



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

B. I. Zaslavskii, N. A. Klepikova, On a class of exact particular solutions of the equations of transonic gas flows, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1965, Volume 6, Issue 6, 65–68

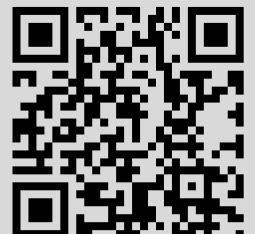
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

March 17, 2025, 07:40:25



ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Б. И. Заславский, Н. А. Клепикова

(Новосибирск)

Определяются точные частные решения уравнений околозвуковых течений газа, аналогичные решениям, найденным в работах [1-3] для уравнений коротких волн. Используя полученные решения, построено течение вокруг некоторого контура, обтекаемого сверхзвуковым потоком с присоединенным скачком уплотнения.

§ 1. Пусть u, v — проекции вектора скорости на оси x, y декартовой системы координат; a — скорость звука; t — время; P_*, ρ_*, a_* — критические параметры потока; l — характерный размер; ε — некоторая малая величина. Введем также следующие обозначения

$$\frac{u}{a_*} = 1 - \varepsilon \frac{U}{\kappa + 1}, \quad \frac{v}{a_*} = \varepsilon^{3/2} \frac{V}{\kappa + 1}, \quad \frac{x}{a_* t_*} = \varepsilon X,$$

$$\frac{y}{a_* t_*} = \varepsilon^{1/2} Y, \quad a_*^2 = \frac{P_* \kappa}{\rho_*}, \quad \tau = \frac{t}{2t_*}, \quad t_* = \frac{l}{\varepsilon a_*}$$

Уравнения нестационарных околозвуковых течений [4,5] имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (1.1)$$

Будем искать частные решения уравнений (1.1) в виде

$$U = \varphi_2(q, \tau) Y^2 + \varphi_1(q, \tau) Y + \varphi_0(q, \tau)$$

$$V = \psi_3(q, \tau) Y^3 + \psi_2(q, \tau) Y^2 + \psi_1(q, \tau) Y + \psi_0(q, \tau) \quad (1.2)$$

$$X = qY^2 + \chi_1(q, \tau) Y + \chi_0(q, \tau) \quad (q - \text{параметр})$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для определения функций $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0, \psi_3, \psi_2, \psi_1, \psi_0, \chi_1, \chi_0$, где индексами внизу обозначено дифференцирование по соответствующим аргументам

$$\varphi_{2\tau} - \varphi_2 \varphi_{2q} - 2q\varphi_{3q} + 3\psi_3 = 0 \quad (1.3)$$

$$\varphi_{1\tau} + \varphi_{2\tau} \chi_{1q} - \varphi_{2q} \chi_{1\tau} - \varphi_1 \varphi_{2q} - \varphi_2 \varphi_{1q} + 2\psi_2 + 3\psi_3 \chi_{1q} - 2\psi_{2q} q - \chi_1 \psi_{3q} = 0$$

$$\varphi_{0\tau} + \varphi_{1\tau} \chi_{1q} + \varphi_{2\tau} \chi_{0q} - \varphi_{1q} \chi_{1\tau} - \varphi_{2q} \chi_{0\tau} - \varphi_2 \varphi_{0q} - \varphi_1 \varphi_{1q} - \varphi_2 \varphi_{0q} +$$

$$+ \psi_1 + 2\psi_2 \chi_{1q} + 3\psi_3 \chi_{0q} - 2q\psi_{1q} - \chi_1 \psi_{2q} = 0$$

$$\varphi_{0\tau} \chi_{1q} + \varphi_{1\tau} \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_{1\tau} - \varphi_{1q} \chi_{0\tau} - \varphi_0 \varphi_{1q} - \varphi_1 \varphi_{0q} +$$

$$+ \chi_{1q} \psi_1 + 2\psi_2 \chi_{0q} - 2q\psi_{0q} - \chi_1 \psi_{1q} = 0$$

$$\varphi_{0\tau} \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_{0\tau} - \varphi_0 \varphi_{0q} + \psi_1 \chi_{0q} - \chi_1 \psi_{0q} = 0$$

$$2\psi_2 - 2q\varphi_{2q} + \psi_{3q} = 0$$

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 \chi_{1q} - 2q\varphi_{1q} - \varphi_{2q} \chi_1 + \psi_{2q} = 0$$

$$\chi_{1q} \varphi_1 + 2\varphi_2 \chi_{0q} - 2q\varphi_{0q} - \varphi_{1q} \chi_1 + \psi_{1q} = 0$$

$$\varphi_1 \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_1 + \psi_{0q} = 0$$

Следуя работе [1], систему (1.3) можно привести к виду (1.4)

$$\begin{aligned} \varphi_{2\tau} + 4q\varphi_2 + 3\psi_3 - \varphi_2\varphi_{2q} - 4q^2\varphi_{2q} &= 0, & \psi_1 &= \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_1\chi_1 - \varphi_{0\tau} \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}\varphi_{1q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_2\chi_1 - q\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_{1\tau}, & \psi_{0q} &= \varphi_{0q}\chi_1 - \varphi_1\chi_{0q} \\ \chi_{1q}\varphi_2 + 4q^2\chi_{1q} - \chi_{1\tau} - \varphi_1 - 4q\chi_1 &= 0, & \psi_{2q} &= \varphi_{2q}\chi_1 + 2q\varphi_{1q} - 2\varphi_2\chi_{1q} - \varphi_1 \\ \chi_{0q}\varphi_2 + 4q^2\chi_{0q} - \chi_{0\tau} - \varphi_0 - \chi_1^2 &= 0, & \psi_{1q} &= \varphi_{1q}\chi_1 + 2q\varphi_{0q} - 2\varphi_2\chi_{0q} - \varphi_1\chi_{1q} \end{aligned}$$

Функция φ_2 определяется из уравнения

$$\varphi_{2\tau q} - \varphi_{2qq}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{2q}(\varphi_{2q} - 2q) - 2\varphi_2 = 0 \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) имеет частные решения

$$\varphi_2 = A(\tau) \sqrt{q + B(\tau)} - D(\tau)q - \Phi(\tau), \quad \varphi_2 = -q^2 + C(\tau)$$

Здесь $C(\tau)$ и $B(\tau)$ — произвольные функции, D и Φ зависят от выбора $B(\tau)$. В стационарном случае $A, B, C = \text{const}$, общее решение уравнения (1.5) и его особый интеграл соответственно будут

$$\varphi_2 = 2A \sqrt{q + B} - 4Bq - 8B^2, \quad \varphi_2 = -q^2 + C \quad (1.6)$$

Положим $\varphi_{0q} = \varphi_{2q}v + \mu$, $\chi_{0q} = v$, $\varphi_{1q} = \varphi_{2q}\chi_{1q} + \xi$, $\chi_{1q} = \eta$. Преобразованиями, аналогичными [1], система (1.4) приводится к виду

$$\begin{aligned} \mu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\mu(\varphi_{2q} + 3q) - \mu_\tau - 2\xi\chi_1 &= 0 \\ v_q(\varphi_2 + 4q^2) + 8qv - v_\tau - \mu - 2\chi_1\chi_{1q} &= 0 \\ \xi_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\xi(\varphi_{2q} + q) - \xi_\tau &= 0 \\ \eta_q(\varphi_2 + 4q^2) + \eta(\varphi_{2q} + 12q) - \eta_\tau - \xi_q &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \int (\varphi_{0q}\chi_1 - \varphi_1\chi_{0q}) dq, & \psi_2 &= \frac{1}{2}\varphi_{1q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_2\chi_1 - q\varphi_1 - \frac{1}{2}\varphi_{1\tau} \\ \psi_1 &= \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_1\chi_1 - \varphi_{0\tau}, & 3\psi_3 &= \varphi_{2q}(\varphi_2 + 4q^2) - 4q\varphi_2 - \varphi_{2\tau} \end{aligned}$$

Определение решений вида (1.2) сводится к интегрированию уравнения (1.5) и решению последовательно четырех уравнений.

§ 2. В стационарном случае общее решение системы (1.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi &= C \exp\left(-\int \frac{2(\varphi_2' + q)}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) \\ \eta &= \exp\left(-\int \frac{\varphi_2' + 12q}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) \left[\int \frac{\xi'}{\varphi_2 + 4q^2} \exp\left(\int \frac{\varphi_2' + 12q}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) dq + C_1 \right] \\ \mu &= \exp\left(-\int \frac{2(\varphi_2' + 3q)}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) \left[\int \frac{2\xi\chi_1}{\varphi_2 + 4q^2} \exp\left(\int \frac{2(\varphi_2' + 3q)}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) dq + C_2 \right] \\ v &= \exp\left(-\int \frac{8q}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) \left[\int \frac{\mu + 2\chi_1\chi_{1q}}{\varphi_2 + 4q^2} \exp\left(\int \frac{8q}{\varphi_2 + 4q^2} dq\right) dq + C_3 \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если $\varphi_2 = -q^2 + C$, то при ξ и μ , равных тождественно нулю, решения (2.1) определяют течение типа течения Прандтля — Майера, сопряженное с течением другого типа, причем линия перехода — прямая при $v \equiv 0$, $C = 0$ и отличная от прямой при $v \neq 0$ — всегда проходит через особую точку. Таким образом, (2.1) определяют течение как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой областях. При $C = 0$ выражения (2.1) имеют вид

При $\chi_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ функции φ_0 , χ_0 , ψ_1 , ψ_3 определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \chi_0'(\varphi_2 + 4q^2), & \psi_1 &= \varphi_0'(\varphi_2 + 4q^2), & v_q(\varphi_2 + 4q^2) + 8qv - \mu &= 0 \\ \mu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\mu(\varphi_2' + 3q) &= 0, & \psi_3 &= \frac{1}{3}[\varphi_2'(\varphi_2 + 4q^2) - 4q\varphi_2] \\ & & (\chi_0 &= \int v dq) \end{aligned}$$

Их общее решение при $\varphi_2 = 2A \sqrt{q+B} - 4Bq - 8B^2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mu &= C |q+B|^{-5/6} |\varphi_2 + 4q^2|^{-1/3} \\ v &= |q+B|^{1/6} |\varphi_2 + 4q^2|^{-4/3} [C_1 \sqrt{q+B} - 2C] \\ \varphi_0 &= |q+B|^{-5/6} |\varphi_2 + 4q^2|^{-4/3} [C_1 \sqrt{q+B} - 2C] (\varphi_2 + 4q^2) \\ \psi_1 &= -\varphi_2' \varphi_0 - C |\varphi_2 + 4q^2|^{2/3} |q+B|^{-5/6} \\ \psi_3 &= -2/3 [\varphi_2' (\varphi_2 + 4q^2) - 2q\varphi_2] \end{aligned}$$

§ 3. Уравнения осесимметричных течений в координатах

$$X = \frac{r}{a_* t_* \varepsilon}, \quad Y = \frac{r}{a_* t_*} \varepsilon^{-1/2}, \quad \tau = \frac{t}{2i_*}, \quad t_* = \frac{l}{\varepsilon a_*}$$

имеют вид [5]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{V}{Y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) имеют класс точных частных решений вида

$$\begin{aligned} U &= \varphi_2(q, \tau) Y^2 + \int (\varphi_{2q} v + \mu) dq, \quad X = qY^2 + \int v dq \\ V &= \psi_3(q, \tau) Y^3 + 2Y \int [-\varphi_2 v + q\varphi_{2q} v + q\mu] dq \end{aligned} \quad (3.2)$$

где функции φ_2, v, μ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} v_\tau - v_q (\varphi_2 + 4q^2) - 8qv + \mu &= 0, \quad \mu_\tau - \mu_q (\varphi_2 + 4q^2) - \mu (2\varphi_{2q} + 4q) = 0 \\ \varphi_{2\tau q} - \varphi_{2qq} (\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{2q} (\varphi_{2q} - 4q) - 4\varphi_2 &= 0 \\ \psi_1 &= -1/2 [\varphi_{0\tau} - \varphi_{0q} (\varphi_2 + 4q^2)], \quad \psi_3 = -1/4 [\varphi_{2\tau} - \varphi_{2q} (\varphi_2 + 4q^2) + 4q\varphi_2] \end{aligned}$$

В классе частных решений (3.2), в частности, содержит решение

$$\begin{aligned} U &= -2/3 q^2 Y^2 + C_1 q^{3/5} + 10/3 C_2 q^{-2/5}, \quad X = qY^2 - 3/4 C_1 q^{-2/5} - 5/7 C_2 q^{-7/5} + C_3 \\ V &= -4/9 q^3 Y^3 + C_1 q^{3/5} Y - 20/9 C_2 q^{3/5} Y \quad (C_1, C_2, C_3 = \text{const}) \end{aligned}$$

§ 4. Пусть профиль некоторого заостренного тела помещен в равномерный сверхзвуковой поток. Перед телом возникнет скачок уплотнения, на нем должны выполняться условия динамической совместности, которые в околосзвуковом приближении имеют вид [4]

$$2 \frac{\partial X}{\partial \tau} + U_1 + U + 2 \left(\frac{\partial X}{\partial Y} \right)^2 = 0, \quad (U - U_1) \frac{\partial X}{\partial Y} = V - V_1 \quad (4.1)$$

где $X = X(Y, \tau)$ — уравнение, определяющее положение скачка, U_1, V_1 — составляющие вектора скорости перед ним. Рассмотрим течения с присоединенным скачком, уравнение которого зададим в виде параболы

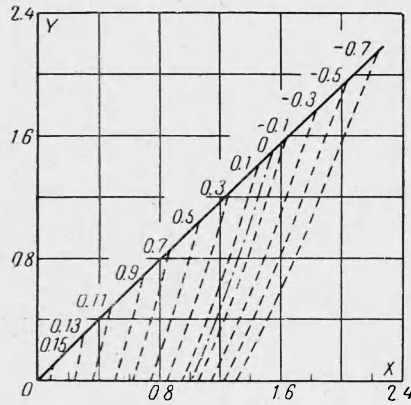
$$X = q_0 Y^2 + 2Dq_0 Y \quad (4.2)$$

Если течение нестационарно, то $q = q_0(\tau)$ и $D = D_0(\tau)$ — некоторые функции времени; течение будем строить при помощи частных решений (1.2). Эти решения не обладают степенью произвола, достаточной для точного удовлетворения всем граничным условиям на ударном фронте и контуре тела при его произвольной конфигурации, поэтому будем строить течение, совместное с (4.1), (4.2), а за стенки примем линию тока, проходящую через точку пересечения оси координат и ударного фронта.

Условия на скачке уплотнения (4.1), на котором $q = q_0$, накладывают следующие граничные условия на функции $\varphi_0, \varphi_1, \chi_0, \chi_1$ при $q = q_0$

$$\begin{aligned} \varphi_2 + 8q_0^2 = 0, \quad 20q_0 - \varphi_{2q} = 0, \quad 1/2 \varphi_2 \varphi_{1q} - 10q\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 \chi_{1q} = 0 \\ \varphi_{0q} - 4\chi_{1q} \chi_1 - 4q\chi_{0q} = 0, \quad \varphi_0 - U_1 - \chi_{0q} \varphi_2 = 0, \quad \psi_0 - \chi_1 \chi_{0q} \varphi_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $q_0 = q(\tau)$, условия совместности на скачке уплотнения имеют вид



$$dq/d\tau = -(\varphi_2 + 4q^2) + 1/2\varphi_2$$

$$d\varphi_2/d\tau = 1/2\varphi_2(\varphi_{2q} - 20q)$$

$$d\varphi_1/d\tau = 1/2\varphi_{1q}\varphi_2 - 6q\varphi_1 - 4\varphi_2\chi_1$$

$$\varphi_1 - \varphi_2\chi_{1q} = 0$$

$$d\varphi_0/d\tau = 1/2\varphi_2(\varphi_{0q} - 4\chi_{1q}\chi_1 - 4q\chi_{0q})$$

$$\varphi_0 - U_1 - \chi_{0q}\varphi_2 = 0, \quad \psi_0 - \chi_1\chi_{0q}\varphi_2 = 0$$

Будем рассматривать стационарный случай. Из (4.3) следует, что если перед ударным фронтом поток равномерный, то

$$\varphi_2 = -8q_0^2\varphi_2^\vee$$

$$\varphi_2^\vee = 43/121 \sqrt{12 - 11p} - 6/11p + 144/121$$

Таким образом, течение с ударной волной, заданной в виде параболы, имеет вид

$$U = -8q_0^2\varphi_2^\vee Y^2 - 16q_0^2 D\varphi_2^\vee Y + \varphi_0 - 8q_0^2 D^2\varphi_2^\vee$$

$$X = q_0 p Y^2 + 2Dq_0 Y p - \frac{1}{4q_0} \int_1^p \varphi_0 (2\varphi_2^\vee - p^2)^{-1} dp + q_0 p D^2 - q_0 D^2 \quad (4.4)$$

$$V = 32/3 q_0^3 [\varphi_{2p}^\vee (2\varphi_2^\vee - p^2) + p\varphi_2^\vee] (Y + D)^3 - 8q_0 (Y + D) \{-1/3 (\varphi_{2p}^\vee - p) \varphi_0 + U_1 (2\varphi_2^\vee - p^2)^{3/2} \times \\ \times [(12 - 11p)^{1/2} + 2/3 (12 - 11p)^{-5/2}]\} + 32q_0^3 D^2 Y$$

$$\varphi_0 = -1/11 U_1 |12 - 11p|^{1/2} (2\varphi_2^\vee - p^2)^{-1/2} [3 \sqrt{12 - 11p} + 8]$$

Произвольные постоянные C, D определяются по заданной скорости U_1 и углу наклона ударной волны в точке $Y = 0$. Из (4.1) и (4.4)

$$C = \frac{U_1}{4}, \quad D = \frac{1}{2q_0} \frac{dX}{dY}$$

Здесь q_0 — свободный параметр, его можно выбрать так, чтобы линия перехода проходила через точку $X = 1, Y = 0$. На фигуре показано обтекание профиля для случая $U_1 = 2.16, dX/dY = 1$; пунктирными линиями показаны линии равных скоростей и давлений, сплошной линией — ударный фронт. Профиль тела в данном случае близок к профилю клина с заметным изгибом стенок в окрестности линии перехода.

Поступила 27 VII 19 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Березин О. А., Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
3. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких» волн. ПМТФ, 1962, № 1.
4. Овсянников Л. В. Уравнения околосвукового движения газа. Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 6.
5. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лавалья. Докл. АН СССР, 1959, № 3, т. 128.