В. Т. Фоменко, О жесткости выпуклых поверхностей с отороченным краем, *Матем. заметки*, 1979, том 26, выпуск 1, 123–128

https://www.mathnet.ru/mzm8385

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

О ЖЕСТКОСТИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ОТОРОЧЕННЫМ КРАЕМ

В. Т. Фоменко

Пусть S_m — m-связная поверхность с краем ∂S_m в трехмерном евклидовом пространстве E_3. Говорят, что поверхность S_m имеет отороченный край ∂S_m, если для любого бесконечно малого изгибания поверхности вариация нормальной кривизны края равна нулю. В предположении, что $S_m \in D_{3,p}$ $p > 2$; $\partial S_m \in C^{1,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$, $m = 1, 2, 3$, и гауссова кривизна K положительна вплоть до края, жесткость поверхности с отороченным краем была доказана в 1952 г. И. Н. Векуа. Условие $K \geqslant k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, характеризует локальную выпуклость поверхности S_m. В 1947 г. Н. В. Ефимов доказал жесткость выпуклых поверхностей с отороченными плоскими краями и высказал предположение, что любая выпуклая поверхность с отороченным краем является жесткой. Обоснование этого предположения для регулярных овалоидов S_m, $m \geqslant 1$, с гладкими отверстиями довольно общего вида было дано в 1964 г. М. И. Войцеховским. Требование гладкости (а не кусочной гладкости) края при этом существенно: существуют выпуклые поверхности с кусочно гладким краем, допускающие нетривиальные бесконечно малые изгибания с сохранением кривизны края. В настоящей работе результат М. И. Войцеховского переносится на выпуклые кусочно регулярные поверхности с гладким краем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть F_m — выпуклая поверхность, склеенная из поверхностей класса C^3 неотрицательной гауссовой кривизны $K \geqslant 0$, не содержащих плоских областей,* *причем линии склеивания L_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) являются простыми замкнутыми или незамкнутыми непересекающимися кривыми класса C^2. Пусть поверхность F_m ограничена кривыми l_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) класса C^2, не пересекающими линии склеивания, причем кривые l_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) не содержат прямолинейных отрезков и лежат на выпуклых конусах с вершиной в некоторой эллиптической точке O поверхности F_m. Тогда поверхность F_m с отороченным краем жестка.*

Доказательство теоремы проводится методом интегральных формул с использованием соответствующих результатов работ [1] — [3].

1. Следуя [3], начало декартовой системы координат (x, y, z) совместим с точкой O поверхности F_m, поверхность F_m расположим в полупространстве $z \geqslant 0$, так, чтобы плоскость $z = 0$ стала касательной к поверхности в точке O. Произведем проективное преобразование пространства: $x' = x/z$, $y' = y/z$, $z' = 1/z$, при этом поверхность F_m перейдет в поверхность F_m', однозначно проектирующуюся на плоскость $z' = 0$, радиусвектор которой будет иметь компоненты: $x' = u$, $y' = v$, $z' = f'(u, v)$, где $f'(u, v)$ — некоторая функция.

По теореме Дарбу — Зауэра каждому изгибающему полю $\{\xi, \eta, \xi\}$ на поверхности F_m соответствует изгибающее поле $\{\xi', \eta', \zeta'\}$ поверхности F_m', где $\xi' = \xi/z$, $\eta' = \eta/z$, $\zeta' = -(x\xi + y\eta + z\zeta)/z$. Полю вращений на F_m соответствует поле вращений на F_m' с компонентами:

$$\{\zeta_v', -\zeta_u', \eta_u' + z_u'\zeta_v\}, \tag{1}$$

а величинам β, α, γ — вариациям приведенных коэффициентов вторых квадратичных форм поверхности F_m при ее бесконечно малом изгибании — будут соответствовать величины

$$\beta' = \zeta_{uu}', \quad \alpha' = \zeta_{uv}', \gamma' = \zeta_{vv}'. \tag{2}$$

Как показано в [3], условие стационарности нормальной кривизны края $\beta\, \mathrm{d}u^2 + 2\alpha\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \gamma\, \mathrm{d}v^2 = 0$ проективно инвариантно, и поэтому для поверхности F_m' на $\partial F_m'$ в силу (2) имеем

$$\zeta_{uu}'\mathrm{d}u^2 + 2\zeta_{uv}'\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \zeta_{vv}'\mathrm{d}v^2 = 0. \tag{3}$$

2. Будем в дальнейшем линии склеивания называть ребрами, допуская при этом, что ребра могут быть линиями соприкосновения склеиваемых поверхностей. В связи с этим, не нарушая общности, будем считать, что линии склеивания L_i' поверхности F_m' являются замкнутыми непересекающимися кривыми класса C^2. Пусть G_R — область на плоскости (u, v), ограниченная окружностью K_R радиуса R, охватывающей все проекции $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ребер и проекции $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ граничных кривых, и самими кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$. Как и в [1, стр. 475], на каждой кривой T_i будем различать два берега — левый и правый, которые будем снабжать знаками «+» и «—» соответственно, причем направление обхода кривой T_i, оставляющее левый берег ее слева, будем считать положительным. Предельные значения некоторой величины f «слева» и «справа» от T_i будем обозначать через f^+ и f^- соответственно. Применяя к каждому гладкому куску поверхности F_m' формулу С. Н. Бернштейна, а затем суммируя эти равенства по всем кускам, получим

$$2\iint_{G_R}(\zeta'_{uu}\zeta'_{vv}-\zeta'^2_{uv})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\oint_{K_R}(\zeta'_u\,\mathrm{d}\zeta'_v-\zeta'_v\mathrm{d}\zeta'_u)-$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}(\zeta'_u\,\mathrm{d}\zeta'_v-\zeta'_v\mathrm{d}\zeta'_u)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\oint_{T_i^+}\zeta'^+_u\mathrm{d}\zeta'^+_v-\zeta'^+_v\mathrm{d}\zeta'^+_u-\zeta'^-_u\mathrm{d}\zeta'^-_v+\zeta'^-_v\mathrm{d}\zeta'^-_u. \qquad (4)$$

Здесь кривые K_R и Γ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ в плоскости (u, v) обходятся против часовой стрелки.

Первый интеграл в правой части формулы (4) стремится к нулю при $R\to\infty$, что доказывается дословным повторением соответствующих рассуждений работы [3] с использованием при $u^2+v^2\to\infty$ оценок

$$|\zeta'_u|,\ |\zeta'_v|\leqslant c_1,\qquad c_1=\mathrm{const},$$
$$|\zeta'_{uu}|,\ |\zeta'_{uv}|,\ |\zeta'_{vv}|\leqslant c_2/(u^2+v^2),\qquad c_2=\mathrm{const}. \qquad (5)$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, из формулы (4) получаем

$$2\iint_{G}(\zeta'_{uu}\zeta'_{vv}-\zeta'^2_{uv})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}\zeta'_v\mathrm{d}\zeta'_u-\zeta'_u\mathrm{d}\zeta'_v+\sum_{i=1}^{n}\oint_{T_i^+}\zeta'^+_u\mathrm{d}\zeta'^+_v-$$
$$-\zeta'^+_v\mathrm{d}\zeta'^+_u-\zeta'^-_u\mathrm{d}\zeta'^-_v+\zeta'^-_v\mathrm{d}\zeta'^-_u, \qquad (6)$$

где G — область плоскости (u, v), на которую проектируется поверхность F'_m.

3. Наличие ребер у поверхности F'_m не влияет на ход рассуждений работы [3] при определении знака первой суммы в правой части формулы (6), и потому можно записать

$$\sum_{i=1}^{m} \oint_{\Gamma_i} \zeta'_v \mathrm{d}\zeta'_u - \zeta'_u \mathrm{d}\zeta'_v \geqslant 0. \tag{7}$$

4. Перейдем к определению знака интеграла:

$$I_i \equiv \oint_{T_i^+} \zeta_u'^+ \mathrm{d}\zeta_u'^+ - \zeta_v'^+ \mathrm{d}\zeta_u'^+ - \zeta_u'^- \mathrm{d}\zeta_v'^- + \zeta_v'^- \mathrm{d}\zeta_u'^- .$$

Преобразуем подынтегральные выражения, прибавив и отняв выражение $\zeta_v'^- \mathrm{d}\zeta_u'^+ - \zeta_u'^- - \mathrm{d}\zeta_v'^+$. Тогда

$$I_i = \oint_{T_i^+} (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-) \mathrm{d}\zeta_v'^+ - (\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-) \mathrm{d}\zeta_u'^+ +$$
$$+ \oint_{T_i^+} (\mathrm{d}\zeta_v'^+ - \mathrm{d}\zeta_v'^-) \zeta_u'^- - \zeta_v'^- (\mathrm{d}\zeta_u'^+ - \mathrm{d}\zeta_u'^-).$$

Учитывая соотношения

$$\zeta_u'^- (\mathrm{d}\zeta_v'^+ - \mathrm{d}\zeta_v'^-) = \mathrm{d}\,[\zeta_u'^- (\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-)] - (\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-) \mathrm{d}\zeta_u'^-,$$
$$\zeta_v'^- (\mathrm{d}\zeta_u'^+ - \mathrm{d}\zeta_u'^-) = \mathrm{d}\,[\zeta_v'^- (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-)] - (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-) \mathrm{d}\zeta_v'^-,$$

получим следующее выражение для I_i:

$$I_i = \oint_{T_i^+} (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-) \mathrm{d}\zeta_v'^+ - (\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-) \mathrm{d}\zeta_u'^+ +$$
$$+ \oint_{T_i^+} (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-) \mathrm{d}\zeta_v'^- - (\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-) \mathrm{d}\zeta_u'^- +$$
$$+ \int_{T_i^+} \mathrm{d}\,[(\zeta_v'^+ - \zeta_v'^-) \zeta_u'^- - (\zeta_u'^+ - \zeta_u'^-) \zeta_v'^-].$$

Последний интеграл в правой части этой формулы равен нулю, так как он совпадает с приращением функции $\zeta_v'^+ \zeta_u'^- - \zeta_u'^+ \zeta_v'^-$ при однократном обходе замкнутого контура T_i^+. Перейдем к изучению других интегралов формулы (8). Предварительно напомним некоторые известные формулы (см., например, [1, стр. 477]). Обозначим через $\{\bar{s}, \bar{n}\pm, \bar{l}\pm\}$ сопровождающий трехгранник кривой l'_i, где

$\bar{s}$ — касательный вектор, направленный в сторону положительного обхода ребра; $\bar{n}^{\pm}$ — предельное значение нормали поверхности, направленной в сторону вогнутости поверхности $[\bar{l}^{\pm}\bar{s}] = \bar{n}^{\pm}$. Пусть $\bar{V}^{\pm}$ — предельные значения вектора вращения изгибающего поля. Обозначим через $\delta k_n^{\pm}$, $\delta\tau_g^{\pm}$ вариации нормальной кривизны $k_n^{\pm}$ и геодезического кручения $\tau_g^{\pm}$ поверхности в направлении ребра. Имеют место формулы

$$d\bar{V}^{\pm}/ds = \delta k_n^{\pm}\bar{l}^{\pm} + \delta\tau_g^{\pm}\bar{s}, \tag{9}$$

где производная берется по длине дуги кривой l_i'. Рассмотрим в каждой точке кривой l_i' трехгранник $\{\bar{s}, \bar{m}, \bar{b}\}$, где $\bar{m}$ — орт главной нормали кривой l_i'. $[\bar{s}\bar{m}] = \bar{b}$. Обозначим, как в [1, стр. 435], через $\theta^{\pm}$ угол между главной нормалью кривой l_i' и нормалью $\bar{n}^{\pm}$, $-\pi \leqslant \theta^{\pm} \leqslant \pi$. Угол $\theta^{\pm}$ считаем положительным, если в результате поворотов $\{\bar{s}, \bar{m}, \bar{b}\}$ вокруг $\bar{s}$ на угол $\theta^{\pm}$ против хода часов мы получим трехгранник $\{s, \bar{n}^{\pm}, \bar{l}\}$. В противном случае считаем угол $\theta^{\pm}$ отрицательным. Пусть $\delta\vartheta$ — вариация угла склеивания $\vartheta = \theta^{-} - \theta^{+}$ поверхности F_m' вдоль ребра l_i' при бесконечно малом изгибании поверхности F_m'. Тогда

$$\bar{V}^{+} - \bar{V}^{-} = -\delta\vartheta\bar{s}, \tag{10}$$

$$\delta k_n^{\pm} = -(k_n^{\mp}/\sin\vartheta)\,\delta\vartheta \text{ при } \sin\vartheta \neq 0. \tag{11}$$

В случае, когда поверхность однозначно проектируется на плоскость $Ox'y'$, из формул (9), (10) с помощью (1) находим

$$\begin{aligned} d\zeta_v'^{\pm}/ds &= \delta k_n^{\pm} l_1^{\pm} + \delta\tau_g^{\pm} s_1, \\ -\,d\zeta_u'^{\pm}/ds &= \delta k_n^{\pm} l_2^{\pm} + \delta\tau_g^{\pm} s_2, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \zeta_v'^{+} - \zeta_v'^{-} &= -\,\delta\vartheta s_1, \\ \zeta_u'^{+} - \zeta_u'^{-} &= +\,\delta\vartheta s_2, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\{l_1^{\pm}, l_2^{\pm}, l_3^{\pm}\} = \bar{l}^{\pm}$, $\{s_1, s_2, s_3\} = \bar{s}$. Учитывая, что на линиях гладкого склеивания вектор вращения $\bar{V}^{\pm}$ непрерывен, т. е. $\zeta_u'^{+} = \zeta_u'^{-}$, $\zeta_v'^{+} = \zeta_v'^{-}$, имеем

$$I_i = \int_{\tilde{T}_i^{+}} (\zeta_u'^{+} - \zeta_u'^{-})\, d(\zeta_v'^{+} + \zeta_v'^{-}) - (\zeta_v'^{+} - \zeta_v'^{-})\, d(\zeta_u'^{+} + \zeta_u'^{-}), \tag{14}$$

где $\widetilde{T}_i^+$ обозначает ту часть контура T_i^+, на которой $\vartheta \neq 0$. Подставим формулы (12), (13) в формулу (14), тогда

$$I_i = \int_{\widetilde{T}_i^+} [\delta\vartheta s_2 (\delta k_n^+ l_1^+ + \delta\tau_g^+ s_1 + \delta k_n^- l_1^- + \delta\tau_g^- s_1) - \\ - \delta\vartheta s_1 (\delta k_n^+ l_2^+ + \delta\tau_g^+ s_2 + \delta k_n^- l_2^- + \delta\tau_g^- s_2)]\, ds.$$

Проводя необходимые преобразования подынтегрального выражения, получим

$$I_i = \int_{\widetilde{T}_i^+} \delta\vartheta\, [\delta k_n^+ (l_1^+ s_2 - l_2^+ s_1) + \delta k_n^- (s_2 l_1^- - l_2^- s_1)]\, ds.$$

Пользуясь формулами (11), отсюда находим

$$I_i = - \int_{\widetilde{T}_i^+} (\delta\vartheta)^2 \sin^{-1}\vartheta\, (k_n^- n_3^+ + k_n^+ n_3^-)\, ds,$$

где $n_3^\pm = l_1^\pm s_2 - l_2^\pm s_1$. Так как поверхность F_m' расположена выпуклостью вниз и ориентируема внутренним образом, то на $\widetilde{T}_i^\pm \sin\vartheta < 0$, $k_n^\pm \geqslant 0$, $n_3^\pm > 0$ и потому $I_i \geqslant 0$. Это вместе с (7) означает, что правая часть формулы (6) неотрицательна.

5. Известно [2], что условие $K \geqslant 0$ влечет неравенство $\zeta_{uu}' \zeta_{vv}' - \zeta_{uv}'^2 \leqslant 0$ вне плоских кусков. Таким образом, для выполнения (6) необходимо $\zeta_{uu}' \zeta_{vv}' - \zeta_{uv}'^2 = 0$, откуда в силу $K \geqslant 0$ получаем $\zeta_{uu}' = \zeta_{uv}' = \zeta_{vv}' = 0$. Отсюда вытекает, что изгибающее поле на каждом регулярном куске поверхности F_m' тривиально, что приводит к жесткости поверхности F_m' при условиях (3), (5) и жесткости поверхности F_m с отороченным краем. Теорема доказана.

Таганрогский государственный
педагогический институт

Поступило
16.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., Физматгиз, 1959.
[2] Ефимов Н. В., Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, Успехи матем. наук, 3, № 2 (1948), 47—158.
[3] Войцеховский М. И., О жесткости выпуклых поверхностей с краем, Вестник МГУ, Сер. матем.-механ., № 6 (1964).