ОКТЯБРЬ 1993 г., ТОМ 29, № 10

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968

Ю. Ю. БЕРЕСТ

СЛАБЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В работе обсуждается теория локальных групп преобразований в пространстве обобщенных функций. Вводятся понятия слабого инварианта и системы слабых ковариантов для таких групп. Доказывается аналог инфинитезимального критерия для слабой инвариантности. На этой основе удается адаптировать технику классического группового анализа для дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций, в частности, обосновать процедуры вычисления групп симметрий таких уравнений и построения слабых инвариантных решений.

Теория распределений, разработанная Л. Шварцем [1], привлекла внимание специалистов к широкому классу линейных топологических пространств, которые доставляют различные конкретные реализации пространства обобщенных функций (ОФ). Оказалось, что эти пространства являются весьма естественными не только с точки зрения анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, но и представляют собой, по-видимому, наиболее удобную базу для построения общей теории (линейных) представлений групп Ли. Систематическое изложение различных аспектов теории представлений (локально) компактных групп Ли над полями вещественных и комплексных чисел в пространстве ОФ, исследование проблемы гармонического анализа на группе Лоренца и связанных с ней однородных пространствах имеется в монографии [2]. Вопросы применения теории представлений групп Ли в пространствах ОФ в контексте квантовой теории поля подробно обсуждаются в книге [3].

Как известно, в вопросах классического группового анализа дифференциальных уравнений исключительно важно не ограничиваться рассмотрением глобальных групп Ли и их линейных представлений. Эффективное использование инфинитезимальной техники при исследовании уравнений подразумевает привлечение теории локальных групп Ли, групповые действия которых определены лишь локально на соответствующих пространствах и имеют смысл только для элементов, достаточно близких к единице. Ясно, что эта ситуация неизбежно возникает и при групповом анализе дифференциальных уравнений в ОФ.

В настоящей работе развивается теория локальных групп преобразований (в рамках теории ОФ) с целью адаптации инфинитезимальной техники группового анализа для исследования линейных дифференциальных уравнений в пространстве ОФ. Центральным понятием является понятие слабого инварианта локальной группы преобразований, для которого доказывается аналог обычного (лиевского) критерия инвариантности. Понятие инвариантного многообразия, которое играло ключевую роль в классическом групповом анализе, непосредственно (т. е. сохраняя его геометрический смысл) обобщить не удается. Вместо этого рассматриваются системы слабых ковариантов локальных групп преобразований, которые также допускают инфинитезимальную характеризацию (аналог теоремы об инвариантном многообразии). Система

дифференциальных уравнений в ОФ, инвариантная относительно заданной группы преобразований, определяется как раз системой слабых ковариантов этой группы.

Практическое приложение результатов данной работы для исследования конкретных примеров дифференциальных уравнений в ОФ и построение их фундаментальных решений развиваемым здесь теоретико-групповым методом будут изложены в последующей работе.

Наши дальнейшие построения будут в значительной степени основываться на операции замены переменных в ОФ. Эта операция и ее свойства подробно исследуются средствами функционального анализа в работе [4]. Далее в обозначениях и терминологии в основном будем следовать этой работе, а также книге [5]: Ω, Ω_1, Ω_2 — открытые множества в $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{D}(\Omega)$ — пространство основных функций над Ω (в качестве последних берутся бесконечно дифференцируемые функции с носителем, компактно принадлежащим Ω); $\mathscr{L}(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega)$ — соответственно пространства локально суммируемых и обобщенных функций над Ω, $\mathrm{Diff}\,(\Omega_1, \Omega_2)$ — множество всех диффеоморфизмов g: $\Omega_1\to\Omega_2$; $C^\infty_+(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых отображений со значениями на вещественной положительной полуоси $\xi:\Omega\to\mathbf{R}_+$.

В целях замкнутости изложения опишем вкратце формальную схему построения оператора замены переменных в ОФ и его основные свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем (детали см. в работе [4]).

Введем линейные операторы умножения Λ^*_ξ и композиции g^* для произвольных фиксированных отображений $\xi(x)\in C^\infty(\Omega)$ и $g\in\mathrm{Diff}(\Omega_1, \Omega_2)$:

$$\Lambda^*_\xi:\mathscr{D}(\Omega)\to\mathscr{D}(\Omega),\ (\Lambda^*_\xi\varphi)(x)=\xi(x)\varphi(x), \tag{1.1}$$

$$g^*:\mathscr{D}(\Omega_2)\to\mathscr{D}(\Omega_1),\ (g^*\psi)(x)=\psi(g(x)), \tag{1.2}$$

где $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega)$; $\psi(x)\in\mathscr{D}(\Omega_2)$, а также отображение $p:\mathrm{Diff}\,(\Omega_1, \Omega_2)\to C^\infty_+(\Omega_1)$, действующее по правилу

$$p(g)(x)=\left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1}. \tag{1.3}$$

Отметим, что операторы g^* и Λ^*_ξ (если $\xi(x)\in C^\infty_+(\Omega)$) определяют линейные топологические изоморфизмы соответствующих пространств. Далее для каждого $g\in\mathrm{Diff}\,(\Omega_1, \Omega_2)$ можно построить оператор изоморфизма $S^*_g:\mathscr{D}(\Omega_1)\to\mathscr{D}(\Omega_2)$ такой, что

$$S^*_g=g^{-1*}\Lambda^*_{p(g)}, \tag{1.4}$$

и для которого имеют место следующие свойства:

$$\forall g_1\in\mathrm{Diff}\,(\Omega_1, \Omega_2),\ \forall g_2\in\mathrm{Diff}(\Omega_2, \Omega_3)\quad S^*_{g_1\circ g_2}=S^*_{g_2}S^*_{g_1}, \tag{1.5}$$

$$\forall\xi\in C^\infty(\Omega_1),\ \forall g\in\mathrm{Diff}\,(\Omega_1, \Omega_2)\quad S^*_g\Lambda^*_\xi=\Lambda^*_{g^{-1*}(\xi)}S^*_g. \tag{1.6}$$

Оператор замены переменных в обобщенных функциях по определению есть линейный оператор $S_g:\mathscr{D}'(\Omega_2)\to\mathscr{D}'(\Omega_1)$, сопряженный к оператору S^*_g, т. е. $S_g\equiv(S^*_g)^*$. Действительно, если $F\in\mathscr{D}'(\Omega_2)$ — регулярная обобщенная функция, представимая локально суммируемой функцией $F\in\mathscr{L}(\Omega_2)$, то для ОФ $S_gF\in\mathscr{D}'(\Omega_2)$ и некоторой $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_1)$ имеем

$$\langle S_gF, \varphi\rangle\equiv\langle F, S^*_g\varphi\rangle=\int\limits_{\Omega_2}F(y)\varphi(g^{-1}(y))\left|\det\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|^{-1}_{x=g^{-1}(y)}dy=$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}F(y)\varphi(x(y))\left|\det\frac{\partial x}{\partial y}(y)\right|dy=\int\limits_{\Omega_1}F(y(x))\varphi(x)dx.$$

(Последнее равенство справедливо в силу формулы замены переменных

в интеграле Лебега.) Это означает, что $S_gF=F(g(x))$, т. е. $S_gF\in\mathscr{L}(\Omega_1)$, и для регулярных ОФ оператор S_g на самом деле реализует обычную замену переменных.

На операцию замены переменных в ОФ естественно распространяется правило дифференцирования сложной функции. Пусть $g\in\in\mathrm{Diff}\,(X, Y)$, X, Y — открытые подмножества в $\mathbf{R}^n$. Если обозначить отображение $y=g(x)$ как $y=y(x)$, а обратное отображение $x=g^{-1}(y)$ как $x=x(y)$, то будет иметь место формула

$$\frac{\partial}{\partial x^i}S_g=\sum_{j=1}^{n}\Lambda^{**}_{(\partial y^j/\partial x^i)}S_g\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{1.7}$$

Здесь $\partial/\partial x^i:\mathscr{D}'(X)\to\mathscr{D}'(X)$ и $\partial/\partial y^i:\mathscr{D}'(Y)\to\mathscr{D}'(Y)$ — операторы взятия i-й частной производной ОФ.

Рассмотрим теперь локальную r-параметрическую группу G гладких отображений, действующих на $\mathbf{R}^n:x\mapsto T_ax$, $a=(a^1,\dots,a^r)$ — локальный групповой параметр, принадлежащий внутренности открытого шара $\mathbf{K}\subset\mathbf{R}^r$ некоторого фиксированного радиуса в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^r$ с центром в точке 0. Обозначим через $\mathscr{U}$ область определения группового действия G:

$$\{a=0\}\times\mathbf{R}^n\subseteq\mathscr{U}\subseteq\mathbf{K}\times\mathbf{R}^n.$$

Тогда для каждого x из $\mathbf{R}^n$ групповые элементы T_a такие, что действие T_ax определено, образуют локальную группу Ли

$$G_x\equiv\{T_a\in G:(a,x)\in\mathscr{U}\},$$

которая порождается некоторой открытой окрестностью $\mathbf{K}_x$ точки $a=0$ шара $\mathbf{K}$. Обратно, для любого $a\in\mathbf{K}$ существует открытое подмногообразие в $\mathbf{R}^n$

$$M_a\equiv\{x\in\mathbf{R}^n:(a,x)\in\mathscr{U}\},$$

на котором определено групповое преобразование $T_a\in G$, причем $T_a\in\mathrm{Diff}\,(M_a, M_a)$. Ясно, что $M_0\equiv\mathbf{R}^n$ и T_0 — тождественный диффеоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя.

Поставим в соответствие каждому значению группового параметра $a\in\mathbf{K}$ оператор замены переменных $S_{T_a}\equiv S_a$, действующий на соответствующем пространстве ОФ $S_a:\mathscr{D}'(M_a)\to\mathscr{D}'(M_a)$. Обратим внимание, что операторы S_a для разных a определены, вообще говоря, на различных пространствах ОФ. Ясно, однако, что $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)\subseteq\mathscr{D}'(M_a)$. Последнее включение нужно понимать в том смысле, что каждый функционал $F\in\mathscr{D}'$ можно отождествить с его каноническим сужением на M_a, $F|_{M_a}\in\mathscr{D}'(M_a)$, так, что

$$\langle F|_{M_a},\varphi\rangle=\langle F,\varphi\rangle$$

для каждой $\varphi\in\mathscr{D}(M_a)\subseteq\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. (В дальнейшем ограниченный функционал $F|_{M_a}$ будем обозначать тем же символом F.)

Введем теперь понятие G-инвариантной обобщенной функции, которую естественно назвать слабым инвариантом локальной группы G преобразований в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. Линейный непрерывный функционал $F(x)$ из пространства $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ называется слабым инвариантом группы G, если для каждого значения группового параметра $a\in\mathbf{K}$ имеет место равенство

$$S_aF=F, \tag{1.8}$$

т. е. для каждой основной функции $\varphi\in\mathscr{D}(M_a)\subseteq\mathscr{D}$

$$\langle S_aF,\varphi\rangle=\langle F,\varphi\rangle.$$

Полезно также определить локально G-инвариантные распределения. В этом случае мы требуем лишь инвариантности относительно групповых преобразований, близких к тождественному.

Определение 1′. Пусть Ω — фиксированное открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Линейный непрерывный функционал $F(x)$ из пространства $\mathscr{D}'(\Omega)$ назовем локальным слабым инвариантом группы G, если для любого x существует подокрестность $\bar{\mathbf{K}}_x$ точки $a=0$, $\bar{\mathbf{K}}_x \tilde{\subset} \mathbf{K}_x \subseteq \mathbf{K}$, определяющая подгруппу $\bar{G}_x$ локальной группы Ли G_x, такая, что для всех $a \in \bar{\mathbf{K}}_x$ $M_a \subseteq \Omega$ и справедливо равенство (1.8).

Замечание. Очевидно, каждая гладкая (локально) G-инвариантная функция, представляющая собой классический (локальный) инвариант группы G, является также слабым (локальным) инвариантом в смысле определения 1 (1′).

Пусть F — произвольная фиксированная ОФ, принадлежащая пространству $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим семейство функционалов $\mathscr{F} = \{F_a \equiv S_a F, a \in \mathbf{K}\}$ и предположим, что оно является локально C^∞-гладким семейством относительно группового параметра a во внутренности шара $\mathbf{K}$, т. е. для любого $a \in \mathbf{K}$ найдется такая окрестность $V_a \subset \mathbf{K}$, что для каждой основной функции $\varphi \in \mathscr{D}(M_a)$ числовая функция $\langle F_a, \varphi \rangle$ принадлежит классу $C^\infty(V_a)$. В этом случае справедлива формула (см. [3, гл. 2, п. 2.6])

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial a^\nu} F_a, \varphi \right\rangle = \frac{\partial}{\partial a^\nu} \langle F_a, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(M_a), \tag{1.9}$$

которую естественно положить в основу определения линейных операторов $\frac{\partial}{\partial a^\nu} S_a$. Обозначим $T_a x \equiv f(x, a)$. Тогда

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial a^\nu} S_a F, \varphi \right\rangle = \frac{\partial}{\partial a^\nu} \langle S_a F, \varphi \rangle = \frac{\partial}{\partial a^\nu} \langle F, S_a^* \varphi \rangle =$$

$$= \left\langle F, \frac{\partial}{\partial a^\nu} S_a^* \varphi \right\rangle = \left\langle F, \sum_{j=1}^n \frac{\partial^*}{\partial y^j} S_a^* \Lambda^*_{(\partial f^j/\partial a^\nu)} \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^n \Lambda^{**}_{(\partial y^j/\partial a^\nu)} S_a \frac{\partial}{\partial y^j} F, \varphi \right\rangle .$$

Здесь $y^j = f^j(x, a)$ и $\frac{\partial}{\partial y^j} \equiv -\left(\frac{\partial^*}{\partial y^j}\right)^*$, $\frac{\partial^*}{\partial y^i}$ — оператор дифференцирования на пространстве основных функций. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1. *Если для ОФ $F \in \mathscr{D}'$ определено C^∞-гладкое r-параметрическое семейство функционалов $\mathscr{F} = \{F_a \equiv S_a F, a \in \mathbf{K}\}$, то имеют место формулы дифференцирования по параметру семейства, аналогичные правилу (1.7):*

$$\frac{\partial}{\partial a^\nu} S_a = \sum_{j=1}^n \Lambda^{**}_{(\partial y^j/\partial a^\nu)} S_a \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad \nu = 1, \dots, r. \tag{1.10}$$

Пусть параметры $(a^1, \dots, a^r)$ определяют в локальной группе G каноническую систему координат второго рода. Тогда базис r-мерной алгебры Ли инфинитезимальных операторов группы G представляется в виде

$$X_\nu = \xi^i_\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i}{\partial a^\nu}\right|_{a=0}, \quad \nu = 1, \dots, r, \tag{1.11}$$

компоненты векторных полей $\xi^i_\nu(x)$ суть C^∞-гладкие функции в $\mathbf{R}^n$. Кроме

того, при указанном выборе системы координат в G уравнения Ли записываются в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a^\nu}=\xi_\nu(f);\ f=x,\ a_\nu=0. \tag{1.12}$$

Комбинируя соотношения (1.10) и (1.12), получаем «закон эволюции» функционала F вдоль орбиты действия локальной группы G:

$$\frac{\partial}{\partial a^\nu}S_aF=S_aX_\nu F,\quad \nu=1,\dots,r. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) позволяет распространить на случай ОФ классический критерий Ли инфинитезимальной инвариантности.

Теорема 1. *Пусть G — локальная r-параметрическая группа преобразований, действующая на $\mathbf{R}^n$. Линейный непрерывный функционал $F(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ является слабым инвариантом группы G, если и только если*

$$X_\nu F=0,\ \nu=1,\dots,r, \tag{1.14}$$

т. е. для каждой основной функции $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ и любого $\nu=1,\dots,r$ имеют место равенства $\langle X_\nu F,\varphi\rangle=0$. (При этом, конечно, соответствующее семейство функционалов $\mathscr{F}=\{S_aF,\ a\in\mathbf{K}\}$ предполагается C^∞-гладким на $\mathbf{K}$). Условие (1.14) будем называть инфинитезимальным критерием слабой инвариантности.

Доказательство. Пусть F — слабый инвариант в смысле определения 1. Тогда в силу (1.8) и (1.13) для каждого значения $a\in\mathbf{K}$ имеем

$$S_aX_\nu F=\frac{\partial}{\partial a^\nu}S_aF=\frac{\partial}{\partial a^\nu}F=0,\quad \nu=1,\dots,r.$$

Подставляя $a=0$ и учитывая, что S_0 — тождественный оператор, получим условие (1.14). Обратно, если условие (1.14) выполняется на $\mathscr{D}'$, то ограничение функционала $X_\nu F|_{M_a}$ есть нулевое распределение над M_a для каждого фиксированного a. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial a^\nu}S_aF=S_aX_\nu F=0,\quad \nu=1,\dots,r.$$

Применяя формулу (1.9), получаем, что гладкие числовые функции $\Phi(a)\equiv\langle S_aF,\varphi\rangle$ для каждой основной функции $\varphi(x)\in\mathscr{D}(M_a)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a^\nu}=0 \text{ с н. у. } \Phi(0)\equiv\langle F(x),\varphi(x)\rangle,\ a\in\mathbf{K}.$$

В силу теоремы единственности имеем $\Phi(a)=\Phi(0)$, $a\in\bar{\mathbf{K}}\subset\mathbf{K}$, что и эквивалентно равенству (1.8). Теорема доказана.

Пусть локальная группа G действует регулярно на пространстве и пусть ее орбиты — r-мерные регулярные подмногообразия в $\mathbf{R}^n$. Тогда в некоторой окрестности Ω_0 каждой точки $x_0\in\mathbf{R}^n$ существует ровно $(n-r)$ функционально независимых гладких инвариантов группы G: $\xi'(x),\dots,\xi^{n-r}(x)$, и всякий другой гладкий инвариант действия группы, определенный вблизи x_0, представляется в виде $\xi(x)=F(\xi^1,\dots,\xi^{n-r})$, где $F(x)$ — некоторая гладкая функция [7]. Поэтому множество $I(C^\infty(\Omega))$ всех гладких G-инвариантов, определенных в открытой окрестности $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, порождается конечной системой функционально независимых образующих. Обозначим через $I(\mathscr{D}'(\Omega))$ множество всех слабых инвариантов группы G, определенных над Ω. Ясно, что $I(C^\infty(\Omega))\subset\subset I(\mathscr{D}'(\Omega))$. Элементы множества $I(\mathscr{D}')\setminus I(C^\infty)$ назовем собственно

слабыми инвариантами группы G. Относительно алгебраической структуры множества $I(\mathscr{D}')$ можно сформулировать следующее очевидное

Утверждение 1. *Всякий слабый инвариант J группы G может быть формально представлен в виде*

$$J=\sum_{i=1}^{N} C_i(x)F_i(x)+C_0(x),\ N\in\mathbf{N},\ F_i(x)\in I(\mathscr{D}')\setminus I(C^\infty),$$

$$C_0(x),\dots,C_N(x)\in I(C^\infty).$$

Иными словами, множество $I(\mathscr{D}')$ всех слабых инвариантов обладает структурой модуля над кольцом гладких (классических) инвариантов группы G.

Вопрос о полном описании модуля слабых инвариантов произвольной r-параметрической группы G преобразований на $\mathbf{R}^n$, по-видимому, остается открытым. В случае группы G, действующей на прямой ($n=1$), модуль $I(\mathscr{D}')$ является конечно порожденным, т. е. базис независимых собственно слабых инвариантов конечен. Действительно, рассмотрим локальную однопараметрическую группу G инверсий на прямой $\mathbf{R}^1$ с инфинитезимальным оператором $X=x^2\dfrac{\partial}{\partial x}$. Множество $I(C^\infty)$ классических инвариантов оператора X исчерпывается лишь тривиальными элементами (тождественно постоянными функциями на прямой). Базис же собственно слабых инвариантов шире: $\{\theta(x),\delta(x)\}$, так что всякий слабый инвариант группы G (в соответствии с утверждением 1) представляется в виде

$$J=C_1+C_2\theta(x)+C_3\delta(x).$$

Это легко доказать непосредственно, решив в классе обобщенных функций обыкновенное дифференциальное уравнение $x^2y'=0$ (см., например, [5]). Интересно проверить в этом случае формулу (1.8) из определения 1. Возьмем $F(x)=\theta(x)$. Область определения $\mathscr{U}$ группового действия G-преобразований на $\mathbf{R}^1: x\mapsto T_ax=\dfrac{x}{1-ax}$ есть

$$\mathscr{U}=\{(a,x): a<1/x\,(x>0),\ a>1/x\,(x<0)\}\subset\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1.$$

В этом случае

$$M_a=\begin{cases}(-\infty,1/a) & \text{при } a>0,\\ (-\infty,+\infty) & \text{при } a=0,\\ (1/a,+\infty) & \text{при } a<0.\end{cases}$$

Фиксируем произвольную основную функцию $\varphi(x)\in\mathscr{D}(M_a)$ $\operatorname{supp}\varphi\subset\subset(-\infty,1/a)$. Имеем

$$\langle S_a\theta(x),\varphi(x)\rangle=\int_{-\infty}^{1/a}\theta\left(\frac{x}{1-ax}\right)\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1/a}^{+\infty}\theta(y)\varphi\left(\frac{y}{1+ay}\right)\frac{dy}{(1+ay)^2}=\int_{0}^{+\infty}\varphi\left(\frac{y}{1+ay}\right)\frac{dy}{(1+ay)^2}=$$

$$=\int_{0}^{1/a}\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1/a}\theta(x)\varphi(x)\,dx=\langle\theta(x),\varphi(x)\rangle.$$

Таким образом, на пространстве основных функций $\mathscr{D}'(M_a)$ равенство (1.8) имеет место: $S_a\theta(x)=\theta(x)$.

В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ регулярное дифференцируемое многообразие M (коразмерности m, $m<n$), описываемое неявно как мно-

жество нулей $M=\{x\in\mathbf{R}^n,\ F(x)=0\}$ некоторого гладкого отображения $F=(F_1,\dots,F_m):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ (удовлетворяющего на M условию максимальности ранга), является инвариантным относительно локальной группы G преобразований в $\mathbf{R}^n$, если и только если существуют такие (гладкие) функции $Q_{\nu\mu}^{(g)}(x)$ (зависящие от g), что для всех $x\in M$, для которых действие $g\cdot x$ определено, имеют место равенства [7]:

$$F_\nu(g\cdot x)=\sum_{\mu=1}^{m} Q_{\nu\mu}^{(g)}(x)F_\mu(x),\quad \nu=1,\dots,m.$$

Наша цель — рассмотреть аналогичную ситуацию в классе обобщенных функций.

Пусть $\{F_\nu(x):F_\nu(x)\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n),\ \nu=1,\dots,m\}$ — некоторая система ОФ, $\{\mathfrak{G}_\nu,\ \mathfrak{G}_\nu\in\mathbf{R}^n\}$ — соответствующие им нулевые множества (нулевым множеством функционала $F\in\mathscr{D}'$ называется максимальное открытое множество $\mathfrak{G}_F$ в $\mathbf{R}^n$ такое, что $\langle F,\varphi\rangle=0$ для каждой $\varphi\in\mathscr{D}(\mathfrak{G}_F)$). Рассмотрим пересечение

$$\mathfrak{M}=\bigcap_{\nu=1}^{m}\mathfrak{G}_\nu\equiv\mathbf{R}^n\setminus\bigcup_{\nu=1}^{m}\operatorname{supp}F_\nu(x)$$

и положим $\mathfrak{M}\neq\varnothing$. Непустое множество $\mathfrak{M}\subseteq\mathbf{R}^n$ назовем нулевым множеством системы ОФ $\{F_\nu(x)\}$. Ясно, что в этом случае для всех $\varphi\in\mathscr{D}(\mathfrak{M})$ имеем

$$\langle F_\nu(x),\varphi(x)\rangle=0,\ \nu=1,\dots,m.$$

Пусть снова G — локальная группа преобразований в $\mathbf{R}^n$, а $\mathscr{U}\subseteq G\times\mathbf{R}^n$ — область определения ее группового действия. Для каждого фиксированного $a\in\mathbf{K}$ обозначим через

$$\mathfrak{M}_a=M_a\cap\mathfrak{M},\ M_a\equiv\{x\in\mathbf{R}^n,\ (a,x)\in\mathscr{U}\},$$

множество точек $\mathfrak{M}$, для которых действие T_ax определено. Примем следующее

Определение 2. Система линейно независимых обобщенных функций $\{F_\nu(x),F_\nu\in\mathscr{D}'\}$ называется системой (слабых) ковариантов группы G, если существует такое семейство C^∞-гладких по x и аналитических по $a\in\mathbf{K}$ функций $Q_{\mu\nu}(x,a)$ на $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^r$, что

1) $Q_{\mu\nu}(x,0)=\delta_{\mu\nu}$ для всех $x\in\mathbf{R}^n$;

2) $S_aF_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{m}Q_{\nu\mu}(x,a)F_\mu(x),\quad \nu=1,\dots,m;\ a\in\mathbf{K}.$

Равенство 2) означает, что для каждой $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathfrak{M}_a)$:

$$\langle S_aF_\nu(x),\varphi(x)\rangle=0.$$

Ковариантность системы обобщенных функций можно (по аналогии с классическим случаем) охарактеризовать инфинитезимально.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{F}=\{F_\nu(x),\nu=1,\dots,m\}$ — система ОФ из пространства $\mathscr{D}'$, G — локальная однопараметрическая группа преобразований в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что на открытом интервале $\mathbf{K}\subset\mathbf{R}^1$ семейство функционалов $\{S_aF_\nu|_{M_a}\}$ аналитично относительно группового параметра a, т. е. для каждой ОФ $S_aF|_{M_a}$ все числовые функции $\langle S_aF_\nu|_{M_a},\varphi(x)\rangle$ являются аналитическими по a на интервале $\mathbf{K}$, если $\varphi\in\mathscr{D}(M_a)$. Система $\mathscr{F}$ является системой ковариантов группы G, если и только если существуют C^∞-гладкие функции $Q_{\nu\mu}(x)$ такие, что на $\mathscr{D}(\mathbf{K}^n)$ имеет место равенство*

$$XF_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{m}Q_{\nu\mu}(x)F_\mu(x).\tag{1.15}$$

Доказательство. Необходимость следует из определения 2 и формулы (1.13), если продифференцировать 2) по a и положить $a=0$.

Для доказательства достаточности заметим, что n-кратное применение формулы (1.13) дает

$$\frac{d^n}{da^n} S_a F_\nu(x) = S_a X^n F_\nu(x).$$

В силу аналитичности семейства функционалов на $\mathbf{K}$ имеем

$$S_a F_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left[\frac{d^k}{da^k} S_a F_\nu\right]_{a=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} X^k F_\nu(x).$$

Теперь воспользуемся формулой (1.15) и получим

$$S_a F_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{m} Q_{\mu\nu}(x, a) F_\mu(x), \tag{1.16}$$

где

$$Q_{\nu\mu}(x, a) \equiv \delta_{\nu\mu} + a Q_{\nu\mu}(x) + \frac{a^2}{2}\left(\sum_{\lambda=1}^{m} Q_{\nu\lambda} Q_{\lambda\mu} + X Q_{\nu\mu}\right) + \ldots$$

При дополнительном предположении о сходимости ряда (1.16) на $\mathscr{D}$ и в силу определения 2 теорема доказана.

Многочисленные примеры слабых G-ковариантов будут использованы в дальнейшем при построении инвариантных решений линейных дифференциальных уравнений в ОФ. Сейчас же следует заметить, что именно наличие нетривиальных слабых инвариантов и ковариантов группы симметрий позволяет эффективно применять теоретико-групповую технику для построения, в частности, фундаментальных решений линейных дифференциальных операторов.

Замечание. В изложенных построениях в качестве пространства основных функций рассматривалось пространство $\mathscr{D}$ C^∞-гладких финитных функций на $\mathbf{R}^n$, а соответствующее пространство распределений определялось как пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Ясно однако, что все введенные понятия и утверждения естественно переносятся и на другие пространства основных и обобщенных функций (в частности, на пространства S и S' основных функций и функционалов медленного роста).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-17394).

Автор выражает искреннюю признательность Н. Х. Ибрагимову, А. О. Оганесяну за полезные обсуждения.

Литература

1. Schwartz L. Theorie des distributions. Paris, 1950—1951. Vol. 1—2.
2. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. М., 1961. Вып. 4.
3. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., 1987.
4. Винокуров В. А. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 3. С. 1057—1064.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. М., 1959. Вып. 1.
7. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 16 апреля 1993 г.