А. А. Обломков, Интегрируемость некоторых квантовых систем, связанных с системой корней B_2, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, номер 2, 6–9

4. *Dafermos C.M.* Hyperbolic systems of conservation laws //Proc. Int. Congr. Math. V. 2. Zurich, 1994. 1096–1107.
5. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.

Поступила в редакцию
16.09.97

УДК 517.958

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ B_2

А. А. Обломков

Введение. Исследование многомерных алгебраически интегрируемых конечнозонных операторов Шредингера, начатое в работах [1, 2], естественно привело к классу так называемых многомерных аналогов классического оператора Ламе, связанных с системами корней:

$$L = -\Delta + \sum_{\alpha \in R_+} m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)\wp((\alpha, x)) ,$$

где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, R_+ — множество положительных корней простой алгебры Ли G. В работе [1] было высказано предположение, что оператор L является алгебраически интегрируемым, если все параметры m_α являются целыми и инвариантными относительно соответствующей группы Вейля.

В работе [3] данное утверждение доказано для тригонометрических и рациональных вырождений этого оператора. Эллиптический случай для системы корней A_n при $n = 2, m_\alpha = 1$ исследован в [4, 5] и для общего n в [6, 7]. Вопрос об алгебраической интегрируемости оператора L для остальных систем корней остается до сих пор открытым. В настоящей работе это утверждение доказано в простейшем случае систем корней B_2, когда все $m_\alpha = 1$:

$$L = -\Delta + 2(\wp(x) + \wp(y)) + 4(\wp(x+y) + \wp(x-y)) . \tag{1}$$

Доказана также интегрируемость оператора

$$\begin{aligned} L = &-\Delta + l(l+1)(2m+1)\wp(\sqrt{2m+1}x) + m(m+1)(2l+1)\wp(\sqrt{2l+1}y) + \\ &+(l+m+1)\left(\wp\left(\tfrac{1}{2}(\sqrt{2m+1}x + \sqrt{2l+1}y)\right) + \wp\left(\tfrac{1}{2}(\sqrt{2m+1}x - \sqrt{2l+1}y)\right)\right) , \end{aligned} \tag{2}$$

связанного с так называемой деформированной системой корней $B_2(l, m)$ [8]. В [8] это было установлено для тригонометрического предела. В настоящей работе доказано, что интегрируемость сохраняется в рациональном пределе при добавлении осцилляторного члена, т.е. для оператора

$$\begin{aligned} L_\omega = &-\Delta + \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{m(m+1)}{y^2} + 4(l+m+1) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\sqrt{2m+1}x + \sqrt{2l+1}y} + \frac{1}{\sqrt{2m+1}x - \sqrt{2l+1}y}\right) + \omega^2\left(x^2 + y^2\right) . \end{aligned}$$

Алгебраическая интегрируемость эллиптической B_2-системы Калоджеро–Мозера. Скажем, что уравнение Шредингера

$$L\psi = -\Delta\psi + u(x)\psi = E\psi, \; x \in \mathbf{R}^n ,$$

интегрируемо, если существует n коммутирующих дифференциальных операторов (интегралов) $L_1 = L, L_2, \ldots, L_n$ с алгебраически независимыми старшими символами $P_1 = \xi^2, P_2(\xi), \ldots, P_n(\xi)$, и *алгебраически интегрируемо*, если существует еще один оператор L_0, коммутирующий с L_i $(i = 1, \ldots, n)$, с постоянным старшим символом $P_0(\xi)$, принимающим различные значения на решениях системы уравнений $P_i(\xi) = c_i$ ($i = 1, \dots, n$) для общих c_i. Определения взяты из работы [9].

Алгебраическая интегрируемость тригонометрического вырождения оператора (1) вытекает из более общего утверждения, доказанного в [3]. Старшие символы построенных дополнительных интегралов обладают следующим свойством *квазиинвариантности*. Пусть $\mathcal{A}$ — конечное множество неколлинеарных векторов α из $\mathbb{R}^n$ с предписанными кратностями $m_\alpha \in \mathbb{N}$, тогда функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, квазиинвариантна относительно системы векторов $\mathcal{A}$, если для всех $\alpha \in \mathcal{A}$ на гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$ выполнено равенство $\frac{d^{2s-1} f(x+t\alpha)}{dt^{2s-1}} = 0$, $s = 1, \dots, m_\alpha$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{R}_+$ для системы корней R простой алгебры Ли, то квазиинвариантами, в частности, являются инварианты соответствующей группы Вейля. В нашем случае это $P_1(x,y) = x^2 + y^2, P_2(x,y) = x^2y^2$, им в эллиптическом случае соответствуют известные интегралы [9]

$$\begin{aligned} L_1 = L = & -\Delta + 2\left(\wp(x) + \wp(y)\right) + 4\left(\wp(x+y) + \wp(x-y)\right), \\ L_2 = & \,\partial_x^2\partial_y^2 - [\wp(y), \partial_x^2]_+ - 2\,[\wp(x+y) - \wp(x-y), \partial_x\partial_y]_+ - \left[\wp(x), \partial_y^2\right]_+ + \\ & + 16\left(\wp^2(x+y) + \wp^2(x-y)\right) + 4\left(\wp(x) + \wp(y)\right)\left(\wp(x+y) + \wp(x-y)\right) + \\ & + 6\wp(x-y)\wp(x-y) - 4\wp(x)\wp(y), \end{aligned}$$

где $[A, B]_+$ обозначает антикоммутатор операторов A и B: $[A, B]_+ = AB + BA$.

Интегрируемость оператора L следует из существования интеграла L_2. Имеются, однако, и другие квазиинварианты, не являющиеся инвариантами. Простейший из них $P(x,y) = x^5 - 5x^3y^2$ был выписан в работе [10]. Оказывается, что в эллиптическом случае, так же как в тригонометрическом, существует дополнительный интеграл с таким старшим символом.

Теорема. *Уравнение Шредингера квантовой эллиптической задачи*

$$L\psi = -\Delta\psi + \left(2(\wp(x) + \wp(y)) + 4(\wp(x+y) + \wp(x-y))\right)\psi = E\psi,$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, *алгебраически интегрируемо. Помимо* L_1, L_2 *интегралами также являются*

$$\begin{aligned} I_x = & \,\partial_x^5 - 5\partial_x^3\partial_y^2 - 5[\tfrac{1}{2}\wp(x) - \wp(y) + \wp(x+y) + \wp(x-y)), \partial_x^3]_+ + 15[\wp(x+y) - \\ & -\wp(x-y), \partial_x^2\partial_y]_+ + \tfrac{15}{2}[\wp(x), \partial_x\partial_y^2]_+ + [15\wp(y)(\wp(x) - \wp(x+y) - \wp(x-y)) + \\ & + 60\wp(x+y)\wp(x-y) - 15\left(\wp^2(x+y) + \wp^2(x-y)\right) + \tfrac{15}{2}\wp^2(x) - \tfrac{3}{8}g_2, \partial_x]_+ - \\ & - 15[(\wp(x+y) - \wp(x-y))\left(\wp(x) + \wp(x+y) + \wp(x-y)\right), \partial_y]_+ \end{aligned}$$

и I_y, *где* I_y *получается из* I_x *соответствующей перестановкой* x, y; g_2 *— стандартный параметр эллиптических функций Вейерштрасса. Соответствующий дополнительный интеграл* L_0 *можно выбрать в виде* $L_0 = I_x + \frac{1}{2}I_y$.

Доказательство. Легко доказать, что старший символ оператора L_0 удовлетворяет требованиям определения алгебраической интегрируемости.

Так как операторы L_1, L_2 симметричны, то достаточно доказать коммутационные соотношения для оператора I_x. Коммутативность I_x и L_1 проверяется прямой подстановкой, доказательство коммутативности интегралов I_x и L_2 можно провести по схеме работы [5], используя соображения из теории автоморфных форм. Коммутативность I_x, I_y доказывается так же, как и в работе [5].

Замечание. Операторы L_1, L_2, I_x, L_y удовлетворяют алгебраическим соотношениям $(I_x)^2 + (I_y)^2 = P_5(L_1, L_2)$, $(I_x)^2(I_y)^2 = P_{10}(L_1, L_2)$, где P_5, P_{10} — полиномы степени 5 и 10 соответственно. Следовательно, существует полином $P(L_0, L_1, L_2) = 0$, задающий так называемую спектральную поверхность. Вопрос описания этой поверхности остается открытым.

Деформации B_2-системы Калоджеро–Мозера. Следуя [8], рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} L = & -(2m+1)\partial_x^2 - (2l+1)\partial_y^2 + l(l+1)(2m+1)\wp(x) + m(m+1)(2l+1) + \\ & + (l+m+1)\left(\wp\left(\tfrac{x+y}{2}\right) + \wp\left(\tfrac{x-y}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

который получается из (2) заменой $x \to \sqrt{2m+1}x$, $y \to \sqrt{2l+1}y$. При $l = m$ этот оператор совпадает с B_2-обобщением системы Калоджеро–Мозера [6]. Для деформированной системы корней $B_2(l, m)$ [8]

легко может быть найден квазиинвариант четвертой степени, в указанных координатах ему отвечает многочлен $(2m+1)^3x^4+(2l+1)^3y^4$. Условия коммутативности L и оператора с таким старшим символом и неопределенными коэффициентами при младших членах приводят к системе соотношений на эти коэффициенты, которая разрешается с помощью теорем сложения для эллиптических функций. В результате получаем следующий оператор:

$$\begin{aligned}L_1 = {}&(2m+1)^3\partial_x^4 + (2l+1)^3\partial_y^4 - [(2m+1)^2(l(l+1)(2m+1)\wp(x) + (l+m+1)(\wp(\tfrac{x+y}{2})+\\&+\wp(\tfrac{x-y}{2}))), \partial_x^2]_+ + [(2l+1)(2m+1)(l+m+1)(\wp(\tfrac{x+y}{2}) - \wp(\tfrac{x-y}{2})), \partial_x\partial_y]_+ -\\&-[(2l+1)^2(m(m+1)(2l+1)\wp(y) + (l+m+1)(\wp(\tfrac{x+y}{2}) + \wp(\tfrac{x-y}{2}))), \partial_y^2]_+ +\\&+\tfrac{(2m+1)^3+(2l+1)^3}{4}(\wp(\tfrac{x+y}{2})^2 + \wp(\tfrac{x-y}{2})^2) + (2m+1)^3(l+1)^2(l\wp(x))^2 + (2l+1)^3(m(m+1))^2\wp^2(y)+\\&+2(l+m+1)(\wp(\tfrac{x+y}{2}) + \wp(\tfrac{x-y}{2}))((2m+1)^2l(l+1)\wp(x) + (2l+1)^2m(m+1)\wp(y))+\\&+(l+m+1)(-8l^2m^2 - 8lm(l+m) + 2(l^2+m^2) - 2lm + 5(l+m) + 3)\wp(\tfrac{x+y}{2})\wp(\tfrac{x-y}{2}).\end{aligned}$$

Теорема. *Оператор L интегрируем для любых m и l, интегралом является оператор L_1.*

Рассмотрим теперь рациональный предел оператора (2) с добавленным осцилляторным членом:

$$\begin{aligned}L_\omega = {}&-(2m+1)\partial_x^2 - (2l+1)\partial_y^2 + \frac{l(l+1)(2m+1)}{x^2} + \frac{m(m+1)(2l+1)}{y^2}+\\&+\frac{4(l+m+1)}{(x+y)^2} + \frac{4(l+m+1)}{(x-y)^2} + \omega^2\left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2l+1}\right).\end{aligned}$$

Лемма. *Оператор*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\omega = {}&(2m+1)^2\partial_x^2 - (2l+1)^2\partial_y^2 - 2(l+m+1)(2m+1)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right)\partial_x+\\&+2(l+m+1)(2l+1)\left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right)\partial_y + \frac{m(m+1)(2l+1)^2}{y^2}-\\&-\frac{l(l+1)(2m+1)^2}{x^2} + \frac{4(l+m+1)^2}{x^2-y^2} - \omega^2(x^2-y^2)\end{aligned}$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{D}_\omega \circ L_\omega = \mathcal{L}_\omega \circ \mathcal{D}_\omega\,,$$

где

$$\mathcal{L}_\omega = -(2m+1)\partial_x^2 - (2l+1)\partial_y^2 + \frac{l(l+1)(2m+1)}{x^2} + \frac{m(m+1)(2l+1)}{y^2} + \omega^2\left(\frac{x^2}{2m+1} + \frac{y^2}{2l+1}\right).$$

Лемма доказывается путем непосредственных вычислений.

Легко видеть, что оператор $\mathcal{L}_\omega$ можно представить в виде суммы двух коммутирующих одномерных операторов $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{L}_\omega^{(x)} + \mathcal{L}_\omega^{(y)}$, где

$$\mathcal{L}_\omega^{(x)} = -(2m+1)\partial_x^2 + \frac{l(l+1)(2m+1)}{x^2} + \omega^2\frac{x^2}{2m+1}\,,$$

$$\mathcal{L}_\omega^{(y)} = -(2l+1)\partial_y^2 + \frac{m(m+1)(2l+1)}{y^2} + \omega^2\frac{y^2}{2l+1}\,.$$

Теорема. *Оператор L_ω интегрируем при любых значениях параметров l, m, ω.*

Доказательство. Используем общее рассуждение из работы [11]. Так как L_ω и $\mathcal{L}_\omega$ самосопряжены, то $D_\omega^*\mathcal{L}_\omega = L_\omega D_\omega^*$, $D_\omega^*\mathcal{L}_\omega^{(x)}D_\omega L_\omega = D_\omega^*\mathcal{L}_\omega^{(x)}\mathcal{L}_\omega D_\omega = D_\omega^*\mathcal{L}_\omega\mathcal{L}_\omega^{(x)}D_\omega = L_\omega^*D_\omega\mathcal{L}_\omega^{(x)}D_\omega$. Таким образом, оператор $I_\omega^{(x)} = D_\omega^*\mathcal{L}_\omega^{(x)}D_\omega$ является интегралом.

Автор выражает благодарность проф. А. П. Веселову и доц. О. А. Чалых за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras //Communs Math. Phys. 1990. **126**. 597–611.
2. *Кричевер И.М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений //Успехи матем. наук. 1977. **32**, № 6. 183–208.
3. *Schmidt M., Veselov A.P.* Quantum elliptic Calogero–Moser problem and deformations of algebraic surfaces. Preprint of Freie Universität. Berlin, 1996.
4. *Веселов А.П., Стыркас К.Л., Чалых О.А.* Алгебраическая интегрируемость для уравнения Шредингера и группы, порожденные отражениями //Теор. матем. физ. 1993. **94**, № 2. 253–275.
5. *Ходаринова Л.А.* О квантовой эллиптической задаче Калоджеро–Мозера //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1998. № 5. 16–19.
6. *Felder G., Varchenko A.* Three formulas for eigenfunction of integrable Schrödinger operators. Preprint of UNC, 1995.
7. *Braverman A., Etingof P., Gaitsgory D.* Quantum integrable system and differential Galois theory //Transformation Groups. 1997. **2**, N 1. 31–57.
8. *Веселов А.П., Фейгин М.В., Чалых О.А.* Новые интегрируемые деформации квантовой задачи Калоджеро–Мозера //Успехи матем. наук. 1996. **51**, № 3. 185–186.
9. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* Quantum imtegrable systems related to Lie algebras //Phys. Repts. 1983. **94**, N 6. 313–404.
10. *Волченко К.Ю., Козачко А.Н., Мишачев К.Н.* Кольцо квазиинвариантов группы диэдра //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1999. № 1. 52–55.
11. *Чалых О.А.* Дополнительные интегралы обобщенной квантовой задачи Калоджеро–Мозера //Теор. матем. физ. 1996. **102**, № 1. 23–33.

Поступила в редакцию
17.11.97

УДК 512.543.52

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

А. Е. Панкратьев

1. Диаграммы над свободными произведениями. Рассмотрим свободное произведение конечного числа конечно определенных групп $F = \underset{i}{*}G_i$, $i \in I$. Любой неединичный элемент $w \in F$ однозначно записывается в нормальной форме $w = x_1 \dots x_n$, где каждый множитель x_i является неединичным элементом одной из групп $G_m = \langle \mathcal{A}_m | R_m \rangle$, при этом соседние x_i, x_{i+1} $(i = 1, \dots, n-1)$ принадлежат разным свободным множителям G_k, G_l. Под *длиной* $|w|$ элемента w в свободном произведении будем понимать число n элементов в такой записи.

Пусть $u = x_1 \dots x_k$ и $v = y_1 \dots y_l$ — нормальные формы элементов u и v и пусть $w = uv$. Скажем, что слово w имеет *приведенное разложение* $w = uv$, если x_k, y_1 лежат в разных свободных множителях. Если $x_k \neq y_1^{-1}$, то uv называется *полуприведенной формой* элемента w (при этом они могут принадлежать одному и тому же свободному множителю G_i). Аналогично вводятся понятия приведенного и полуприведенного разложений на любое число множителей $w = u_1 u_2 \dots u_n$. Элемент w с нормальной формой $w = x_1 \dots x_k$ называется *слабо циклически приведенным*, если $x_1 \neq x_k^{-1}$. В случае когда x_1 и x_k лежат в разных свободных множителях, элемент w называется *циклически приведенным*.

Подмножество R группы F называется *симметризованным*, если каждое слово $r \in R$ является слабо циклически приведенным и каждое слабо циклически приведенное слово, сопряженное любому из элементов r и r^{-1}, принадлежит R.

Наложим на свободное произведение $F = \underset{i}{*}G_i$ конечное множество дополнительных соотношений R. Обозначим через $H = \langle F | R \rangle$ полученную группу.