. Для $0\leqslant j<p$ через $MF_1(j)$ обозначим полную подкатегорию в MF_1, состоящую из O-модулей M, для которых $M^{j+1}=0$.

1. 3. Функтор $\mathcal{M}\mathcal{F}: C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma\to\mathcal{M}F_1$.

Пусть $\mathcal{H}=(H,\ H^0,\ i)\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$, $\bar{O}$ и $\bar{\mathfrak{m}}$ — соответственно кольцо целых чисел и максимальный идеал алгебраического замыкания $\bar{K}$ поля K, v — показатель поля $\bar{K}$ такой, что $v(\pi)=1$. Если $0\leqslant i<p$, то для всякой функции $\hat{f}\in \mathrm{Map}^\Gamma(H,\ \bar{O})$, удовлетворяющей условию: $v(\hat{f}(h))\geqslant i/p$ для всех $h\in H$, определена новая функция $\varphi_i(\hat{f})$ соотношением

$$\varphi_i(\hat{f})(h)=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^i\hat{f}(h)^p,\ h\in H.$$

Пусть, как в п. 2 § 4, $A(\mathcal{H})=\mathrm{Map}^\Gamma(H,\ \bar{\mathfrak{m}})+i^*\mathrm{Map}^\Gamma(H^0,\ \bar{O})$. Рассмотрим O-модуль $\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})=A(\mathcal{H})/\pi A(\mathcal{H})$ и снабдим его убывающей фильтрацией $\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})^i$ для $0\leqslant i<p$ следующим образом: $f\in\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})^i\Leftrightarrow$ существует $\hat{f}\in A(\mathcal{H})$ такая, что $\hat{f}\bmod\pi=f$, для всех $h\in H$ $v(\hat{f}(h))\geqslant i/p$ и $\varphi_i(\hat{f})\in A(\mathcal{H})$. В этих обозначениях σ-линейные морфизмы $\varphi_i:\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})^i\to\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})$ определены соотношениями $f\mapsto\varphi_i(\hat{f})\bmod\pi A(\mathcal{H})$. Таким образом, на O-модуле $\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})$ построена структура объекта категории $\mathcal{M}F_1$ и отображение $\mathcal{H}\mapsto\mapsto\mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H})$, очевидным образом, определяет функтор $\mathcal{M}\mathcal{F}: C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma\to\mathcal{M}F_1$.

1. 4. Мы не будем описывать конструкцию вполне строгого функтора $\mathcal{V}: MF_1\to C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma^*$, зато сформулируем следующий критерий.

K-критерий. *Пусть* $\mathcal{H}=(H,\ H^0,\ i)\in C\widetilde{\mathcal{M}}\Gamma$, $M\in MF_1$. ***Изоморфизм*** $\mathcal{H}\simeq\mathcal{V}(M)$ *имеет место тогда и только тогда*, ***когда*** $\dim_k M=\dim_{\mathbb{F}_p}H$ ***и*** *существует инъективный морфизм* $\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}F_1}(M,\ \mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H}))$, ***для которого*** *коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad\lambda\quad} & \mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H}) \\ \downarrow{\scriptstyle\nabla} & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{M}\mathcal{F}(+)} \\ M\oplus M & \xrightarrow{\lambda_1+\lambda_2} & \mathcal{M}\mathcal{F}(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) \end{array}$$

Здесь (ср. с п. 4, §4) ∇ диагональный морфизм, $+ : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ морфизм, индуцированный операцией сложения и для $i = 1, 2$

$$\lambda_i : M \oplus M \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} M \xrightarrow{\lambda} \mathscr{MF}(\mathscr{H}) \xrightarrow{\mathscr{MF}(\mathrm{pr}_i)} \mathscr{MF}(\mathscr{H} \times \mathscr{H}).$$

2. Описание образа функтора $\mathscr{V}$.

2.1. Характеры простых объектов категории $C\widetilde{M}\Gamma^*$.

Хотя категория $C\widetilde{M}\Gamma^*$ не является абелевой, в ней можно определить короткие точные последовательности и представить любой ее объект в виде последовательных расширений с помощью простых объектов. Простыми объектами категории $C\widetilde{M}\Gamma^*$ являются объекты вида $(H, 0, 0)$, где H простой $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модуль и объекты, изоморфные объекту $(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p, \mathrm{id})$, где $\mathbb{F}_p$ снабжен тривиальным действием группы Γ.

Пусть $\chi : \Gamma \to k^*$ произвольный характер группы Γ, тогда для подходящего натурального N существует целое k, $0 < k \leqslant p^N - 1$ такое, что $\chi = \chi_N^k$, где $\chi_N(\tau) = (\tau\pi_N \cdot \pi_N^{-1}) \bmod \pi$ для произвольного $\tau \in \Gamma$ и $\pi_N \in \bar{K}$ такого, что $\pi_N^{p^N-1} + \pi = 0$. Соответствие $\chi \mapsto r(\chi) := k/(p^N - 1)$ определяет биекцию множества характеров χ группы Γ (со значениями в k^*) и множества рациональных p-целых чисел из $(0, 1]$. Удобно ввести дополнительный экземпляр тривиального характера χ_0^{et}, положив $r(\chi_0^{\mathrm{et}}) = 0$. Таким образом, мы можем описать всякий простой объект $\mathscr{H}$ категории $C\widetilde{M}\Gamma^*$, сопоставив ему множество характеров $S(\mathscr{H})$ следующим образом: если $\mathscr{H} = (H, 0, 0)$, то $H \otimes_{\mathbb{F}_p} k = \bigoplus_{\chi \in S(\mathscr{H})} H_\chi$, где для любого $\chi \in S(\mathscr{H})$ имеем $0 < r(\chi) \leqslant 1$; если же $\mathscr{H} \simeq (\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p, \mathrm{id})$, то полагаем $S(\mathscr{H}) = \{\chi_0^{\mathrm{et}}\}$.

2.2. Специальные модули Дьедонне наклона 0.

Пусть $\mathscr{L}$ дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$ с алгебраически замкнутым полем вычетов k, t — некоторый униформизирующий элемент в $\mathscr{L}$, $\Gamma_{\mathscr{L}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathscr{L}}/\mathscr{L})$, $\mathscr{L}_{\mathrm{mr}}$ — максимальное слабо разветвленное расширение $\mathscr{L}$, $\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}} = \mathrm{Gal}(\mathscr{L}_{\mathrm{mr}}/\mathscr{L})$. Обозначим через Φ $k[\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}}]$-подмодуль в $\mathscr{L}_{\mathrm{mr}}$, порожденный элементами вида t_N^{-k}, где k, N — натуральные числа, $t_N^{p^N-1} + t = 0$, $(k, p) = 1$. Определим категорию специальных модулей Дьедонне «наклона 0» $\mathrm{SMD}_{\mathscr{L}}$, объектами которой являются пары (M_0, φ), где M_0 — конечномерный над $\mathbb{F}_p$ $\mathbb{F}_p[\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}}]$-модуль, $\varphi : M_0 \to \Phi \otimes_{\mathbb{F}_p} M_0$ — морфизм $\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}}$-модулей, являющийся нильпотентным (т. е. $\varphi \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi) \circ \ldots \circ (\mathrm{id}^{\otimes n} \otimes \varphi) = 0$), Морфизмами в $\mathrm{SMD}_{\mathscr{L}}$ являются морфизмы $\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}}$-модулей, перестановочные со структурными морфизмами φ.

Утверждение. *Существует антиэквивалентность $\mathscr{F}$ категории конечных $\mathbb{F}_p[\Gamma_{\mathscr{L}}]$-модулей и категории* $\mathrm{SMD}_{\mathscr{L}}$ (см. [4]).

Отметим, что если $(M_0, \varphi) \in \mathrm{SMD}_{\mathscr{L}}$, $m_1, \ldots, m_N$ — $\mathbb{F}_p$-базис M_0, $\varphi(m_i) = \sum_j \alpha_{ij} \otimes m_j$, $\alpha_{ij} \in \Phi$, $1 \leqslant i \leqslant N$, то соответствующий $\mathbb{F}_p[\Gamma_{\mathscr{L}}]$-модуль $\mathscr{F}^{-1} \times \times ((M_0, \varphi))$ восстанавливается, как группа $\bar{\mathscr{L}}$-точек групповой схемы $\mathrm{Spec}\, \mathscr{L} \times \times [T_1, \ldots, T_N]$, где $T_i^p = T_i + \sum_j \alpha_{ij} T_j$ и косложение задано соотношением $\Delta T_i = T_i \otimes 1 + 1 \otimes T_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Кроме того, $\mathbb{F}_p[\Gamma_{\mathscr{L}, \mathrm{mr}}]$-модуль M_0 двойствен полупростой оболочке $\mathbb{F}_p[\Gamma_{\mathscr{L}}]$-модуля $\mathscr{F}^{-1}((M_0, \varphi))$.

2.3. mult-условие.

Рассмотрим формальную группу Любина—Тейта с кольцом эндоморфизмов $\mathbb{Z}_p[\pi]$ (напомним, что π — униформизирующий элемент кольца O такой, что $\pi^e + p = 0$) и обозначим через L' расширение поля K, полученное присоединением всех точек кручения этой формальной группы. Тогда $\mathrm{Gal}(L'/K) =$

$=\mathbb{Z}_p[\pi]^* \simeq \Delta \times U_1$, где Δ — подгруппа представителей Тейхмюллера мультипликативной группы $\mathbb{F}_p^*$ поля вычетов кольца $\mathbb{Z}_p[\pi]$, U_1 — группа главных единиц в $\mathbb{Z}_p[\pi]$. Положим $L=L'^{\Delta}$. Тогда L/K является бесконечным «строго арифметически проконечным» расширением и к нему можно применить конструкцию функтора «поле норм» из работы [14]. Эта конструкция позволяет отождествить подгруппу $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(\bar{K}/L) \subset \Gamma$ с группой Галуа дискретно нормированного поля $\mathscr{L}$ характеристики p, так называемого поля норм расширения L/K. Положим, $\Gamma_{\mathscr{L}} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathscr{L}}/\mathscr{L})$ и заметим, что отождествление $\Gamma_L = \Gamma_{\mathscr{L}}$ позволяет отождествить группы Галуа Γ_{mr} и $\Gamma_{\mathscr{L},\mathrm{mr}}$ максимальных слабо разветвленных расширений соответственно полей K и $\mathscr{L}$.

Перейдем к формулировке mult-условия. Пусть $\mathscr{H}=(H, H^0, i) \in C\widetilde{M}\Gamma$. Ограничим $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модули H и H^0 на подгруппу Γ_L, используем отождествление $\Gamma_L = \Gamma_{\mathscr{L}}$ (см. выше) и применим функтор $\mathscr{F}$ из п. 2. 2. Мы получаем мономорфизм $\mathscr{F}(i):(M_0^0, 0) \to (M_0, \varphi)$ категории $\mathrm{SMD}_{\mathscr{L}}$, где $\mathscr{F}(H)=(M_0, \varphi)$, $\mathscr{F}(H^0)=(M_0^0, 0)$. Здесь M_0 и M_0^0 являются Γ_{mr}-модулями (см. выше) и, как было отмечено в п. 2. 2, M_0 двойствен полупростой оболочке $\mathbb{F}_p[\Gamma_L]$-модуля H, а M_0^0 двойствен тривиальному Γ_{mr}-модулю H^0 и, следовательно, сам является тривальным Γ_{mr}-модулем. Если мы условимся, что тривиальные характеры χ_0 и χ_0^{et} (см. п. 2. 1) двойственны друг другу, то естественно считать, что в разложении $M_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} k = \oplus_{\chi} M_{0,\chi}$ по всевозможным (включая χ_0^{et}) характерам группы Γ (со значениями в k^*) мы имеем $M_{0,\chi_0}=M_0^0 \otimes k$, а $M_{0,\chi_0^{\mathrm{et}}}$ является некоторым дополнением к M_{0,χ_0} в $M_0^{\Gamma} \otimes k \subset M_0 \otimes k$. С учетом этого соглашения k-линейное продолжение морфизма φ

$$\varphi \otimes k : M_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} k \to \Phi \otimes_{\mathbb{F}_p} (M_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} k)$$

задается набором своих (χ_1, χ_2)-компонент

$$\varphi_{\chi_1,\chi_2} : M_{0,\chi_1} \to \Phi \otimes_{\mathbb{F}_p} M_{0,\chi_2},$$

где χ_1, χ_2 — произвольные (включая χ_0^{et}) характеры группы Γ со значениями в k^*.

Мы будем говорить, что исходный объект $\mathscr{H}=(H, H^0, i)$ категории $C\widetilde{M}\Gamma^*$ удовлетворяет mult-условию, если в использованных выше обозначениях имеем: *если* $r(\chi_1) \geqslant r(\chi_2)$, *то* $\varphi_{\chi_1,\chi_2} \circ \mathrm{mult}=0$, *где* $\mathrm{mult}: \Phi \otimes_{\mathbb{F}_p} M_{0,\chi_2} \times \Phi \otimes_k M_{0,\chi_2}$ *естественное отображение.*

2.4. Для $0 \leqslant j < p$ обозначим через $\mathscr{V}(j)$ ограничение функтора $\mathscr{V}$ на полную подкатегорию $MF_1(j)$ (см. п. 1. 2). Тогда образ функтора $\mathscr{V}(j)$ описывается следующей теоремой.

Теорема (см. [4]). *Для* $\mathscr{H}=(H, H^0, i) \in C\widetilde{M}\Gamma^*$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{H}$ *лежит в образе функтора* $\mathscr{V}(j)$;

2) а) *если* χ *произвольный характер полупростой оболочки* $\mathscr{H}$, *то все цифры p-ичного разложения* $r(\chi)$ *заключены в пределах от* 0 *до* j;

б) *группы ветвления* $\Gamma^{(v)}$ *действуют тривиально на* H *при* $v>1$, *а на* $\mathrm{Ker}\, i \subset H$ *при* $v \geqslant 1$;

в) $\mathscr{H}$ *удовлетворяет* mult-*условию из п. 2. 3.*

2.5. Для $0 \leqslant j \leqslant \frac{p-1}{2}$ предыдущая теорема может быть усилена.

Теорема (см. [4]). ***Для*** $\mathscr{H}=(H, H^0, i) \in C\widetilde{M}\Gamma^*$ *и* $0 \leqslant j \leqslant \frac{p-1}{2}$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{H}$ *лежит в образе функтора* $\mathscr{V}(j)$;

2) а) *если* χ *произвольный характер полупростой оболочки* $\mathscr{H}$, *то все цифры p-ичного разложения* $r(\chi)$ *заключены в пределах от* 0 *до* j;

б) *группы ветвления* $\Gamma^{(v)}$ *действуют тривиально на* H *при* $v > j/(p-1)$;

в) *если* $j=(p-1)/2$, *то* H *обладает композиционным рядом с простыми факторами* $0=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=H$ *таким, что если*

$$H_{i_1}/H_{i_1-1}\simeq \mathbb{F}_p(\chi),$$

где

$$r(\chi)=\frac{1}{2}\ \text{и}\ H_{i_2}/H_{i_2-1}\simeq\mathbb{F}_p,$$

то $i_1<i_2$.

3. Функтор $\bar{a}: MF_1(e)\to \mathrm{SH}_O$.

Пусть M объект категории $MF_1(e)$, M^i и $\varphi_i: M^i\to M$ для $0\leqslant i\leqslant e$ соответствующие фильтрация и σ-линейные морфизмы. Выберем k-подмодули N^i в M такие, что $M^i=N^i\oplus M^{i+1}$ для $0\leqslant i\leqslant e$. Это дает расщепление $M^i\ \bigoplus\limits_{i\leqslant j\leqslant e} N^j$ фильтрации M^i, $0\leqslant i\leqslant e$, k-модуля M. В аннулируемом умножением на p O-модуле $\left(\frac{\pi}{p}O/\pi O\right)\otimes_k M$ рассмотрим O-подмодуль $\alpha(M)$, порожденный элементами вида $\frac{\pi^{i+1}}{p}\otimes\varphi_i(n)$, где $n\in N^i$, $0\leqslant i<e$, и элементами вида $1\otimes\varphi_e(n)$, $n\in N^e$.

Лемма. $\operatorname{Ker}\pi|_{\alpha(M)}=1\otimes M$.

Доказательство. Если $m\in M$ — произвольный элемент, то, согласно определению объектов категории $MF_1(e)$, для $0\leqslant i\leqslant e$ существуют однозначно определенные $n_i\in N^i$ такие, что $n=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant e}\varphi_i(n_i)$. Отсюда

$$1\otimes m=\sum_{0\leqslant i<e}\frac{p}{\pi^{i+1}}\left(\frac{\pi^{i+1}}{p}\otimes\varphi_i(n_i)\right)+1\otimes\varphi_e(n_e),$$

т. е. $1\otimes M\subset\alpha(M)$, откуда следует, что $1\otimes M\subset\operatorname{Ker}\pi|_{\alpha(M)}$. Далее, из определения O-модуля $\alpha(M)$ вытекает, что

$$\dim_k\alpha(M)/\pi\alpha(M)\leqslant\dim_k M$$

и, так как

$$\dim_k\operatorname{Ker}\pi|_{\alpha M)}=\dim_k\alpha(M)/\pi\alpha(M),$$

лемма доказана.

Положим $\alpha(M)^0=1\otimes M$ и определим σ-линейный морфизм k-модулей $\varphi:\alpha(M)^0\to\alpha(M)$ по аддитивности соотношениями $1\otimes n\mapsto\frac{\pi^{i+1}}{p}\otimes\varphi_i(n)$ для $n\in N^i$, $0\leqslant i\leqslant e$. Легко проверить, что

$$1\otimes M^e=\operatorname{Ker}\varphi=\{1\otimes m\in\alpha(M)^0\mid\varphi(1\otimes m)\in\pi\alpha(M)\}.$$

Положим $\alpha(M)^1=1\otimes M^e$ и определим σ-линейный морфизм k-модулей $\psi:\alpha(M)^1\to\to\alpha(M)$ соотношением $1\otimes m\mapsto 1\otimes\varphi_e(m)$, $m\in M^e$. Нетрудно проверить, что $\bar{a}(M):=(\alpha(M),\ \alpha(M)^0,\ \alpha(M)^1,\ \varphi,\ \psi)$ является объектом категории SH_O. Функториальность по M соответствия $M\mapsto\bar{a}(M)$ вытекает, например, из того, что расщепление фильтрации M^i, $0\leqslant i\leqslant e$ из начала этого пункта можно выбрать функториально зависящим от M (см. [13]).

Замечание. При $e=1$, т. е. $O=O_0$, $\bar{a}$ является эквивалентностью категорий.

4. Утверждение. *Имеется коммутативная диаграмма категорий и функторов*

$$\begin{array}{ccc} MF_1(e) & \xrightarrow{\mathscr{V}(e)} & C\widetilde{M}\Gamma^* \\ \downarrow{\scriptstyle\bar\alpha} & & \uparrow{\scriptstyle C\Gamma^*} \\ \mathrm{SH}_O & \xrightarrow{\mathfrak{G}^*} & \mathfrak{S}_O^* \end{array}$$

Доказательство. Пусть $M \in MF_1$, $\mathscr{V}(M) = \mathscr{H} = (H,\ H^0,\ i) \in C\widetilde{M}\Gamma^*$. Согласно п. 1.4, существует инъективный морфизм $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}F_1}(M,\ \mathscr{MF}(\mathscr{H}))$, удовлетворяющий условиям K-критерия из п. 1.4. Заметим, что из коммутативной диаграммы этого критерия вытекает, что

$$\lambda(M) \subset A^0(\mathscr{H})/\pi A^0(\mathscr{H}) \subset A(\mathscr{H})/\pi A(\mathscr{H}) \simeq \mathscr{MF}(\mathscr{H}),$$

где $A^0(\mathscr{H}) = \mathrm{Ker}(e : A(\mathscr{H}) \to O)$ (см. п. 2, § 4). Следовательно, мы можем определить k-линейный морфизм $\lambda^0 : \alpha(M)^0 \to A^0(\mathscr{H}) \bmod J(\mathrm{Aug}\,\mathscr{H})$ соотношением $1 \otimes m \mapsto \lambda(m) \bmod J(\mathrm{Aug}\,\mathscr{H})$, где $m \in M$. Ясно, что λ^0 однозначно определяет морфизм категории $\mathscr{S}\,\mathrm{H}_O\bar\lambda : \bar\alpha(M) \to \mathscr{S}\,\mathrm{H}(\mathscr{H})$, причем $\bar\lambda \in \mathrm{Hom}^{\Delta}_{\mathscr{S}\mathrm{H}_O}(\bar\alpha(M),\ \mathscr{S}\,\mathrm{H}(\mathscr{H}))$ и $\mathrm{rk}\,\bar\alpha(M) = \dim_{\mathbb{F}_p} H$.

Лемма. *$\bar\lambda$ инъективен.*

Доказательство. Это утверждение эквивалентно инъективности морфизма λ^0. Пусть λ^0 не является инъективным. Тогда существует $m \in M$, $m \neq 0$ такой, что $\lambda(m) \in J(\mathrm{Aug}\,\mathscr{H}) \bmod \pi A(\mathscr{H})$. Определим последовательность $\{m_n\}_{n \geqslant 0}$ элементов k-модуля $M : m_0 = m$, и если $m_n \in M^{i_n} \setminus M^{i_n+1}$, то $m_{n+1} = \varphi_{i_n}(m_n)$. Очевидно, что $m_n \neq 0$ при всех $n \geqslant 0$. Пусть $\lambda(m) = \hat a \bmod \pi A(\mathscr{H})$, где $\hat a \in A(\mathscr{H})$. Так как $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}F_1}(M,\ \mathscr{MF}(\mathscr{H}))$ имеем $\lambda(m_n) = \hat a_n \bmod \pi A(\mathscr{H})$, где все $\hat a_n \in A(\mathscr{H})$, $\hat a_0 = a$, $\hat a_{n+1} = (-1/\pi)^{i_n} \hat a_n^p$. Но $M \in MF_1(e)$, следовательно, для всех n $0 \leqslant i_n \leqslant e$. Так как $v_\pi(p) = e$, из свойства 6.2 г) § 1 получаем, что существует номер n_0, для которого $\hat a_{n_0} \in \pi A(\mathscr{H})$. Отсюда $\lambda(m_{n_0}) = 0$, что противоречит инъективности λ. Лемма доказана.

Итак, морфизм $\bar\lambda$ удовлетворяет условию 2) утв. п. 7, § 4, поэтому $\mathscr{H} \simeq C\Gamma(\mathfrak{G}(\bar\alpha(M)))$. Утверждение доказано.

Следствие. *Если объект $\mathscr{H}$ категории $C\widetilde{M}\Gamma$ лежит в образе функтора $\mathscr{V}(e)$, то существует групповая схема $G \in \mathfrak{G}_O$ такая, что $C\Gamma(G) = \mathscr{H}$.*

Замечание. При $e = 1$ справедливо обращение этого следствия (см. замечание п. 3).

5. Используя результаты п. 2 для описания образа функтора $\mathscr{V}(e)$, мы можем получить достаточные (а при $e = 1$ являющиеся также необходимыми) условия для реализации конечного $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модуля в виде Γ-модуля $\bar K$-точек некоторой групповой схемы $G \in \mathfrak{G}_O$. Мы сформулируем эти условия в виде следующих теорем.

5.1. Теорема. *Пусть $\mathbb{F}_p[\Gamma]$-модуль H таков, что объект $(H,\ {}^{\Gamma}H,\ {}^{\Gamma}i)$ категории $C\widetilde{M}\Gamma$* (см. п. 8.2, § 4) *удовлетворяет условиям* 2) а)—в) *теоремы п.* 2.4 *при $j = e$, тогда существует $G \in \mathfrak{G}_O$ такая, что $G(\bar K) \simeq H$.*

Замечание. Условие 2, а) — это, доказанная Рейно в [12], гипотеза Серра о действии группы слабого ветвления на полупростую оболочку Γ-модуля $G(\bar K)$; условие 2, б) — это (более сильное по сравнению с точной оценкой Фонтэна [9]) ограничение на верхние числа ветвления Γ-модуля $G(\bar K)$; условие 2, в) — это, в каком-то смысле, условие «алгебраичности» Γ-модуля $G(\bar K)$.

5.2. Условимся использовать в качестве тривиального характера $\Gamma \to k^*$ второй экземпляр тривиального характера χ_0^{et}, т. е. для любого характера $\chi : \Gamma \to k^*$ считаем, что $0 \leqslant r(\chi) < 1$. Теперь из п. 2.5 получаем следующее.

Теорема. *Пусть $e \leqslant \frac{p-1}{2}$ и $\mathbb{F}_p(\Gamma)$-модуль H таков, что* а) *для любого характера χ полупростой оболочки H все цифры p-ичного разложения $r(\chi)$ заключены в пределах от* 0 *до* e;

б) *группы ветвления* $\Gamma^{(v)}$ *действуют тривиально на* H *при* $v > e/(p-1)$;

в) *если* $e=\frac{p-1}{2}$, *то* H *обладает композиционным рядом с простыми факторами* $0=H_0\subset H_1\subset\ldots\subset H_n=H$ *таким, что если*

$$H_{i_1}/H_{i_1-1}\simeq \mathbb{F}_p(\chi),\quad \text{где}\ r(\chi)=\frac{1}{2}\ \text{и}\ H_{i_2}/H_{i_2-1}\simeq \mathbb{F}_p,$$

то $i_1 < i_2$. *Тогда существует групповая схема* $G\in\mathfrak{G}_0$ *такая, что* $G(\bar K)\simeq H$.

Замечание. Условия а) и в) этой теоремы являются также необходимыми: а) — это гипотеза Серра, в) — вытекает из существования наибольшей мультипликативной групповой подсхемы в G. Следовательно, условия а)—в) теоремы описывают Г-модули объектов полной подкатегории $\mathfrak{G}_0^{**}$ в категории $\mathfrak{G}_0$, состоящей из групповых схем G, таких, что $\Gamma^{(v)}$ тривиально действуют на $G(\bar K)$ при $v > e/(p-1)$.

5.3. Как было отмечено в начале этого пункта, при $e=1$ теоремы 5.1 и 5.2 дают полное описание Г-модулей $G(\bar K)$ объектов G категории $\mathfrak{G}_{W(k)}$. Теорема 5.2 может быть использована при $p\geqslant 3$ и дает результат из работы [2] автора. Случай $e=1$, $p=2$ включается в теорему 5.1, причем условие 2, а) выполнено автоматически и, следовательно, может быть отброшено.

Литература

[1] **Абрашкин В. А.** Системы Хонды групповых схем периода p // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 3. С. 451—484.

[2] **Абрашкин В. А.** Модули Галуа групповых схем периода p над кольцом векторов Витта // Изв. АН СССР. Сер. мат. **1987**. Т. 51, № 4. С. 691—736.

[3] **Абрашкин В. А.** Групповые схемы периода p над кольцом дискретного нормирования // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 4. С. 195—196.

[4] **Абрашкин В. А.** Модулярные кристаллические представления и обобщение гипотезы Шафаревича // Алгебраическая геометрия. Ярославль, **1988**. С. 204—229. Рукоп. деп. в ВИНИТИ 09.08.88. № 6418—В88.

[5] **Berthelot P.** Cohomologie cristalline des schémas de caracteristique $p > 0$. Lect. notes in Math. Vol. 407. Heidelberg: Springer, **1974**. 604 p.

[6] **Demazure M., Gabriel P.** Groupes algebriques. T. 1. Amsterdam: North Holland Publ. Co., **1970**. 700 p.

[7] **Fontaine J.-M.** Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt // C. r. Acad. Sci. 1975. Vol. 280. P. A1423—A2425.

[8] **Fontaine J.-M.** Groupes p-divisibles sur les corps locaux. Asterisque // Soc. Math. France. Paris. 1977. Vol. 47. 215 p.

[9] **Fontaine J.-M.** Il n'y a pas de varieté abellienne sur $\mathbb{Z}$ // Inv. Math. **1985**. Vol. 81. P. 515—538.

[10] **Fontaine J.-M., Laffaille G.** Construction de representations p-adiques // Au. Sci. E. N. S. 4[e] sér. **1982**. T. 15. P. 547—608.

[11] **Lazard M.** Commutative Formal Groups. Lect. Notes Math. Vol. 443. Heidelberg: Springer, **1975**. 236 p.

[12] **Raynaud M.** Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$ // Bul. Soc. Math. France. **1974**. Vol. 102. P. 241—280.

[13] **Wintenberger J.-P.** Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés alqébriques sur le corps locaux // An. Math. **1984**. Vol. 119. P. 511—548.

[14] **Wintenberger J.-P.** Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications // An. Sci. E. N. S. **1983**. Vol. 16 (4). P. 59—89.

Московский институт инженеров гражданской авиации

Поступила 27 июня 1988 г.