V. A. Kurchatov, A way of accelerating the convergence of iteration processes,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1978, Number 3, 43–47

https://www.mathnet.ru/eng/ivm5739

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1978 МАТЕМАТИКА № 3 (190)

УДК 517.948

В. А. Курчатов

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Способ ускорения

Пусть

$$x = \varphi(x) \tag{1.1}$$

— функциональное уравнение с оператором φ, действующим в банаховом пространстве X и x^* — решение уравнения (1.1). Полагаем далее, что итерационный процесс

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

где x_0 — начальное приближение, сходится к точному решению уравнения (1.1).

Считается [1], что итерационный процесс (1.2) в достаточно малой выпуклой окрестности ω точного решения x^* сходится к x^* со скоростью порядка $k = 1$, если в области ω

$$\| \varphi(x) - x^* \| \leqslant \alpha \| x - x^* \|, \tag{1.3}$$

где α — некоторое положительное число, меньше единицы, и со скоростью порядка $k > 1$, если для всех $x \in \omega$

$$\| \varphi(x) - x^* \| \leqslant \sigma \| x - x^* \|^k, \tag{1.4}$$

где $\sigma = \mathrm{const} > 0$. Так как точное решение x^* по методу (1.2) получается как предел последовательности $\{x_{n+1}\}_1^\infty$, то ясно, какое значение имеют способы ускорения сходимости итерационных процессов. Одним из эффективных способов ускорения сходимости итерационных процессов (1.2), когда $\varphi(x)$ — вещественная функция, является способ, предложенный Эйткеном [2] и Стеффенсеном [3]. Возможность применения способа Эйткена — Стеффенсена для нахождения приближенного решения функциональных уравнений (1.1) обоснована С. Ю. Ульмом [4] и Б. А. Бельтюковым [5]. Возмущенный аналог метода Эйткена—Стеффенсена и его блочные модификации рассмотрены Б. А. Бельтюковым и С. С. Волошиным [6]. Некоторое обобщение способа Эйткена — Стеффенсена изложено А. В. Прокопченко [7].

Способ Эйткена—Стеффенсена состоит в том, что исходя из начального приближения x_0, осуществляется одна итерация по формуле (1,2), и полученное приближение $x_1 = \varphi(x_0)$ уточняется по классическому методу хорд [8]:

$$x_2 = x_1 - F^{-1}(x_1, x_0) F(x_0),$$

где $F(u, v)$—разделенная разность [8]—[10] оператора $F(x) = x - \varphi(x)$ $F^{-1}(u, v)$—оператор, обратный к $F(u, v)$.

Этот процесс неоднократно повторяется, в результате чего получается итерационный метод

$$y_n = \varphi(x_n),$$
$$x_{n+1} = y_n - F^{-1}(y_n, x_n) F(y_n), \tag{1.5}$$

или

$$x_{x+1} = \varphi(x_n) - F^{-1}(\varphi(x_n), x_n) F(\varphi(x_n)). \tag{1.6}$$

Отметим, что метод (1.5) допускает также запись:

$$x_{n+1} = x_n - F^{-1}(\varphi(x_n), x_n) F(x_n).$$

С помощью способа ускорения (1.5) быстроту сходимости итерационных процессов вида (1.2) можно существенно увеличить: порядок итерационного процесса (1.5) равен двум, если порядок процесса (1.2) равен единице, и не ниже $2k-1$, если порядок (1.2) равен $k > 1$ [2], [11].

В статье предлагается следующий способ ускорения сходимости итерационных процессов. Проделаем две итерации по методу (1.2):

$$v_0 = \varphi(x_0), \; u_0 = \varphi(v_0).$$

Используя v_0, u_0, как опорные точки, приближение u_0 уточним по методу линеаризации [12], [13], имеющего в отличие от классического метода хорд [8] более высокую скорость сходимости — квадратичную. Тогда получим приближение x_1,

$$x_1 = u_0 - H^{-1}(u_0, v_0) F(u_0),$$

где $H(u, v)$ — линейный ограниченный оператор в X, определяемый при $u \neq v \in \omega$ равенством

$$\| F(2u - v) - F(v) - 2H(u, v)(u - v) \| \leqslant \delta \| u - v \|^3, \tag{1.7}$$

где δ — некоторое положительное число.

Продолжая этот процесс и далее, получим последовательность приближенных решений $\{x_{n+1}\}$,

$$x_{n+1} = \varphi(\varphi_n) - H^{-1}(\varphi(\varphi_n), \varphi_n) F(\varphi(\varphi_n)) = \psi(x_n), \tag{1.8}$$

где $\varphi_n = \varphi(x_n)$.

Следующее утверждение устанавливает, что процесс (1.8) сходится существенно быстрее, чем итерационный процесс Эйткена — Стеффенсена (1.6), причем превышение будет тем более существенным, чем выше порядок итерационного процесса (1.2).

Теорема. *Пусть в некоторой окрестности* ω *точного решения* x^*, *определяемой неравенством*

$$\omega = \{ \| x - x^* \| \leqslant 1 \}: \tag{1.9}$$

1) *итерирующая функция* $\varphi(x)$ *метода* (1.2) *удовлетворяет неравенству* (1.3) *или* (1.4);

2) *оператор* F *трижды дифференцируем по Фреше и*

$$\| F(u, v) \| \leqslant L, \; \| F''(x) \| \leqslant M, \; \| F'''(x) \| \leqslant N;$$

3) *оператор* $H(u, v)$ *имеет обратный* $H^{-1}(u, v)$, *причем* $\| H^{-1}(u, v) \| \leqslant B$,

Тогда порядок итерационного процесса (1.8) *характеризуется равенством* $\|\psi(x)-x^*\| = o(\alpha^4)\cdot o(\|x-x^*\|^2)$, *если порядок итерационного процесса* (1.2) *равен* $k=1$ *и не ниже* $k^2+k\min\{2, k\}$, *если порядок метода* (1.2) *равен* $k>1$. *Для сходимости итерационного процесса* (1.8) *достаточно выполнения неравенства*

$$q_k = \theta_k \gamma_k^{k+3} \varepsilon_0^{k^2+k\min(2,k)-1} < 1, \tag{1.10}$$

где $\theta_k = \frac{B}{2}\left\{L^2\left(\delta+\frac{N}{3}\right)+\gamma_k^{k-1}M\right\}$, $\varepsilon_0 \geqslant \|x_0-x^*\|$, *число* $\gamma_k=\alpha$, *если* $k=1$ *и* $\gamma_k=\sigma$ *при* $k>1$.

Доказательство. Вычитая из правой и левой частей равенства (1.8) элемент x^* и учитывая, что $F(x^*)=0$, получим

$$\begin{aligned}\psi(x)-x^* &= H^{-1}(\varphi(\varphi), \varphi)[H(\varphi(\varphi), \varphi)-F(\varphi(\varphi), x^*)](\varphi(\varphi)-x^*) = \\ &= H^{-1}(\varphi(\varphi), \varphi)[H(\varphi(\varphi), \varphi)-F'(\varphi(\varphi))+F'(\varphi(\varphi)) - \\ &\quad - F(\varphi(\varphi), x^*)](\varphi(\varphi)-x^*),\end{aligned}$$

где $\varphi=\varphi(x)$. Из (1.7) для u, v, $2u-v\in\omega$ следует, что

$$\|[F'(u)-H(u, v)](u-v)\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\delta+\frac{N}{3}\right)\|u-v\|^3. \tag{1.11}$$

Применяя формулу Тейлора, устанавливаем, что

$$\|[F'(u)-F(u, v)](u-v)\| \leqslant \frac{1}{2}M\|u-v\|^2. \tag{1.12}$$

Учитывая (1.11) и (1.12), получим

$$\|\psi(x)-x^*\| \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi(\varphi)-x^*\|B\left\{\|F(\varphi)\|^2\left(\delta+\frac{N}{3}\right)+M\|\varphi(\varphi)-x^*\|\right\}. \tag{1.13}$$

Если порядок итерационного процесса (1.2) равен $k=1$ (т. е. выполнено неравенство (1.3)), то согласно (1.13) получим, что $\|\psi(x)-x^*\| \leqslant \theta_1\alpha^4\|x-x^*\|$.

Если же порядок итерационного процесса (1.2) больше единицы (т. е. имеет место неравенство (1.4)), то на основании (1.13) и (1.9) имеем, что

$$\|\psi(x)-x^*\| \leqslant \theta_k\sigma^{k+3}\|x-x^*\|^{k^2+k\min(2,k)}$$

и, следовательно, в этом случае порядок итерационного процесса (1.8) не меньше $k^2+k\min(2, k)$.

Покажем теперь, что для сходимости процесса (1.8) достаточно, чтобы имело место неравенство (1.10). Действительно, если неравенство (1.10) справедливо, то все приближения x_n, определенные по способу (1.8), будут лежать в области ω, при этом $\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant q_k\|x_n-x^*\|$, что свидетельствует о сходимости процесса (1.8) к точному решению.

Доказательство теоремы завершено.

Примечание. Процесс (1.8) сходится и в том случае, когда $\|\varphi'(x)\|>1$, однако, скорость сходимости при этом понижается.

§ 2. Некоторые применения способа ускорения сходимости итерационных процессов

1°. Рассмотрим сначала систему вещественных уравнений

$$\xi_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{2.1}$$

где φ_i — трижды диффеоенцируемые функции.

Полагаем, что процесс простой итерации

$$\xi_i^{(n+1)} = \varphi_i(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

при любом начальном приближении $(\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_m^{(0)})$, достаточно близком к искомому решению $(\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)$, сходится к $(\xi_1^*, \ldots, \xi_m^*)$. Согласно (1.8) последовательные приближения к точному решению системы (2.1) определятся по формуле

$$\alpha_i^{(n)} = \varphi_i(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}),$$

$$\beta_i^{(n)} = \varphi_i(\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_m^{(n)}),$$

$$\sum_{j=1}^{m} h_{ij}^{(n)}(\xi_j^{(n+1)} - \beta_j^{(n)}) = -f_i(\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_m^{(n)}), \tag{2.3}$$

где $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \xi_i - \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и

$$h_{ij}^{(n)} = \frac{f_i(\beta_1^{(n)}, \ldots, 2\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}, \ldots, \beta_m^{(n)}) - f_i(\beta_1^{(n)}, \ldots, \alpha_j^{(n)}, \ldots, \beta_m^{(n)})}{2(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)})},$$

причем полагаем, что при $\alpha_j^{(n)} = \beta_j^{(n)}$

$$h_{ij}^{(n)} = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_m^{(n)}).$$

Отметим, что на практике при $\alpha_j^{(n)} = \beta_j^{(n)}$ с целью избежания вычисления производной $\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(\beta_1^{(n)}, \ldots, \beta_m^{(n)})$ можно вместо $\beta_j^{(n)} = \alpha_j^{(n)}$ взять любое число $\widetilde{\beta}_j^{(n)}$, достаточно близкое к $\beta_j^{(n)}$, что, очевидно, существенно не повлияет на быстроту сходимости (2.3).

2°. Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x)) \, dt, \tag{2.4}$$

где $K(s, t, x(t))$ — непрерывная функция, трижды дифференцируемая по функциональному аргументу $x(t)$. Допустим, что итерационный процесс

$$x_{n+1}(s) = \int_0^1 K(s, t, x_n(t)) \, dt, \; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

сходится к точному решению уравнения (2.4).

В этом случае последовательные приближения согласно (1.8) определяются по формулам

$$v_n(t) = \int_0^1 K(s, t, x_n(t)) \, dt,$$

$$u_n(t) = \int_0^1 K(s, t, v_n(t)) \, dt,$$

$$x_{n+1}(s) - u_n(s) \int_0^1 h^{(n)}(s, t)(x_{n+1}(t) - u_n(t)) \, dt = \varepsilon_n(s), \tag{2.6}$$

где

$$\varepsilon_n(s) = \int_0^1 K(s,\ t,\ u_n(t))\,dt - u_n(s),$$

$$h^{(n)}(s,\ t) = \frac{K(s,\ t,\ 2u_n(t) - v_n(t)) - K(s,\ t,\ v_n(t))}{2(u_n(t) - v_n(t))},$$

причем полагаем, что функция $h^{(n)}(s,\ t)$ при значениях $t = t_k$, в которых $u_n(t_k) = v_n(t_k)$, равна $K'_x(s,\ t_k,\ u(t_k))$.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$x(s) = -0{,}3 + s + \int_0^1 (0{,}4x(t) - 2^{x(t)-t})\,dt = \varphi[x(s)],$$

точное решение которого $x^*(s) = -1+s$. В данном случае $\|\varphi'(x^*)\| < 1$, поэтому метод простой итерации (2.5) сходится к искомому решению $x^*(s)$. В качестве начального приближения возьмем $x_0(s) = -0{,}3 + s$ и уточним его по способу (2.6). Найденное приближение $x_1(s) = -1{,}00006 + s$ отличается от точного решения $x^*(s)$ на величину $|x_1(s) - x^*(s)| = 0{,}00006$, в то время как начальное приближение $x_0(s)$ отличается от $x^*(s)$ на величину $|x_0(s) - x^*(s)| = 0{,}7$.

Метод Эйткена—Стеффенсена при том же начальном приближении позволяет получить $z_1(s) = -1{,}0031 + s$, которое отличается от искомого решения на величину $|z_1(s) - x^*(s)| = 0{,}0031$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., „Мир", 1969.

2. Хаусхолдер А. С. Основы численного анализа. М., ИИЛ, 1956.

3. Stebbensen I. F. Remarks on in iteration Skand. Aktuar. Tidskr., v. 16, 1933, p. 64—72.

4. Ульм С. Ю. Обобщение метода Стеффенсена для решения операторных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 4, № 6, 1964, с. 1093—1097.

5. Бельтюков Б. А. Об одном методе решения нелинейных функциональных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 5, № 5, 1965, с. 927—931.

6. Бельтюков Б. А., Волокитин С. С. Блочные модификации возмущенного метода Эйткена—Стеффенсена. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 13, № 6, 1973, с. 1390—1401.

7. Прокопченко А. В. Об итерационных процессах высших порядков. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 14, № 1, 1974, с. 230—233.

8. Сергеев А. С. О методе хорд. Сиб. матем. журн. т. XI, № 2, 1961, с. 282—289.

9. Schmidt I. W. Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banachräumen. I. Z. angew. Math. und Mech., v. 43, № 1—2, 1963, p. 1—8.

10. Schmidt I. W. Eine Übertragung der Regula Fasil auf Gleichungen in Banachräumen. II. Z. angew. Math. und Mech., v. 43, № 3, 1963, p. 97—110.

11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. I, М., „Наука", 1966.

12. Курчатов В. А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений. ДАН СССР, т. 198, № 3, 1971, с. 524—526.

13. Курчатов В. А. Об условиях применения одного метода линейной интерполяции для решения функциональных уравнений. Изв. вузов. Матем., 1975, № 8, с. 55—53.

г. Казань

Поступила
5 V 1975